

El teorema de Bell con y sin desigualdades

Adán Cabello*

Departamento de Física Aplicada II,
Universidad de Sevilla,
41012 Sevilla, España.

IX Escuela de Otoño de Física Teórica,
Santiago de Compostela,
7 y 8 de septiembre de 2001.

Resumen

El interés por los estados entrelazados nace con un trabajo de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) en el que cuestionan que la mecánica cuántica (MC) sea una teoría completa. EPR describen un sistema de dos partículas que, según la MC, tiene propiedades globales perfectamente definidas, pero en el que las propiedades de las partículas individuales están totalmente indefinidas. Bell demostró que cualquier intento de completar la MC con los “elementos de realidad” propuestos por EPR, conduce a teorías cuyas predicciones son, en ciertos casos, diferentes de las de la MC. Hasta la fecha, todos los experimentos realizados han descartado tales teorías y confirmado la MC. En los últimos años se han descubierto unas demostraciones del teorema de Bell particularmente simples, que se basan en las correlaciones perfectas entre ciertos resultados que predice la MC, y no en otras predicciones estadísticas. En este trabajo resumimos las principales demostraciones de este tipo y estudiamos la relación entre ellas y las demostraciones del teorema de Bell con desigualdades.

*Correo electrónico: adan@us.es

Índice

1. El argumento de EPR	3
1.1. La mecánica cuántica es “incompleta”	3
1.2. El experimento de Bohm para ilustrar el argumento de EPR .	3
1.3. La descripción cuántica del experimento de EPR-Bohm	5
2. Las desigualdades de Bell	8
2.1. Las predicciones de la MC para el singlete	8
2.2. La desigualdad de CHSH	8
2.2.1. Derivación de la desigualdad de CHSH	8
2.2.2. La MC viola la desigualdad de CHSH	9
2.2.3. La desigualdad de Cirel’son	9
2.3. La desigualdad de CH	10
2.3.1. Derivación de la desigualdad de CH	10
2.3.2. Ventajas de la desigualdad de CH frente a la de CHSH	11
2.3.3. Equivalencia entre las desigualdades de CH y de CHSH	12
2.3.4. Máxima violación de la desigualdad de CH	12
3. El teorema de Bell sin desigualdades	12
3.1. La demostración de Greenberger, Horne y Zeilinger	12
3.2. La desigualdad de Mermin	15
3.3. La demostración de Hardy	15
3.4. La demostración de Hardy y la desigualdad de CH	17
3.5. La demostración para estados máximamente entrelazados . .	18
3.6. Otros resultados recientes	20
4. Soluciones de los ejercicios	20
5. Referencias	24

1. El argumento de EPR

1.1. La mecánica cuántica es “incompleta”

Según EPR, cualquier teoría física satisfactoria debe cumplir dos requisitos:

- (1) Debe ser “correcta”; lo que implica que debe permitir calcular y predecir hechos comprobables experimentalmente.
- (2) Debe ser “completa”: “Una teoría satisfactoria debe, como buena imagen del mundo objetivo, contener una contrapartida para las cosas que se encuentran en el mundo objetivo¹.” [1] “[T]odo elemento de realidad física debe tener una contrapartida en la teoría física².” [2]

¿Qué es un elemento de realidad para EPR?

“Los elementos de realidad física no pueden determinarse por consideraciones filosóficas *a priori*, sino que deben encontrarse apelando a los resultados de experimentos y mediciones. Sin embargo, una definición global de realidad es innecesaria para nuestro propósito. Nos conformaremos con el siguiente criterio que consideraremos razonable. *Si, sin perturbar de ninguna manera un sistema, podemos predecir con certeza (i.e., con probabilidad igual a la unidad) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esa cantidad física*³.” [2]

1.2. El experimento de Bohm para ilustrar el argumento de EPR

El argumento que demuestra la “incompletitud” de la MC se basa en un experimento imaginario sobre un sistema de dos partículas preparado en un

¹“A satisfactory theory should, as a good image of the objective world, contain a counterpart for things found in the objective world.”

²“[E]very element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory.”

³“The elements of physical reality cannot be determined by *a priori* philosophical considerations, but must be found by an appeal to results of experiments and measurements. A comprehensive definition of reality is, however, unnecessary for our purpose. We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable. *If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.*”

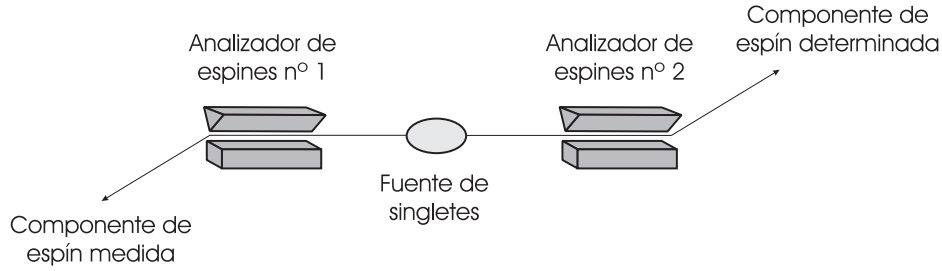


Figura 1: Esquema del experimento de Bohm para ilustrar el argumento de EPR.

estado en el que la posición relativa de ambas partículas y el momento lineal total están perfectamente definidos.

En 1951, David Bohm [4] propuso un experimento imaginario equivalente al de EPR y mucho más sencillo de analizar matemáticamente en MC. El experimento de EPR-Bohm es el siguiente:

Supongamos que tenemos una molécula que contiene dos átomos de espín $\hbar/2$ en un estado en el que el espín total es cero, y supongamos que la molécula se desintegra en sus dos átomos mediante un proceso que no cambia el momento angular total. Los dos átomos empezarán a separarse y pronto dejarán de interactuar de forma apreciable. Sin embargo, su momento angular conjunto sigue siendo cero.

Si el espín fuese un momento angular clásico, la interpretación de este proceso sería la siguiente: Mientras que los dos átomos están juntos formando una molécula, cada componente del momento angular de cada átomo tendría un valor definido, que es siempre opuesto al del otro, de manera que el momento angular total sea cero. Cuando los átomos se separan, cada átomo continuaría teniendo cada componente de su momento angular opuesta a la del otro. Por tanto, los dos vectores momento angular estarían correlacionados.

Supongamos que uno mide el momento angular de espín de una cualquiera de las partículas (átomos), digamos la no. 1. Debido a la existencia de correlaciones, uno puede concluir que el vector momento angular de la otra partícula (la no. 2) es igual y opuesto al de la partícula no. 1. Ver la figura 1.

