Pruebas algebraicas de imposibilidad de variables ocultas en mecánica cuántica

Memoria que presenta para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas

Adán Cabello Quintero

Dirigida por el profesor

Guillermo García Alcaine

Departamento de Física Teórica I
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid

Mayo 1996

A mis padres

Agradecimientos

Al terminar un trabajo como éste, llega el momento de volver la vista atrás y reconocer la deuda contraída con muchas personas. Sin ellas, estas páginas no habrían sido posibles o, por lo menos, habrían sido diferentes.

Empezaré por dar las gracias a mis padres, sin cuya paciencia, apoyo y amor, no lo habría conseguido.

En segundo lugar quiero dar las gracias a Guillermo García Alcaine, mi director de tesis y amigo. Durante más de tres años he disfrutado del privilegio de su esmerada labor de dirección; con él he aprendido muchas cosas. Su ilusión, su entusiasmo, su entrega y su confianza en un proyecto de perspectivas inicialmente inciertas han hecho que mi deuda con él y con su mujer, Julia Cereceda, sea impagable.

Quiero dar también las gracias a mis amigos y familiares, apoyos imprescindibles sin los que esto no habría sido llevadero: a Carlos Serra, por sobrevivir al paso de los años, la distancia y a todos mis estados de ánimo; a la familia Orfila (Bartolomé, Charo, Luis y Agustín) y a Nacho, que fueron como una segunda familia para mí; a Carmen Rubio; a Iván García-Pelayo; a Milagros Naval y Pilar Calvo; a mi abuela Raquel y a mi tía Marisa. A todos sé que les hace ilusión verme en este trance.

También quisiera agradecerles su labor a los que fueron mis mejores profesores durante la licenciatura; ellos consiguieron hacer divertido lo que en otras manos no lo hubiese sido y sin ellos probablemente yo no estaría aquí.

Mi agradecimiento también a todos los "voluntarios" que leyeron o prestaron oídos a las primeras versiones de nuestros trabajos: Lorenzo Abellanas, Rob Clifton, Alberto Galindo, Asher Peres, Emilio Santos, y muy especialmente Gabriel Álvarez y José Luis

Cereceda; por dedicar su tiempo y contribuir con sus observaciones y críticas a mejorar (o simplemente a hacer inteligibles) nuestros trabajos. También mi gratitud a los evaluadores (los "referees") de las publicaciones a las que sometimos nuestros resultados, que en la mayoría de las ocasiones ayudaron a clarificar las ideas y a mejorar su presentación.

Por fructuosos intercambios epistolares, mi agradecimiento a Rob Clifton (London, Ontario), Jeffrey Bub (Maryland), Jeremy Butterfield (Cambridge), Miguel Ferrero (Oviedo), Richard Gill (Utrecht), Lucien Hardy (Durham), Guruprasad Kar (Calcutta), Michael Kernaghan (Courtenay, British Columbia), Constantine Pagonis (Cambridge), Helle Pasquinucci (antes Helle Bechmann Johansen, Copenhague), Asher Peres (Haifa), Michael Redhead (Cambridge), Emilio Santos (Santander), Euan Squires (Durham) y Karl Svozil (Viena).

Gracias también a los que colaboraron directamente en algunas de los resultados originales que aparecen aquí; empezando por Emilio Santos, que construyó el modelo de variables ocultas incluido en el capítulo 5. Su razonada e irrenunciable heterodoxia ante la mecánica cuántica invita a meditar más profundamente y nos previene "contra la complacencia prevaleciente" de la que hablaba John Bell. También mi agradecimiento a José Manuel Estebaranz, que se prestó desinteresadamente a colaborar en un proyecto para obtener demostraciones "económicas" del teorema de Bell-Kochen-Specker y que fue el primero en darse cuenta que existían demostraciones con menos de 20 vectores en dimensión 4. A Rob Clifton, por la idea que dio lugar a una nueva variante de demostración del teorema de Bell-Kochen-Specker, y a Asher Peres, por sus consejos científicos y por permitirme incluir en este trabajo extractos de nuestra correspondencia.

Muchas otras personas han puesto su granito de arena respondiendo en algún momento a mis preguntas y aclarándome ideas; entre ellas, Lorenzo Abellanas, José Manuel Guerra y muchos de los citados en el apartado epistolar.

Gracias a Isabel Gonzalo y Víctor Pérez por animarme a escribir mi primer artículo y a Susana Fernández Huelga, por facilitarme los medios para escribir el segundo. Por la inyección de ánimo que supuso, mi gratitud a John Hosack (Universidad del Pacífico Sur en Suva, Islas Fidji), del que recibí la primera petición de un "reprint" de una de mis publicaciones; a Lucien Hardy, Michael Kernaghan y Asher Peres por sus alabanzas; a Jeffrey Bub, por citarnos en su próximo libro (y a Asher Peres por incluirnos en la próxima reedición del suyo).

También mi gratitud a Susana Urra, su revisión del inglés de todas nuestras publicaciones merece mucho más que un par de líneas de agradecimiento. Gracias a

Juanjo Moreno, que hizo los dibujos de uno de nuestros artículos, a Luc Gilles que me echó una mano con los ordenadores, y a Gonzalo García de Polavieja (Oxford), Carlos González Saavedra (Barcelona) y Mari Paz Zorzano (Hamburgo) por dedicar su tiempo a buscarme referencias.