Ahora veamos cómo describe este experimento en MC. Ahora, el investigador puede medir la componente σ_x , o la componente σ_y o la componente σ_z del espín de la partícula no. 1, pero no más de una de estas componentes en un mismo experimento (sin “perturbar” la otra componente, según nos dice el principio de Heisenberg). No obstante, todavía sucede que cualquiera que sea la componente medida, los resultados están correlacionados, de manera

que si medimos la misma componente del espín del átomo no. 2, siempre tendrá el valor opuesto. Es decir, que una medición de cualquier componente del espín del átomo no. 1 proporciona, lo mismo que en una teoría clásica, una medida indirecta de la misma componente del espín del átomo no. 2. Como, por hipótesis, las dos partículas no interactúan, hemos obtenido una forma de medir una componente arbitraria del espín de la partícula no. 2 sin perturbarla en modo alguno. Si aceptamos la definición de elemento de realidad sugerida por EPR, es claro que después de medir la componente σ_z para la partícula no. 1, la componente σ_z de la partícula no. 2 debe considerarse un elemento de realidad, que existe separadamente sólo en la partícula no. 2. Sin embargo, si esto es cierto, este elemento de realidad debe haber existido en la partícula no. 2 incluso antes de que la medida de σ_z de la partícula no. 1 tuviese lugar, ya que, como no hay interacción con la partícula no. 2, el proceso de medida no puede haber afectado de ninguna manera a esta partícula. Pero el observador puede reorientar el aparato en una dirección arbitraria mientras que los átomos están todavía en vuelo y, por tanto, puede obtener un valor definido (pero impredecible) de la componente de espín en cualquier dirección que elija. Como esto puede hacerse sin perturbar de ninguna manera el segundo átomo, llegamos a la conclusión de que, si el criterio de EPR es aplicable, entonces deben existir elementos de realidad precisos en el segundo átomo, que corresponden a cualesquiera tres componentes de su espín. Como un estado cuántico permite especificar con total precisión como mucho sólo una de esas componentes, EPR llegan a la conclusión de que el estado cuántico no proporciona una descripción completa de todos los elementos de realidad que existen en el segundo átomo.

En resumen, según EPR, la descripción cuántica de este sistema es incompleta.

1.3. La descripción cuántica del experimento de EPR-Bohm

Veamos ahora cómo describe este experimento la MC. El estado de espín de una partícula de espín $1/2$ se representa en MC mediante un vector (o una matriz) bidimensional. El estado de espín de una partícula de espín $1/2$ es un ejemplo de lo que hoy se llama un *qubit*, un sistema cuántico de dos niveles; la unidad mínima de información cuántica. El estado de espín de dos partículas se describe mediante el producto tensorial de dos vectores bidimensionales; esto es, mediante un vector de dimensión cuatro. El estado cuántico del sistema completo (no sólo de su parte de espín) se obtiene haciendo el producto tensorial del estado de espín por el estado espacial, que depende de las coordenadas espaciales de las dos partículas.

Cualquier estado de espín de dos partículas de espín $1/2$ se puede expresar como combinación lineal de una base de estados. Por ejemplo, la base de estados propios de $\sigma_z \otimes \sigma_z$, donde

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

puede ser la formada por los vectores:

$$|++\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$|-+\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$|--\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

donde $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son estados de espín de una sola partícula, que representan, respectivamente, que la partícula tiene componente de espín igual a $\hbar/2$ ó $-\hbar/2$ en la dirección z . Estos estados cumplen $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$. El estado $|+-\rangle$ representa que la partícula no. 1 tiene la componente σ_z de su espín con valor $\hbar/2$ y la partícula no. 2 tiene la componente σ_z de su espín con valor $-\hbar/2$. A veces elegiremos un sistema de unidades en el que $\hbar/2 = 1$ y diremos que las componentes de espín toman los valores 1 ó -1 .

Para construir el estado cuántico que representa la situación en la que el espín total del sistema es cero hay que percatarse de que, de los estados de la base (2)–(5), los únicos en los que cada partícula tiene la componente de espín opuesta a la de la otra son $|+-\rangle$ y $|-+\rangle$. Por tanto, el estado buscado debe de ser una combinación lineal de esos dos estados. De las diferentes combinaciones lineales posibles, la única en la que el spin total del sistema

conjunto es cero es, salvo fase global,

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

El estado (6) se llama estado *singlete* de espín.

La primera observación importante sobre este estado es que el espín total del sistema está completamente definido, pero la componente σ_z del espín de cada partícula está *completamente indefinida*. De hecho, si usamos las reglas de la MC para calcular cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$ al medir la componente σ_z de la partícula no. 1, obtendremos $1/2$, que es la misma probabilidad de obtener el otro resultado (el resultado opuesto).

La segunda observación importante, es que si expresamos el singlete en otra base ortogonal formada por los estados propios de las componentes de los espines individuales en otra dirección, digamos n (base formada por los cuatro vectores: $|n+n+\rangle$, $|n+n-\rangle$, $|n-n+\rangle$ y $|n-n-\rangle$), el singlete se escribe como

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n+n-\rangle - |n-n+\rangle). \quad (7)$$

Es decir, la primera observación es válida no sólo para las componentes en la dirección z sino también para las componentes en cualquier dirección n .

La tercera observación es que, además de tener un valor definido del espín total, si se mide la misma componente de espín en cada partícula, los resultados estarán correlacionados: serán opuestos. Exactamente igual que en la teoría clásica. Por ejemplo, si se miden las componentes en la dirección z , si el resultado de la partícula no. 1 es $-\hbar/2$, el resultado de la partícula no. 2 será $\hbar/2$, y lo mismo si medimos las componentes en la dirección x ó y .

Ejercicio 1 *Teniendo en cuenta que $\sigma_n = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$, donde, en coordenadas esféricas $\mathbf{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, y*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

demostrar que el singlete (6) se puede reescribir como (7).

2. Las desigualdades de Bell

2.1. Las predicciones de la MC para el singlete

Bell [3] demostró que para el estado singlete (6) las predicciones *estadísticas* de la MC resultan incompatibles con una “predeterminación separable” (o, equivalentemente, con los elementos de realidad de EPR).

¿Cuáles son las “predicciones estadísticas” de la MC para el singlete?

Ejercicio 2 *Comprobar que si A es una componente de espín de la partícula no. 1 y B de la partícula 2 y las direcciones de A y B forman un ángulo θ_{AB} , entonces en el singlete el valor esperado de AB (el producto de ambas componentes) es $-\cos\theta_{AB}$ (en unidades en las que $\hbar/2 = 1$).*

2.2. La desigualdad de CHSH

2.2.1. Derivación de la desigualdad de CHSH

Teorema 1 *Si $A, a, B, b \in \{-1, 1\}$ y $\langle AB \rangle$ es el promedio del producto AB sobre un cierto conjunto, entonces se verifica la siguiente desigualdad.*

$$-2 \leq \langle AB \rangle + \langle Ab \rangle + \langle aB \rangle - \langle ab \rangle \leq 2. \quad (11)$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos las expresiones $A+a$ y $A-a$; necesariamente una de ellas es cero y la otra -2 ó 2 . Por tanto, la expresión $B(A+a)+b(A-a)$ necesariamente vale -2 ó 2 . Supongamos que A, a, B y b fuesen observables físicos cuyos valores estuviesen predefinidos para cada sistema individual y supongamos que disponemos de muchos sistemas individuales sobre los que medir esas cantidades. Al calcular el promedio de los resultados de esas medidas cumplirá (11). ■

Supongamos ahora que los sistemas físicos son pares de partículas de espín $1/2$ preparados en el estado singlete, y que A y a son dos componentes de espín de la partícula no. 1, mientras que B y b son componentes de espín de la partícula no. 2. Supongamos, además, que las partículas 1 y 2 están lo suficientemente alejadas entre sí para que nada que se haga sobre la partícula no. 1 pueda influir causalmente (i.e., a velocidades no superiores a la de la luz en el vacío) sobre la partícula no. 2. Entonces, A, a, B y b verifican cada uno de ellos el criterio de elemento de realidad de EPR.

En MC no podemos medir simultáneamente A y a , ni B y b , sin embargo sí podemos hacer experimentos en los que midamos A y B , otros en los que midamos A y b , otros en los que midamos a y B , y otros en los que midamos a y b (ver la figura 2). Suponiendo que los valores de los observables medidos no

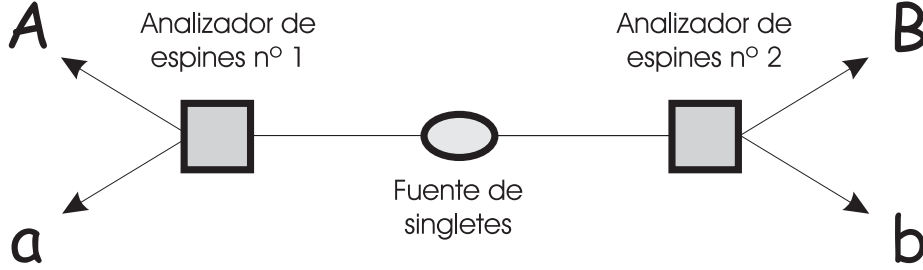


Figura 2: Esquema del dispositivo para comprobar la desigualdad de CHSH. A y a son dos experimentos alternativos sobre las partículas de la izquierda, B y b son dos experimentos alternativos sobre las partículas de la derecha.

dependen de los no medidos, también debe ocurrir que los promedios de los cuatro experimentos alternativos cumplan la desigualdad (11) que se llama la *desigualdad de Clauser-Horne-Shimony-Holt* [5] (CHSH). La desigualdad de Bell en [3] es un caso particular de la desigualdad de CHSH.

2.2.2. La MC viola la desigualdad de CHSH

Sin embargo, la MC dice que si A y B son componentes de espín que forman un ángulo θ_{AB} , entonces en el singlete el valor esperado de AB es $-\cos \theta_{AB}$. Por tanto,

$$\langle AB \rangle + \langle Ab \rangle + \langle aB \rangle - \langle ab \rangle = -\cos \theta_{AB} - \cos \theta_{Ab} - \cos \theta_{aB} + \cos \theta_{ab}. \quad (12)$$

Elijiendo $\cos \theta_{AB} = \cos \theta_{Ab} = \cos \theta_{aB} = -\cos \theta_{ab} = \sqrt{2}/2$, por ejemplo midiendo las componentes

$$A = \sigma_x, \quad (13)$$

$$a = \sigma_y, \quad (14)$$

$$B = -(\sigma_x + \sigma_y)/\sqrt{2}, \quad (15)$$

$$b = (-\sigma_x + \sigma_y)/\sqrt{2}, \quad (16)$$

se obtiene $2\sqrt{2}$, que es mayor que 2.

En resumen: en ciertas situaciones la MC viola la desigualdad de CHSH (11).

2.2.3. La desigualdad de Cirel'son

Para ciertos estados y ciertos observables, los valores esperados que predice la MC violan la desigualdad de CHSH, pero ¿cuál es la máxima violación

de la desigualdad de CHSH usando los valores esperados que predice la MC? Cirel'son [6] demostró que

$$-2\sqrt{2} \leq \langle AB \rangle_\psi + \langle Ab \rangle_\psi + \langle aB \rangle_\psi - \langle ab \rangle_\psi \leq 2\sqrt{2}, \quad (17)$$

donde ψ , A , B , a y b son un estado cuántico y cuatro observables locales genéricos. Es decir, la violación de la desigualdad de CHSH que obtuvimos antes para el singlete, es la máxima violación posible usando los valores esperados de la MC.

2.3. La desigualdad de CH

2.3.1. Derivación de la desigualdad de CH

Teorema 2 *Si A , a , B , $b \in [0, 1]$, entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$-1 \leq AB - Ab + aB + ab - a - B \leq 0. \quad (18)$$

DEMOSTRACIÓN: El término de en medio en (18) es lineal en cada una de las cuatro variables A , a , B y b (supuestas fijas las otras tres), luego los extremos de ese término medio deben obtenerse cuando esas variables toman alguno de sus valores extremos, por la propia definición de extremo. Si $A = a = 0$, entonces el término medio se convierte en $-B$, que sólo puede valer -1 ó 0 . Si $A = a = 1$, queda $B - 1$, que sólo puede valer -1 ó 0 . Si $A = 1$ y $a = 0$, queda $-b$, que sólo puede valer -1 ó 0 . Si $A = 0$ y $a = 1$, queda $b - 1$, que sólo puede valer -1 ó 0 . ■

Haciendo los cambios de variables $AB \rightarrow P(A = r_A, B = r_B)$, etc. y $A \rightarrow P(A = r_A)$, etc., obtenemos

$$\begin{aligned} -1 &\leq P(A = r_A, B = r_B) - P(A = r_A, b = r_b) \\ &\quad + P(a = r_a, B = r_B) + P(a = r_a, b = r_b) \\ &\quad - P(a = r_a) - P(B = r_B) \leq 0, \end{aligned} \quad (19)$$

donde $P(A = r_A, B = r_B)$ es la probabilidad de, al medir A sobre la partícula no. 1 y B sobre la partícula no. 2, obtener, respectivamente, los resultados r_A y r_B (cada uno de los cuales es -1 ó 1), y $P(A = r_A)$ es la probabilidad de, al medir A sobre la partícula no. 1, obtener r_A . La expresión (19) se conoce como *desigualdad de Clauser-Horne* [7] (CH).