A Alberto Galindo, como director del Departamento de Física Teórica I, por haber puesto a mi disposición los medios para la realización de este trabajo. A Chon y a Ángela, las secretarias de los departamentos de Física Teórica I y II, por la paciencia que han tenido conmigo.

Por facilitar, con ayuda económica, mi asistencia a congresos, a los organizadores (Antonio Fernández Rañada, Miguel Ferrero, José Luis Sánchez Gómez y Emilio Santos) del primer [y del segundo] *International Symposium on Fundamental Problems in Quantum Physics* (Oviedo, 29 de agosto-3 de septiembre de 1993 [21-26 de julio de 1996]); a los organizadores de la *International Conference on Mesoscopic Physics and Fundamental Problems in Quantum Mechanics* (Roma, 14-17 de febrero de 1994), en especial a Elisabetta Di Silvestro, secretaria de la conferencia; también a Isabel Gonzalo, por sus gestiones ante los organizadores hasta conseguir que me concediesen una beca; a las Madres Concepcionistas por haberme acogido y alojado en Roma; a los organizadores del curso *Fundamentos de la Física Cuántica* (San Lorenzo de El Escorial, 17-21 de Julio de 1995) por la beca para asistir al mismo, y a Ramón Álvarez Estrada por pagar mi matrícula en este curso con cargo a su proyecto de investigación.

También mi agradecimiento a Mari Paz Belinchón, por haber compartido conmigo ocho años y muchas cosas.

Para terminar, gracias a Beatriz Fernández Ortega, por devolverme la ilusión y estar ahí.

Majadahonda, Mayo de 1996.

Índice[†]

Capítulo 1. Introducción

1. 1. Introducción a las demostraciones algebraicas 3
1. 2. Estructura, objetivos y metodología de este trabajo 8

Capítulo 2. El teorema de Bell-Kochen-Specker

2. 1. Introducción 13
2. 2. Precedentes
2. 2. 1. La prueba de imposibilidad de von Neumann
a. Introducción 15
b. La formulación de von Neumann 15
c. Ejemplos 18
d. Crítica de Bell 19
2. 2. 2. El teorema de Gleason 21
2. 3. El teorema de BKS
2. 3. 1. Introducción histórica 25
2. 3. 2. Enunciado del teorema 27
2. 3. 3. Crítica de Bell 29
2. 3. 4. La demostración de Kochen y Specker
a. Características 31
b. Diagramas de KS 36
c. Los tres pasos 36
* d. Otros DPSs 43
2. 3. 5. Demostraciones continuas 46
* 2. 3. 6. Un test experimental del teorema de BKS 47
2. 4. Otras demostraciones aditivas
2. 4. 1. Demostraciones aditivas en dimensión 3
a. Introducción 52
b. P-33: el "poliedro cuántico" 52
* c. De la "cuna del gato" al "poliedro cuántico": P-33 a partir de KS-8 ... 54
d. CK-37, CK-33 y CK-31 61
2. 4. 2. Demostraciones aditivas en dimensión 4
a. Introducción 65
b. Q-40: el "dodecaedro mágico" 66

[†] Se indican con un asterisco (*) las contribuciones originales del autor.

c. Z-28 73
* d. Otros subconjuntos de Q-40 de 28 elementos 73
* e. P-24: el "teseracto cuántico" 74
f. K-20 80
* g. CEG-18 80
* h. La simplificación sugerida por Clifton 83
2. 4. 3. Demostraciones aditivas en dimensión $n \geq 3$
a. Introducción 86
b. El teorema de Zimba y Penrose sobre construcción de TNCSs 87
* c. Construcción en tres pasos de TNCSs en dimensión arbitraria 89
* d. Otros DPSs, PNCSs y TNCSs en dimensión $n \geq 3$ 94
* e. Método recursivo para construir TNCSs en dimensión arbitraria 98
* f. Algunos TNCSs críticos récord en dimensiones 4 a 8 101
* g. Búsqueda de la demostración mínima 102
* h. Interpretación física de las demostraciones 105
2. 5. Demostraciones multiplicativas
2. 5. 1. Demostraciones aditivas vs. multiplicativas 107
2. 5. 2. La tabla de Peres-Mermin 108
2. 5. 3. La estrella de Mermin 110
2. 5. 4. Generalización a n partículas de espín 1/2 112
2. 6. Relación entre las demostraciones aditivas y las multiplicativas
2. 6. 1. P-24 a partir de la tabla de Peres-Mermin 114
2. 6. 2. KP-36 a partir de la estrella de Mermin 115
* 2. 6. 3. Clasificación de las demostraciones de BKS 118

Capítulo 3. El teorema de Bell-EPR

3. 1. Introducción 123
3. 2. El argumento de EPR
3. 2. 1. Introducción 124
3. 2. 2. Hipótesis de validez de la MC 125
3. 2. 3. Condición necesaria de completitud 126
3. 2. 4. Condición suficiente de elementos de realidad 126
3. 2. 5. Separabilidad y localidad 128
3. 2. 6. Elementos de realidad en sentido fuerte y débil 129
3. 2. 7. La laguna más significativa 131
3. 2. 8. Ejemplos: EPR y Bohm 135
3. 2. 9. La conclusión de EPR 137