2.3.2. Ventajas de la desigualdad de CH frente a la de CHSH

Las ventajas son dos:

(1) En la derivación de la desigualdad de CH hemos supuesto que $A, a, B, b \in [0, 1]$. En la derivación de la desigualdad de CHSH, sin embargo, supusimos que $A, a, B, b \in \{-1, 1\}$. En CH, las cantidades A , etc. acaban siendo *probabilidades*. En la desigualdad de CHSH son *observables* cuyos valores, -1 ó 1 , suponemos predefinidos. Es decir, en la desigualdad de CH no es necesario suponer que las variables ocultas determinan cada resultado *concreto* de una medida, sino sólo la *probabilidad* de cada resultado. Dicho de otra manera, la desigualdad de CH no necesita la hipótesis de que las variables ocultas sean *deterministas*.

(2) En CHSH aparecen *promedios de observables*, en CH aparecen *probabilidades de resultados*. Los datos que se obtienen en los *experimentos* son el número de veces que se produce el resultado $A = r_A$, que denotaremos por $N(r_A)$ o el número de coincidencias $N(r_A, r_B)$. Lo que aparecen en las desigualdades son promedios y probabilidades. La relación entre teoría y experimentos es

$$\langle AB \rangle = \frac{r_A r_B}{N} \{N(r_A, r_B) - N(r_A, -r_B) - N(-r_A, r_B) + N(-r_A, -r_B)\}, \quad (20)$$

$$P(A = r_A) = N(r_A) / N, \quad (21)$$

$$P(A = r_A, B = r_B) = N(r_A, r_B) / N, \quad (22)$$

donde N es el número total de pares de partículas emitido por la fuente. La baja eficiencia de los detectores hace que N sea desconocido. En los experimentos que usan la desigualdad de CHSH esto se resuelve suponiendo que las partículas detectadas son una muestra estadísticamente representativa del conjunto (hipótesis de *fair sampling*). Sin embargo, es posible construir modelos de variables ocultas locales en los que las partículas detectadas no son una muestra representativa del conjunto y en los que los promedios reales satisfacen la desigualdad de CHSH, pero los promedios que se obtienen con la hipótesis de fair sampling coinciden con las predicciones de la MC. Afortunadamente, la desigualdad de CH se puede reescribir de manera que N no aparezca. Para ello, olvidémonos del límite inferior en la expresión (19), sumemos $P(a = r_a) + P(B = r_B)$ a ambos miembros y dividamos entre $P(a = r_a) + P(B = r_B)$. El resultado es una nueva desigualdad,

$$\frac{P(r_A, r_B) - P(r_A, r_b) + P(r_a, r_B) + P(r_a, r_b)}{P(r_a) + P(r_B)} \leq 1, \quad (23)$$

cuyo equivalente experimental no depende del desconocido número N .

Ejercicio 3 *Demostrar que la desigualdad de CH (19) se puede reescribir como*

$$\begin{aligned} -1 \leq & P(A = r_A, B = r_B) - P(A = r_A, b = r_b) \\ & - P(a = -r_a, B = r_B) - P(a = r_a, b = -r_b) \leq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

2.3.3. Equivalencia entre las desigualdades de CH y de CHSH

La relación entre las distribuciones de probabilidad que aparecen en la desigualdad de CH y los valores medios que aparecen en la desigualdad de CHSH viene dada por la expresión:

$$P(A = r_A, B = r_B) = \frac{1}{4} (1 + r_A \langle A \rangle + r_B \langle B \rangle + r_A r_B \langle AB \rangle), \quad (25)$$

donde los promedios de observables locales, por ejemplo $\langle A \rangle$, quieren decir promedio de los resultados al medir el observable local A sobre la partícula no. 1 cuando se mide el observable local B sobre la partícula no. 2. Suponiendo que se cumple el principio de localidad, esos promedios son independientes de lo que se esté midiendo sobre la otra partícula, por eso los denotamos simplemente como, por ejemplo, $\langle A \rangle$.

Ejercicio 4 *Demostrar que la desigualdad de CH (24) es equivalente (suponiendo que se cumple el principio de localidad) a la desigualdad de CHSH (11).*

2.3.4. Máxima violación de la desigualdad de CH

Ejercicio 5 *¿Cuál es la violación de la desigualdad de CH (24) correspondiente a una violación de $2\sqrt{2}$ de la desigualdad de CHSH (11)? ¿Cuál es la máxima violación posible, en principio, de la desigualdad de CHSH (11) en el supuesto de que los cuatro valores esperados que aparecen fuesen independientes? ¿Cuál sería la correspondiente violación de la la desigualdad de CH (24)?*

3. El teorema de Bell sin desigualdades

3.1. La demostración de Greenberger, Horne y Zeilinger

En 1989 Greenberger, Horne y Zeilinger [8] (GHZ) obtuvieron una extraordinaria demostración de la incompatibilidad entre la MC y los elementos de realidad de EPR. Esta demostración fue luego simplificada por David

Mermin [9]. Las características de la demostración de GHZ-Mermin del teorema de Bell son:

- (I) sólo usa *correlaciones perfectas* y no predicciones estadísticas, como en las demostraciones de Bell, CHSH y CH (en otras palabras, es una demostración “sin probabilidades”).
- (II) sirve sólo para a un tipo particular de estados de *tres o más partículas* que, desde entonces, se conocen como *estados de GHZ*.

Un estado de GHZ para un sistema de tres qubits es, por ejemplo,

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+++ \rangle - |-- - \rangle). \quad (26)$$

Si llamamos X_1 al resultado de medir la componente σ_x del espín de la partícula no. 1, Y_2 al resultado de medir la componente σ_y del espín de la partícula no. 2, Y_3 al resultado de medir la componente σ_y del espín de la partícula no. 3, etc. y trabajamos en unidades tales que $\hbar/2=1$, las correlaciones entre los resultados que nos interesan para la demostración se pueden resumir en las siguientes ecuaciones:

$$X_1 Y_2 Y_3 = 1, \quad (27)$$

$$Y_1 X_2 Y_3 = 1, \quad (28)$$

$$Y_1 Y_2 X_3 = 1, \quad (29)$$

$$X_1 X_2 X_3 = -1. \quad (30)$$

Ejercicio 6 *Comprobar las ecuaciones (27)-(30).*

Usando (27)-(30) es fácil comprobar que X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3 y Y_3 cumplen el criterio de EPR de elementos de realidad, puesto que cualquiera de ellos se puede predecir con certeza a partir de medidas sobre las otras dos partículas. Si hacemos la hipótesis de que las tres partículas están lo suficientemente alejadas entre sí como para que nada que se haga sobre ellas pueda afectar causalmente a las demás, ello implica que las medidas sobre las partículas no. 1 y no. 2 que permiten determinar, por ejemplo, X_3 , no pueden perturbar la partícula no. 3. Ver la figura 3.

Sin embargo, las cuatro ecuaciones anteriores también demuestran que es imposible que existan todos esos elementos de realidad. La demostración es muy sencilla por reducción al absurdo: supongamos que X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3 y Y_3 tuviesen valores predefinidos -1 ó 1 . Entonces el valor de, por ejemplo, X_1 sería el mismo en la primera ecuación y en la cuarta. Sin embargo, es

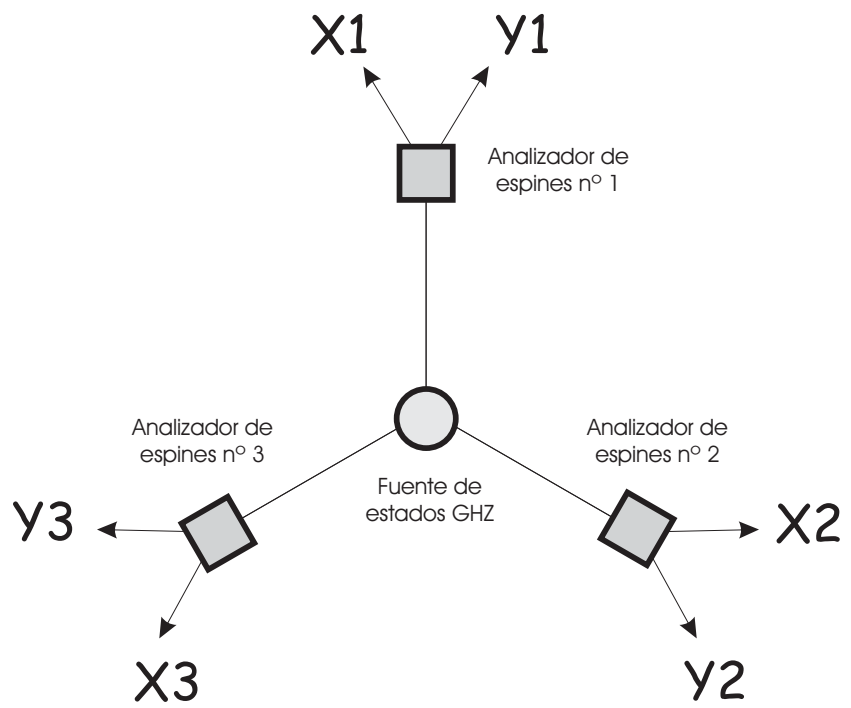


Figura 3: Esquema del dispositivo para comprobar la demostración de GHZ. X_i y Y_i son dos experimentos alternativos sobre la partícula i .

imposible completar esa asignación de valores por el sencillo motivo de que cada valor aparece exactamente dos veces, por lo que al multiplicar las cuatro ecuaciones necesariamente obtendríamos un 1 a la izquierda del signo igual, mientras que obtendríamos un -1 a la derecha.

3.2. La desigualdad de Mermin

A partir de la demostración de GHZ, Mermin [10] derivó unas desigualdades de Bell para tres (o más) qubits. En el caso de tres qubits, la demostración parte de la observación de que todas las propiedades “interesantes” del estado (26) provienen de que es un estado propio del operador

$$O = \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 + \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 + \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 - \sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3, \quad (31)$$

con valor propio 4. Esto le lleva a preguntarse por cuáles son los límites entre los que está acotada la correspondiente combinación lineal de valores esperados, supuesto que los observables locales tengan valores predefinidos. La conclusión es lo que se conoce como la *desigualdad de Mermin*:

$$-2 \leq \langle A_1 B_2 B_3 \rangle + \langle B_1 A_2 B_3 \rangle + \langle B_1 B_2 A_3 \rangle - \langle A_1 A_2 A_3 \rangle \leq 2, \quad (32)$$

donde A_i y B_i ($i = 1, 2, 3$) son observables locales genéricos sobre la partícula i .

Ejercicio 7 ¿Cuál es la máxima violación posible de la desigualdad de Mermin (32)?

Nótese que el cociente entre la máxima violación cuántica y el límite clásico es mucho mayor para la desigualdad de Mermin de tres qubits que para la desigualdad de CHSH de dos qubits. Es decir, que si se pudiesen preparar y detectar estados de tres qubits con una eficiencia similar a la que tenemos para estados de dos qubits, entonces la desigualdad de Mermin sería mucho más ventajosa que la de CHSH a la hora descartar experimentalmente el realismo local.

Recientemente se ha hecho un experimento con fotones en el que se han verificado, dentro de un razonable error experimental, las predicciones de la MC para los estados de GHZ [11].

3.3. La demostración de Hardy

En 1993, Lucien Hardy propuso una demostración del teorema de Bell sin desigualdades (pero “con probabilidades”) válida para dos qubits en un

estado no máximamente entrelazado [12]. La de Hardy es probablemente la demostración más sencilla posible del teorema de Bell.