3. 3. El teorema de Bell-EPR
3. 3. 1. Enunciado del teorema 139
3. 3. 2. Las desigualdades originales de Bell 140
3. 3. 3. Las desigualdades de CHSH 143
3. 3. 4. Las desigualdades de CH 146
3. 3. 5. La demostración estadística de Mermin 149
3. 4. Demostraciones algebraicas
3. 4. 1. Introducción 152
3. 4. 2. La versión de Mermin de la demostración de GHZ 152
3. 4. 3. La demostración de Peres con ERs recursivos 154
3. 4. 4. La demostración de Hardy
a. Introducción 156
b. La demostración 157
c. Máxima violación 160
d. La descomposición de Schmidt 162
e. Generalizaciones del argumento de Hardy 166
3. 5. Elementos de realidad fuertes
3. 5. 1. Introducción 167
* 3. 5. 2. ERs inferidos de mediciones conjuntas 168
* 3. 5. 3. El argumento de EPR con SERs conjuntos 170
* 3. 5. 4. El teorema de Bell-EPR con SERs conjuntos 174
3. 5. 5. Sumario 175

Capítulo 4. Relaciones entre el teorema de Bell-KS y el teorema de Bell-EPR

4. 1. Introducción 179
4. 2. El teorema de BKS con localidad
4. 2. 1. Motivaciones para un teorema de BKS con localidad 181
4. 2. 2. El teorema de BKS con localidad 183
4. 2. 3. Versión probabilística del teorema de BKS con localidad 187
4. 3. Relaciones entre las demostraciones de BKS y las de Bell-EPR
4. 3. 1. Introducción 188
4. 3. 2. Interpretación física de CEG-18 189
* 4. 3. 3. Relación entre CEG-18 y la demostración de Peres 192
* 4. 3. 4. Una demostración con 5 proposiciones y el singlete 194
* 4. 3. 5. Relación entre CEG-18 y la demostración de Hardy 197
4. 3. 6. Relación entre KP-36 y la demostración de GHZ 202
* 4. 3. 7. Condición suficiente para pasar de BKS a Bell-EPR 203

Capítulo 5. Experimentos sobre el teorema de Bell-EPR sin desigualdades

5. 1. Introducción 207
5. 2. Experimentos ideales de tipo GHZ
5. 2. 1. Cuatro partículas de espín 1/2 (GHZ, 1989) 210
5. 2. 2. Interferometría de tres partículas (GHSZ, 1990) 215
5. 2. 3. Interferometría con fuentes independientes (Yurke-Stoler, 1992) 218
5. 2. 4. Tres átomos en interacción con cavidades (Cirac-Zoller, 1994) 221
5. 3. Experimentos ideales de tipo Hardy
5. 3. 1. Electrón-positrón en interferómetros solapados (Hardy, 1992) 223
5. 3. 2. Interferómetros ópticos solapados (Hardy, 1992) 227
5. 3. 3. Fermiones en interferómetros solapados (Yurke-Stoler, 1993) 230
5. 3. 4. Una fuente de un solo fotón (Hardy, 1994) 233
5. 3. 5. Dos átomos en interacción con cavidades (Freyberger, 1995) 237
5. 4. Experimentos reales
5. 4. 1. El experimento de TBMM (1995) 239
* 5. 4. 2. Crítica a TBMM 243
5. 5. Demostraciones algebraicas y desigualdades
5. 5. 1. Introducción 245
5. 5. 2. Desigualdades y la demostración de GHZ 245
5. 5. 3. Desigualdades y la demostración de Hardy 249

Capitulo 6. Conclusiones 255

Bibliografía 261

Índice de acrónimos 299

Índice analítico 301

Postscriptum 311

Capítulo 1. Introducción

"Si hubiera tenido más tiempo, te habría escrito una carta más corta."

Pascal.

"But how should it be possible, given three boxes, neither to mark two as empty nor two as full? The daughter would have remained single until her father's death had she not followed the advice of a prophet's son and quickly opened two boxes, one of which was marked full and the other empty. Following the weak protest of her father that he had wanted two *other* boxes opened, she tried to open the third. But this proved impossible whereupon the father grudgingly admitted that the prediction was correct."

[Specker 60], p. 137.

"Unperformed experiments have no results."

[Peres 78], p. 745.

Capítulo 1
Introducción

1. 1. Introducción a las demostraciones algebraicas

La mecánica cuántica (MC) es el marco conceptual en el que se formulan las teorías físicas más satisfactorias conocidas hasta el momento. La MC surgió para dar respuesta a una serie de fenómenos incomprensibles usando la mecánica y el electromagnetismo clásicos; sus principios quedaron establecidos hacia 1927[1], y desde entonces, en ese marco han tenido cabida nuevos tipos de fenómenos, partículas e interacciones, extendiéndose desde el mundo subnuclear a la cosmología. La MC, complementada con toda una serie de técnicas de cálculo, ha permitido hacer predicciones sobre experimentos en muchos contextos físicos; y éstos experimentos, en los que se ha puesto a prueba la tecnología más moderna, han verificado con éxito todas y cada una de las predicciones cuánticas[2].