Hardy demostró que para cualquier estado puro de dos qubits que sea entrelazado pero no máximamente entrelazado, $|\eta\rangle$, existen dos observables (componentes de espín, por ejemplo) A y a para la partícula no. 1 y dos observables B y b para la partícula no. 2, tales que el estado se puede expresar en las correspondientes cuatro bases ortogonales de las siguientes formas:

$$|\eta\rangle = c_{++}|A+B+\rangle + c_{+-}|A+B-\rangle + c_{-+}|A-B+\rangle + c_{--}|A-B-\rangle \quad (33)$$

$$= d_{++}|A+b+\rangle + d_{-+}|A-b+\rangle + d_{--}|A-b-\rangle \quad (34)$$

$$= f_{++}|a+B+\rangle + f_{+-}|a+B-\rangle + f_{--}|a-B-\rangle \quad (35)$$

$$= g_{+-}|a+b-\rangle + g_{-+}|a-b+\rangle + g_{--}|a-b-\rangle, \quad (36)$$

donde los coeficientes c_i , d_i , f_i y g_i son todos distintos de cero. De esas cuatro ecuaciones se deduce que $|\eta\rangle$ tiene las siguientes propiedades:

$$P_\eta(A=+1, B=+1) = |c_{++}|^2, \quad (37)$$

$$P_\eta(b=+1 | A=+1) = 1, \quad (38)$$

$$P_\eta(a=+1 | B=+1) = 1, \quad (39)$$

$$P_\eta(a=+1, b=+1) = 0. \quad (40)$$

Consideremos ahora un experimento en el que se hayan medido A (sobre la partícula no. 1) y B (sobre la no. 2) y fijémonos en un suceso en el se hayan obtenido en ambas mediciones el resultado $+1$. Esto puede ocurrir, según nos dice la propiedad (37). Imaginemos ahora que en ese mismo suceso hubiésemos medido sobre la partícula no. 2 el observable b en lugar del observable B . Según la propiedad (38) el resultado de esa medición habría sido, con total certeza $b=+1$. De hecho, desde el momento que en la partícula no. 1 se obtiene $A=+1$ es posible predecir con certeza y sin perturbar la partícula no. 2 (si asumimos que las partículas están suficientemente alejadas) que el valor de b es $+1$. Entonces, según EPR, en ese suceso la segunda partícula tiene un elemento de realidad correspondiente a $b=+1$. Mediante un argumento similar, a partir de la propiedad (39) podemos concluir que en ese suceso la partícula no. 1 tiene un elemento de realidad correspondiente a $a=+1$. Por tanto, si en ese suceso hubiésemos medido a sobre la partícula no. 1 y b sobre la partícula no. 2, habríamos obtenido $a=+1$ y $b=+1$. Sin embargo, esto contradice la propiedad (40). Por tanto, para un sistema preparado en un estado no máximamente entrelazado (o *estado de Hardy*) no pueden existir elementos de realidad. Ver la figura 4.

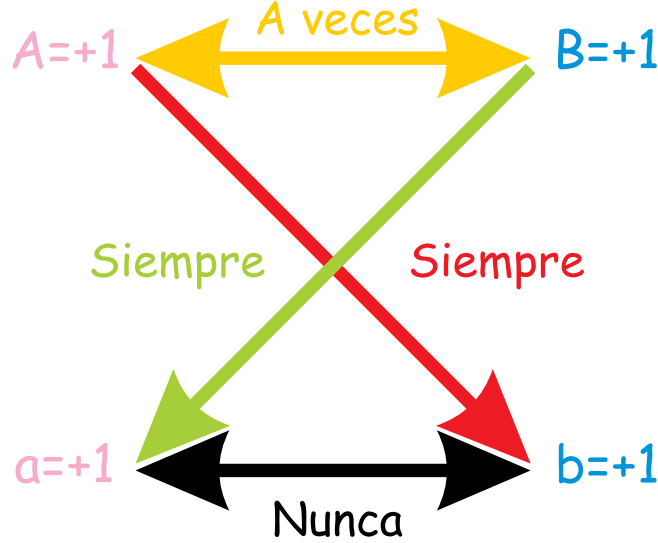


Figura 4: Esquema lógico de la demostración de Hardy.

Ejercicio 8 Escribir en las bases de estados propios de $\sigma_z \otimes \sigma_x$, $\sigma_x \otimes \sigma_z$ y $\sigma_x \otimes \sigma_x$, el estado que, en la base de estados propios de $\sigma_z \otimes \sigma_z$, tiene la expresión

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle). \quad (41)$$

Comprobar que el estado $|\eta\rangle$ cumple las siguientes cuatro propiedades:

$$P_\eta(z_1 = -1, z_2 = -1) = 0, \quad (42)$$

$$P_\eta(z_1 = -1 | x_2 = -1) = 1, \quad (43)$$

$$P_\eta(z_2 = -1 | x_1 = -1) = 1, \quad (44)$$

$$P_\eta(x_1 = -1, x_2 = -1) > 0. \quad (45)$$

3.4. La demostración de Hardy y la desigualdad de CH

Ya vimos que la desigualdad de CH original (19) se podía reescribir de una manera más simétrica (24). En esta forma más simétrica las cuatro probabilidades que aparecen son precisamente las cuatro probabilidades implicadas en la demostración de Hardy. Para verlo más claramente tomamos en (24) $r_A = r_B = r_a = -r_b = 1$, así obtenemos

$$\begin{aligned} -1 &\leq P(A = 1, B = 1) - P(A = 1, b = -1) \\ &\quad - P(a = -1, B = 1) - P(a = 1, b = 1) \leq 0, \end{aligned} \quad (46)$$

donde aparecen las cuatro probabilidades (37)–(40). Esto implica que, aunque el argumento de Hardy es de una sencillez extrema, en la práctica, a la hora de hacer experimentos reales en los que las eficiencias de los detectores no son perfectas, el argumento de Hardy se traduce en una violación (y no muy grande⁴, si la comparamos con la que produce el singlete) de la desigualdad de CH.

3.5. La demostración para estados máximamente entrelazados

La demostración de GHZ usa sólo correlaciones perfectas, pero sólo vale para ciertos estados entrelazados de tres o más partículas. La demostración de Hardy vale para estados entrelazados de dos partículas pero, curiosamente, no para los estados máximamente entrelazados (como el singlete), que son precisamente aquellos para los que la violación de las desigualdades de Bell es máxima. En este punto surgen de manera natural dos preguntas:

- (a) ¿Se puede extender la demostración de Hardy a estados máximamente entrelazados como el singlete?
- (b) ¿Se puede demostrar el teorema de Bell para el singlete usando sólo correlaciones perfectas?

La respuesta es sí para ambas preguntas [13, 14]. De hecho, las dos demostraciones son en realidad dos formas distintas de una misma demostración. El “truco” de estas demostraciones del teorema de Bell consiste en preparar *dos* parejas de partículas en el estado singlete y permitir mediciones no sólo de componentes de espín (en las direcciones z ó x) sino también de observables de dos partículas, como por ejemplo $\sigma_z^1 \otimes \sigma_z^2$ (cuyo resultado representaremos por $Z_1 Z_2$).

Supongamos que las partículas no. 1 y no. 3 están en el estado singlete y que también lo están las partículas no. 2 y no. 4. Supongamos también que un observador puede hacer mediciones sobre las partículas no. 1 y no. 2, mientras que otro observador suficientemente alejado puede hacer mediciones sobre las partículas no. 2 y no. 4. Ver la figura 5. En ese caso, usando sólo correlaciones perfectas se puede demostrar que no existen elementos de realidad. La demostración es fruto de una contradicción algebraica similar a la que se obtenía en la demostración de GHZ y se resume en que es imposible asignar valores definidos, -1 ó 1 , a los doce observables (seis para la pareja

⁴Se puede demostrar [12] que el máximo valor posible para la probabilidad que aparece en (37) es $[(\sqrt{5} - 1)/2]^5 \approx 0,09$.

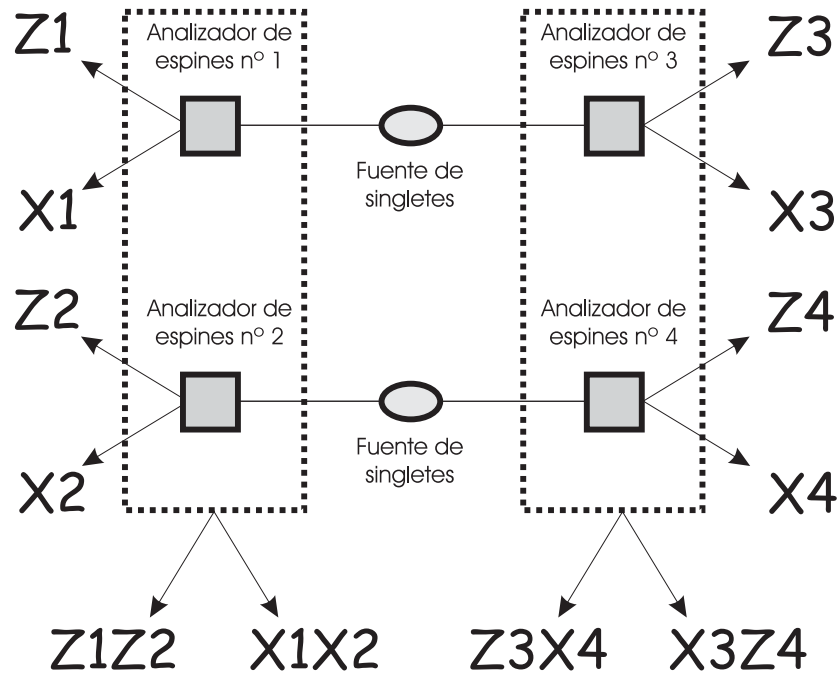


Figura 5: Esquema del dispositivo para demostrar el teorema de Bell sin desigualdades para el singlete. X_i y Z_i son dos experimentos alternativos sobre la partícula i , Z_1Z_2 es un experimento conjunto sobre las partículas 1 y 2, etc.

formada por las partículas no. 1 y no. 2, y seis para la pareja formada por las partículas no. 3 y no. 4) que aparecen en las siguientes nueve ecuaciones:

$$Z_1 = -Z_3, \quad (47)$$

$$X_1 = -X_3, \quad (48)$$

$$Z_2 = -Z_4, \quad (49)$$

$$X_2 = -X_4, \quad (50)$$

$$Z_1 Z_2 = Z_3 \cdot Z_4, \quad (51)$$

$$X_1 X_2 = X_3 \cdot X_4, \quad (52)$$

$$Z_1 \cdot X_2 = Z_3 X_4, \quad (53)$$

$$X_1 \cdot Z_2 = X_3 Z_4, \quad (54)$$

$$Z_1 Z_2 \cdot X_1 X_2 = -Z_3 X_4 \cdot X_3 Z_4, \quad (55)$$

La demostración es muy similar a la de antes: cada observable aparece en dos ecuaciones y siempre en el mismo lado de la ecuación. Por tanto, el producto de los lados izquierdos es 1 mientras que el producto de los lados derechos es -1 . Por tanto, aunque existen correlaciones perfectas entre los resultados de esos experimentos, nos vemos obligados a concluir que los resultados no estaban determinados antes de los experimentos.

A partir de esta demostración se puede, a su vez, derivar una nueva desigualdad de Bell [14].

3.6. Otros resultados recientes

Es posible obtener una demostración del teorema de Bell sin desigualdades válida para los dos tipos de estados con entrelazamiento genuino de tres qubits, el estado W y el GHZ [15].

Al considerar las correlaciones de dos qubits de un sistema de tres qubits, es posible obtener violaciones de la desigualdad de CHSH mayores de lo que sugiere la desigualdad de Cirel'son [16].

4. Soluciones de los ejercicios

Solución del ejercicio 1

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (56)$$

cuyos vectores propios, normalizados, podemos escribir como⁵

$$|n+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$|n-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Haciendo el correspondiente cambio de base, llegamos a que en la base $|n+n+\rangle, |n+n-\rangle, |n-n+\rangle, |n-n-\rangle$, el singlete (6) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \langle n+| \\ \langle n-| \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \langle n+| \\ \langle n-| \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_n. \quad (59)$$

Solución del ejercicio 2 Dado que el singlete es invariante bajo rotaciones bilaterales (esto es, bajo la misma rotación en ambas partículas), podemos tomar, sin pérdida de generalidad en el resultado,

$$A = \sigma_z, \quad (60)$$

$$B = \sin \theta_{AB} \sigma_x + \cos \theta_{AB} \sigma_z. \quad (61)$$

Entonces,

$$AB = A \otimes B \quad (62)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos \theta_{AB} & \sin \theta_{AB} \\ \sin \theta_{AB} & -\cos \theta_{AB} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_{AB} & \sin \theta_{AB} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{AB} & -\cos \theta_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \theta_{AB} & -\sin \theta_{AB} \\ 0 & 0 & -\sin \theta_{AB} & \cos \theta_{AB} \end{pmatrix}. \quad (64)$$

El valor esperado de AB en el estado singlete ψ es

$$\langle AB \rangle_\psi = \langle \psi | AB | \psi \rangle \quad (65)$$

$$= -\cos \theta_{AB}. \quad (66)$$

Solución del ejercicio 3 Basta con hacer las siguientes sustituciones en (19):

$$P(a = r_a, B = r_B) - P(B = r_B) = -P(a = -r_a, B = r_B), \quad (67)$$

$$P(a = r_a, b = r_b) - P(a = r_a) = -P(a = r_a, b = -r_b). \quad (68)$$

⁵Nótese que si $\theta = \phi = 0$, recuperamos los vectores $|+\rangle$ y $|-\rangle$ definidos en (2)-(5).