---

[1] A pesar a su éxito práctico, existen diversas "interpretaciones" de la MC (como la de los muchos universos, la interpretación modal, la de historias consistentes, o la de variables ocultas de Bohm); sin embargo, hay un consenso mayoritario entorno a lo que a veces se llama la interpretación "moderna" de la MC; ver por ejemplo [Gell-Mann 94]. Esta interpretación es un desarrollo de la interpretación ortodoxa de la escuela de Copenhague (ver [Jammer 66]), pero es más explícita que aquella en algunos aspectos; por ejemplo, según la interpretación moderna, el problema de la frontera entre la física clásica y la física cuántica es un pseudoproblema; en realidad no existe ninguna frontera, la física entera es cuántica; en particular, los mecanismos de "reducción", "colapso" o "decoherencia" del estado cuántico *son mecanismos físicos*, los observadores externos (conscientes o no) no juegan ningún papel especial.

[2] Sobre el desarrollo de la MC hasta 1927, véase [Jammer 66]; sobre los desarrollos posteriores (física nuclear, teorías cuánticas de campos, partículas subatómicas) hasta 1983, véase [Pais 86].

Sin embargo, suele decirse que nadie comprende realmente la MC[3]. En particular, la MC es extraña porque aunque somete a los sistemas físicos a reglas estrictas y consistentes, no proporciona a cambio una descripción en términos clásicos; y no sólo *no proporciona tal descripción, sino que la impide explícitamente y de un modo* fundamental. Por ejemplo, como se subraya en [Styer 96], uno de los malentendidos más habituales en MC es que "la medición perturba el sistema" ("measurement disturbs the system"), según Styer, p. 32: "this misconception holds that each particle really does have definite values for both position and momentum, but these definite values cannot be determined because measurement of, say, a particle's position alters the value of its momentum. (...) This is a particularly common misconception because some arguments due to Heisenberg ("the gamma ray microscope") and Bohr[4] can be interpreted to support it."[5]

De hecho, la MC es sobre todo extraña porque en ella no hay lugar para que todas las propiedades de los sistemas físicos tengan valores bien definidos antes de su medición, ni para que el resultado de cualquier medida pueda predecirse con certeza, ni siquiera en el mejor de los casos (estados puros, máximamente determinados). La MC es no-determinista en ese sentido[6]. Como dice Peres, *en MC los experimentos no realizados no tienen resultados*[7], donde "no tienen resultados" no sólo quiere decir que no se pueden "conocer" los resultados de todos los experimentos posibles sobre un

---

[3] [Feynman 65], p. 111 en la versión en castellano; ver también la cita de Gell-Mann en el prólogo del volumen 2 de [Galindo-Pascual 78].

[4] El microscopio de Heisenberg se describe en [Bohr 28] (p. 21 de la versión en castellano), [Heisenberg 30] (Sec. 2. 2; p. 21 en la versión en inglés), [Von Neumann 32] (Sec. III. 4; p. 170 de la versión en castellano). Una versión crítica puede verse en [Dicke 81].

[5] Entre los resultados que justifican que efectivamente sea un malentendido, [Styer 96] cita los teoremas de imposibilidad de variables ocultas y los experimentos sobre "borrado cuántico". Una breve bibliografía sobre "borrado cuántico" es la siguiente: [Scully-Englert-Schwinger 89], [Scully-Englert-Walther 91], [Jordan 93], [Kwiat-Steinberger-Chiao 94], [Cereceda 96 a] (artículo de revisión), [Herzog-Kwiat-Weinfurter-Zeilinger 95].

[6] [Born 26 a] (el artículo en el que se propuso la interpretación probabilística de la función de onda), p. 54 de la versión en inglés: "Here the whole problem of determinism comes up. From the standpoint of our quantum mechanics there is no quantity which in any individual case causally fixes the consequence of the collision; but also experimentally we have so far no reason to believe that there are some inner properties of the atom which condition a definite outcome for the collision. Ought we hope later to discover such properties (like phases or the internal atomic motions) and determine them in individual cases? Or ought we to believe that the agreement of theory and experiment—as to the impossibility of prescribing conditions for a causal evolution—is a pre-established harmony founded on the nonexistence of such conditions?"

[7] "Unperformed experiments have no results", [Peres 78].

mismo sistema individual porque la realización de un experimento *A* en lugar de un experimento *B* perturba inevitablemente los resultados que hubiese arrojado *B* de haberse realizado en lugar de *A*; "no tienen resultados" quiere decir que, en MC, tales resultados "no existen", "no están determinados" antes del experimento. Rescatar este perdido determinismo es la justificación principal detrás de lo que se llaman teorías de variables ocultas[8] (VO). Diremos, siguiendo a [Mermin 93 b], p. 803, que las teorías de VO son "Efforts to construct such deeper levels of description, in which properties of individual systems do have preexisting values revealed by the act of measurement"; una analogía a la que se recurre frecuentemente en la literatura como ejemplo de una teoría de VO es la de la mecánica clásica como teoría de VO subyacente a la mecánica estadística clásica (ver, por ejemplo, [Einstein 49], p. 672).

Por contra, una prueba o teorema de imposibilidad de variables ocultas en MC (en inglés, "impossibility proof", "no-hidden-variables theorem" o "no-go theorem") pone en evidencia que, módulo ciertas hipótesis más o menos razonables sobre esos supuestos "resultados", éstos no pueden preexistir respetando la compatibilidad con la MC.

Las demostraciones de imposibilidad de VO se basan en hipótesis de carácter muy general sobre las teorías de VO; en ausencia de ejemplos concretos de teorías de VO, siempre podría pensarse que las hipótesis consideradas no son las adecuadas y que, como se dice en [Bell 82], "What is proved by impossibility proofs is lack of imagination"[9]; pero a medida que se van descartando más teorías de VO basadas en hipótesis razonables, el rango de VO compatibles con la MC se estrecha[10].

Esta tesis trata de los teoremas de imposibilidad de VO y sus demostraciones, en particular trata sobre un tipo de demostraciones, las llamadas demostraciones "algebraicas". Bajo este nombre, u otros sinónimos (demostraciones "todo o nada",

---

[8] La idea de variables ocultas en MC aparece ya en [Born 26 a], ver la nota 6, y más explícitamente en [Born 26 b], donde se dice que: "cualquiera que no esté satisfecho con estas ideas [la interpretación probabilística de la función de onda] puede sentirse libre para suponer que existen parámetros adicionales, todavía no introducidos en la teoría, que determinan el suceso individual"; traducción de José Manuel Sánchez Ron en la edición en castellano de 1991 de [Von Neumann 32], p. XXXIX.

[9] Sobre esta frase Mermin, [Mermin 93 b], p. 814, dice: "[Bell] is unreasonably dismissive of the importance of his own impossibility proofs. One could make a complementary criticism of much of contemporary theoretical physics: What is proved by possibility proofs is an excess of imagination. Either criticism undervalues the importance of defining limits to what speculative theories can or cannot be expected to accomplish."

[10] Conviene no olvidar que existe una teoría de VO compatible con la MC y con todos los resultados experimentales: la de Bohm [Bohm 52], [Bohm-Hiley 93], [Holland 93].

demostraciones "sin desigualdades", demostraciones "de tipo Kochen-Specker"[11]), se reúnen demostraciones de imposibilidad de VO con las siguientes características:

(a) La contradicción entre MC y VO se alcanza *razonando sobre sistemas individuales*[12] (y no sobre colectividades estadísticas, como ocurre con las desigualdades de Bell). El término "algebraico" se emplea entonces en oposición a "estadístico".

(b) Se refieren a sistemas físicos describibles por *espacios de Hilbert de dimensión finita* (y generalmente pequeña: 3, 4, 8, 9) e involucran por tanto observables físicos representados por *operadores de espectro discreto.*

(c) La evolución temporal de los estados físicos no juega un papel relevante en las demostraciones.

(d) Se construyen sobre experimentos imaginarios[13].

Los puntos (b), (c) y (d) no son exclusivos de las demostraciones algebraicas de imposibilidad. Salvo en mención en sentido contrario, sólo nos ocuparemos de demostraciones de imposibilidad de VO *deterministas*, es decir aquellas en los que los

---

[11] Por ejemplo en [Heywood-Redhead 83] se habla indistintamente de "contradicciones algebraicas" y de "contradicciones de tipo Kochen-Specker"; en [Clifton-Redhead-Butterfield 90 a] se habla de "demostraciones algebraicas" del teorema de Bell-EPR en referencia a las demostraciones de Heywood-Redhead, Stairs y Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ), frente a las "demostraciones estadísticas" (con desigualdades) de Bell; GHZ [GHSZ 90] hablan de demostraciones "sin desigualdades"; en [Mermin 90 c] se utiliza la expresión "all versus nothing" para referirse a la demostración de GHZ; este nombre subraya la característica más distintiva de las demostraciones algebraicas: la contradicción se alcanza sobre sistemas individuales. En [Elby-Jones 92] se usa el término "demostraciones algebraicas" en referencia a las de Heywood-Redhead, Stairs, GHZ y Peres. En [Dickson-Clifton 94] se habla de "contradicción algebraica" en oposición a "violación de una desigualdad estadística".

[12] Usando, eso sí, predicciones que hemos debido comprobar antes sobre colectividades preparadas de la misma forma que el sistema individual en el que obtenemos la contradicción.

[13] Los experimentos imaginarios o mentales tienen la función de ejemplificar lo esencial y fundamental de una situación física eludiendo a propósito aspectos marginales para la comprensión de los fenómenos y han desempeñado, desde Galileo, un papel básico en física. A Galileo se le acusó más de una vez de tratar solamente con situaciones idealizadas que no podían materializarse en el mundo real pero ése fue uno de los grandes secretos de la física de Galileo y una de las razones de su éxito. Von Neumann decía que "El carácter fantástico de nuestros *experimentos ideales*, es decir, su calidad de irrealizables prácticamente, no afecta en nada a su poder de demostración" [Von Neumann 32], p. 256 de la versión en castellano. Sobre los objetivos y características deseables de un experimento imaginario véase [Kuhn 77], sobre todo las pp. 288-289 de la edición en castellano.

resultados de todos los experimentos sobre un sistema físico individual están determinados por las VO. Existen en la literatura extensiones de algunos de los teoremas aquí tratados que cubren ciertos tipos de VO estocásticas[14].