Solución del ejercicio 4 *Sustituyendo (25) en (24), obtenemos*

$$-1 \leq \frac{1}{4}(-2 + r_{Ar_B}\langle AB \rangle - r_{Ar_b}\langle Ab \rangle + r_{ar_B}\langle aB \rangle + r_{ar_b}\langle ab \rangle) \leq 0. \quad (69)$$

Multiplcando por 4 y sumando 2, obtenemos

$$-2 \leq r_{Ar_B}\langle AB \rangle - r_{Ar_b}\langle Ab \rangle + r_{ar_B}\langle aB \rangle + r_{ar_b}\langle ab \rangle \leq 2, \quad (70)$$

que es la forma más general de las desigualdades de CHSH. Eligiendo $r_A = r_B = r_a = -r_b = 1$, obtenemos

$$-2 \leq \langle AB \rangle + \langle Ab \rangle + \langle aB \rangle - \langle ab \rangle \leq 2, \quad (71)$$

que es la desigualdad de CHSH (11).

Solución del ejercicio 5 *Como es fácil ver al estudiar la equivalencia entre la desigualdad de CH (24) y la desigualdad de CHSH (11), la relación entre sus límites es $l_{CH} = (l_{CHSH} - 2)/4$. Por tanto, la respuesta a la primera pregunta es $(\sqrt{2} - 1)/2$. Si los cuatro valores esperados que aparecen en (11) fuesen independientes, la combinación lineal de ellos que aparece en (11) podría llegar a valer 4, puesto que son observables que pueden tomar valores -1 ó 1 . Por lo dicho antes, la correspondiente violación de la desigualdad de CH (24) sería entonces $1/2$.*

Solución del ejercicio 6 *Estas cuatro ecuaciones se pueden comprobar sin más que reescribir el estado $|\text{GHZ}\rangle$, que en (26) está expresado en la base de estados propios de σ_{z1} , σ_{z2} y σ_{z3} , en las correspondientes bases (la de estados propios de σ_{x1} , σ_{y2} y σ_{y3} , para comprobar la ecuación (27), etc.):*

$$|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{2}(|x+y+y+\rangle + |x+y-y-\rangle + |x-y+y-\rangle + |x-y-y+\rangle), \quad (72)$$

$$= \frac{1}{2}(|y+x+y+\rangle + |y+x-y-\rangle + |y-x+y-\rangle + |y-x-y+\rangle), \quad (73)$$

$$= \frac{1}{2}(|y+y+x+\rangle + |y+y-x-\rangle + |y-y+x-\rangle + |y-y-x+\rangle), \quad (74)$$

$$= \frac{1}{2}(|x+x+x-\rangle + |x+x-x+\rangle + |x-x+x+\rangle + |x-x-x-\rangle). \quad (75)$$

Solución del ejercicio 7 *Puesto que cada uno de los valores esperados que aparece en (32) está acotado entre -1 y 1 , la combinación de valores esperados de la desigualdad de Mermin no puede valer más de 4 (ni menos de -4). Por tanto, la máxima violación posible de la desigualdad (32) es precisamente la que proporciona el estado de GHZ (26) y los seis observables elegidos antes.*

Solución del ejercicio 8

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|z+x+\rangle + |z-x+\rangle - |z-x-\rangle), \quad (76)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(2|x+z+\rangle + |x+z-\rangle - |x-z-\rangle), \quad (77)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(3|x+x+\rangle - |x+x-\rangle - |x-x+\rangle - |x-x-\rangle). \quad (78)$$

Las propiedades (42)-(45) se deducen, respectivamente de (41), (76)-(78). En particular, de (78),

$$P_\eta(x_1 = -1, x_2 = -1) = \frac{1}{12}. \quad (79)$$

Referencias

- [1] Anónimo, “Einstein attacks quantum theory”, *The New York Times*, 4 de mayo de 1935. Reimpreso en M. Jammer, “Le paradoxe d’Einstein-Podolsky-Rosen”, *La Recherche* **11**, 111, 510-519 (1980).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777-780 (1935).
- [3] J. S. Bell, “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”, *Physics* **1**, 3, 195-200 (1964).
- [4] D. Bohm, *Quantum theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1951; Constable, Londres, 1954; Dover, Nueva York, 1989, pp. 614-622.
- [5] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony y R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories”, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 15, 880-884 (1969).
- [6] B. S. Cirel’son, “Quantum generalizations of Bell’s inequality”, *Lett. Math. Phys.* **4**, 2, 93-100 (1980).
- [7] J. F. Clauser y M. A. Horne, “Experimental consequences of objective local theories”, *Phys. Rev. D* **10**, 2, 526-535 (1974).
- [8] D. M. Greenberger, M. A. Horne y A. Zeilinger, “Going beyond Bell’s theorem”, en M. Kafatos (ed.), *Bell’s theorem, quantum theory, and conceptions of the universe* [Proc. of a workshop (George Mason University, 1988)], Kluwer Academic, Dordrecht, Holanda, 1989, pp. 69-72.
- [9] N. D. Mermin, “What’s wrong with these elements of reality?”, *Phys. Today* **43**, 6, 9-11 (1990).
- [10] N. D. Mermin, “Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 15, 1838-1840 (1990).
- [11] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter y A. Zeilinger, “Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement”, *Nature* **403**, 6769, 515-519 (2000).
- [12] L. Hardy, “Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 11, 1665-1668 (1993).

- [13] A. Cabello, “Bell’s theorem without inequalities and without probabilities for two observers”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 10, 1911-1914 (2001).
- [14] A. Cabello, “‘All versus nothing’ inseparability for two observers’, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 1, 010403 (2001).
- [15] A. Cabello, “Bell’s theorem with and without inequalities for the three-qubit Greenberger-Horne-Zeilinger and W states”, *Phys. Rev. A* **65**, 3, 032108 (2002).
- [16] A. Cabello, “Violating Bell’s inequality beyond Cirel’son’s bound”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 6, 060403 (2002).