Ejemplos de demostraciones algebraicas son:

(a) Las demostraciones del teorema de Bell-Kochen-Specker (finales de los años 60) y su extensión a sistemas compuestos (principios de los 80).

(b) Las demostraciones "sin desigualdades" del teorema de Bell-EPR propuestas (en los años 90) por Greenberger, Horne, Zeilinger, Mermin, Peres y Hardy, entre otros. Es opinión generalizada que estas demostraciones han supuesto un hito en los desarrollos recientes sobre VO en MC.

Esta memoria se dedica esencialmente a analizar ambos teoremas y sus relaciones; este análisis ha resultado fructífero para mejorar las demostraciones existentes y para obtener nuevos resultados.

El interés de los temas aquí tratados parece indudable[15]; las contribuciones originales presentadas en esta memoria creemos que han justificado la elección de estos tópicos como objeto de investigación.

---

[14] Una generalización de la demostración de GHZ a teorías de variables ocultas factorizables estocásticas puede encontrarse en [Clifton-Redhead-Butterfield 90 a, b]; una generalización del teorema de Bell-Kochen-Specker con localidad a teorías de variables ocultas factorizables estocásticas puede encontrarse en [Elby 90 a]; una extensión del teorema de Bell-Kochen-Specker a teorías de variables ocultas no-contextuales estocásticas puede encontrarse en [Roy-Singh 93].

[15] Previsiblemente, por su potencia y sencillez, algunas de las recientes demostraciones algebraicas tardarán menos en incorporarse a los textos de MC de licenciatura de lo que en su día tardaron las desigualdades de Bell; algunos textos de MC en incorporar una explicación, más o menos extensa, de las desigualdades de Bell (1964) son [Galindo-Pascual 78] (Vol. 1, pp. 462-465 en la segunda edición), [Sakurai 85] (pp. 223-232 en la edición revisada de 1994), [Ballentine 90] (pp. 437-456); ejemplos de libros, más o menos especializados, que ya incluyen algunas de las demostraciones algebraicas recientes son [Bohm-Hiley 93], [Peres 93], [Stapp 93 b], [Maudlin 94], [Squires 94 b] (2ª edición).

1. 2. Estructura, objetivos y metodología de este trabajo

En esta sección se resumen los problemas abordados en esta memoria y la metodología seguida en cada caso para su resolución.

Creemos que las demostraciones algebraicas de imposibilidad de VO, en particular aquellas que involucran un número *finito* y *reducido* de observables físicos son interesantes por las siguientes razones:

(a) Porque son las más fundamentales (en el sentido de que se refieren a sistemas individuales), las más sencillas (involucran un número reducido de observables en espacios de baja dimensión), y las más fáciles de demostrar (una vez descubiertas; su hallazgo, en cambio, no siempre es fácil, como evidencia su tardía aparición). Estas características son, en física, sinónimo de belleza.

(b) Porque basta analizar un número reducido de experimentos para obtener contradicciones "cruciales" que den lugar a tests más decisivos (en principio).

Los objetivos pretendidos y métodos seguidos en cada capítulo son:

Capítulo 2: El teorema de Bell-Kochen-Specker. Los objetivos de este capítulo son: (a) Clasificar las distintas demostraciones del teorema de Bell-Kochen-Specker (BKS) de imposibilidad de variables ocultas no-contextuales y clarificar las relaciones entre ellas. (b) Construir demostraciones económicas con las características de la demostración original de Kochen y Specker (KS). (c) Desarrollar métodos para extender demostraciones con estas características a espacios de Hilbert de dimensión finita arbitraria (mayor que tres), demostrando que la contradicción entre MC y VO no está restringida a algunas dimensiones concretas, sino que se extiende a cualquier dimensión (finita). Para ello se estudian diversas estrategias seguidas en la literatura para resolver el problema geométrico que está detrás de este tipo de demostraciones; en particular se hace un análisis detallado de la demostración original de KS y se distinguen tres pasos, asociando a cada uno de ellos un tipo particular de conjunto (DPS, PNCS y TNCS).

Capítulo 3: El teorema de Bell-EPR. Los objetivos de este capítulo son: (a) Conseguir una formulación del argumento de "incompletitud" de la MC propuesto por Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) de manera que sea posible eludir la crítica más frecuente. (b) Conseguir asimismo una formulación del teorema de Bell-EPR de imposibilidad de variables ocultas locales (que subraya la inviabilidad del programa sugerido por EPR) en los mismos términos. Para ello: (1) Se reexamina en detalle el argumento EPR; (2) se introducen las demostraciones algebraicas del teorema de Bell-

EPR; (3) se definen los "elementos de realidad fuertes" (aquellos que se pueden inferir con certeza a partir de mediciones efectivamente realizadas en regiones separadas por un intervalo de género-espacio).

Capítulo 4: Relaciones entre los teoremas de Bell-KS y Bell-EPR. En los capítulos anteriores se ha tratado antes el teorema de BKS que el de Bell-EPR[16] porque, en cierto sentido, el segundo es un caso particular del primero (con hipótesis físicas adicionales). El objetivo del capítulo 4 es aclarar la relación entre ambos. Para ello se comparan sus respectivas demostraciones algebraicas, y se derivan demostraciones algebraicas del teorema de Bell-EPR a partir de algunas de las demostraciones sencillas del teorema de BKS obtenidas en el capítulo 2.

Capítulo 5: Experimentos sobre el teorema de Bell-EPR sin desigualdades. Los objetivos de este capítulo son: (a) Ver diferentes contextos en los que se pueden implementar (idealmente) las demostraciones algebraicas, (b) Evaluar la posibilidad de convertir estos experimentos ideales en comprobaciones experimentales efectivas de la imposibilidad de variables ocultas. Para ello se describen varios experimentos ideales de argumentos algebraicos y se discute el único experimento de este tipo realizado hasta la fecha.

En el capítulo 6 se exponen las conclusiones de la memoria.

[16] En [Redhead 87] y [Peres 93] se hace lo contrario: se estudia primero el teorema de Bell-EPR y luego el de BKS.

Capítulo 2. El teorema de Bell-Kochen-Specker

"So unless one has a special interest in proving no-hidden-variables theorems in three dimensions one can safely declare the old Bell or Kochen-Specker versions of the theorem obsolete."

[Mermin 93 b], p. 808.

"Kochen-Specker problems can be addictive and I AM an addict!"

Rob Clifton, e-mail del 20 de febrero de 1996.

"¡Feliz año y *que encuentres cada vez menos direcciones*!"

Gabriel Álvarez, 9 de enero de 1996.

"En ciencia, comprender es clasificar, reducir, comprimir. La compresión es comprensión."

Jorge Wagensberg, *El País*, 26 de junio de 1996.

Capítulo 2
El teorema de Bell-Kochen-Specker

2. 1. Introducción

Éste es el capítulo más largo de la tesis. En él se estudia el teorema de Bell-Kochen-Specker (BKS) sobre imposibilidad de variables ocultas no-contextuales, haciendo énfasis en un tipo particular de demostraciones: aquellas con las características de la demostración original de Kochen y Specker (KS).

Los objetivos de este capítulo son: (1) clasificar las distintas pruebas del teorema de BKS, (2) construir una demostración compacta con las características de la de KS, (3) desarrollar métodos para extender las demostraciones tipo KS a espacios de Hilbert de dimensión $n > 3$, y (4) sentar las bases para la discusión en el capítulo 4 sobre la relación entre las demostraciones tipo KS del teorema de BKS y las demostraciones algebraicas (llamadas también "sin desigualdades") del teorema de Bell-EPR sobre imposibilidad de variables ocultas locales.

La estructura del capítulo es la siguiente. Empezaremos examinando dos precedentes del teorema de BKS: en la Sec. 2. 2. 1 examinaremos lo que von Neumann consideraba que era una demostración general de imposibilidad de variables ocultas en MC; y en la Sec. 2. 2. 2 veremos el teorema de Gleason y en particular un lema previo que está en la base de todas las demostraciones del teorema de BKS.

En la Sec. 2. 3 se examinan fundamentalmente aspectos clásicos del teorema de BKS: 2. 3. 1 trata de cuestiones históricas sobre la paternidad del teorema; en 2. 3. 2 se enuncia el teorema; en 2. 3. 3 se resume la crítica de Bell a la plausibilidad de las

hipótesis. Nuestra contribución en este tema arranca del examen detallado, en la Sec. 2. 3. 4, de la demostración original de KS. Esta demostración utiliza solamente argumentos geométricos elementales, pero a cambio, es un tanto intrincada. En (a) se enumeran las características de la demostración, en (b) se introducen unos diagramas auxiliares, y en (c) se presenta, en tres pasos, la demostración original de KS, y se introducen tres tipos de conjuntos de proposiciones, cada uno de ellos asociado a un paso de la demostración; en (d) se exhiben otros conjuntos similares a los que aparecen en el primer paso. Este esquema de pasos y conjuntos asociados, nos permitirá clasificar los diferentes tipos de demostraciones del teorema y nos ayudará a construir demostraciones más económicas y demostraciones en espacios de Hilbert de dimensión superior. En la Sec. 2. 3. 5 se introducen las demostraciones continuas; en la Sec. 2. 3. 6 se presentan las demostraciones probabilísticas, y se estudia bajo qué condiciones estas últimas se podrían traducir en tests experimentales (ideales) de algunas de las hipótesis del teorema.

El resto del capítulo se dedica a estudiar propuestas recientes para construir demostraciones finitas del teorema de BKS. 2. 4 trata de las demostraciones que llamaremos aditivas; en 2. 4. 1 se estudian dos de ellas (en espacios de Hilbert de dimensión 3) y su relación con la demostración original de KS. En la Sec. 2. 4. 2 se presentan dos estrategias geométricas para construir demostraciones sencillas en espacios de dimensión 4. Como veremos más adelante, los espacios de dimensión 4 son los espacios de dimensión más baja que permiten desarrollar argumentos de imposibilidad de variables ocultas *locales*, lo cual justifica nuestro interés en simplificar las demostraciones en estos espacios. En la sección 2. 4. 3 se presentan varias formas de construir demostraciones en espacios de dimensión arbitraria (mayor que tres). La mayor parte de nuestras contribuciones pertenecen a estos dos últimos apartados.

En 2. 5 se presentan las demostraciones multiplicativas. Estas demostraciones del teorema de BKS surgieron originalmente al generalizar en un cierto sentido las que, en el capítulo 3, llamaremos demostraciones algebraicas del teorema de Bell-EPR; en el capítulo 4 estudiaremos la relación inversa: cómo pasar de una demostración de BKS a otra de Bell-EPR. En 2. 6 se estudia la relación entre las demostraciones aditivas y las multiplicativas. El capítulo concluye con una clasificación, de acuerdo con los criterios desarrollados, de gran parte de las demostraciones publicadas.

2. 2. Precedentes

2. 2. 1. La prueba de imposibilidad de von Neumann

a. Introducción

En su libro *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica* [Von Neumann 32] John von Neumann (VN) incluía[1] una demostración matemática de que en MC no pueden existir colectividades estadísticas "libres de dispersión" para todos los observables físicos. Esta prueba de imposibilidad de "variables ocultas" ha ejercido un papel determinante en desarrollos posteriores: no sólo —como se hace notar con frecuencia— porque zanjó en falso la cuestión y con ello cerró el paso al desarrollo de teorías de variables ocultas[2], sino —y es por eso que nos interesa aquí— porque sentó un precedente sobre cómo debería ser una demostración teórica de imposibilidad de variables ocultas en MC.

En las siguientes secciones veremos (b) una formulación en el espíritu de VN de la prueba de imposibilidad, (c) dos ejemplos sencillos que "demuestran" el teorema de VN por reducción al absurdo, y (d) la crítica de Bell a la plausibilidad física de las hipótesis del teorema de VN.

b. La formulación de von Neumann

La intención de VN era ver[3] si la MC es una teoría "propiamente estadística" o si, por el contrario, hay una teoría más "completa" —que describe el mismo sistema con variables (o "parámetros ocultos") más numerosas— que la MC, a partir de la cual se obtiene la MC promediando con respecto a las variables ocultas. Pone VN como ejemplo de teoría no-esencialmente estadística la termodinámica, que se deriva de una teoría más "completa" como es la mecánica clásica. Advierte VN que la MC es el primer ejemplo conocido de una teoría "propiamente estadística" —lo cual, dice, "a numerosos físicos les repugna"—, y ello justifica el interés que tiene una demostración de que efectivamente lo es.

---

[1] Secs. IV. 1-2, pp. 213-232 en la versión en castellano.

[2] Ello no impidió que Einstein, Podolsky, y Rosen expusiesen su argumento de incompletitud de la MC [Einstein-Podolsky-Rosen 35], ni que Bohm construyese explícitamente una teoría de variables ocultas compatible con la MC [Bohm 52], por citar dos ejemplos.

[3] En esta sección, las partes entrecomilladas corresponden a extractos de la versión en castellano de José Manuel Sánchez Ron del texto en francés de la intervención de VN en una conferencia celebrada en Varsovia en 1938. Tomado de la reedición de 1991 de [Von Neumann 32], pp. LVII-LIX.

Para VN, "Un sistema físico (...) se caracteriza por el conjunto de todas las cantidades que pueden ser medidas, los "observables" A, B, ..., y las relaciones algebraicas que existen entre ellos"; una colectividad estadística ε de sistemas individuales idénticos "viene caracterizada por los valores medios $\langle A\rangle_\varepsilon$, $\langle B\rangle_\varepsilon$, ... de todos estos observables." Se dice que una colectividad es libre de "dispersión" para el observable A, cuando desaparece la dispersión $(A-\langle A\rangle_\varepsilon)^2$, lo que es equivalente a decir que $\langle A^2\rangle_\varepsilon = \langle A\rangle_\varepsilon^2$. Para VN, "La desaparición de la dispersión significa, sin duda, que la magnitud observable A tiene con certeza su media [su valor medio] como valor, cuando se la mide."

Una colectividad ε se dice "mixta" si existen dos colectividades [distintas], ε_1, ε_2, (...) tales que al mezclarlas con pesos apropiados α, β ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$) se obtiene ε." Es decir:

$$\langle A\rangle_\varepsilon = \alpha\langle A\rangle_{\varepsilon_1} + \beta\langle A\rangle_{\varepsilon_2}. \qquad (2.\ 1)$$

Una colectividad ε se dice que es "pura" si no es "mixta". En una teoría "no-propiamente estadística" toda colectividad no libre de dispersión para todos los observables "debe ser mixta", y recíprocamente:

(*) Toda colectividad "pura" debe ser libre de dispersión para todos los observables.

Según VN, en MC[4]:

(i) [p. 225] Si los observables B y C están representados respectivamente por los operadores $\hat{B}$ y $\hat{C}$, el observable

$$A = \beta B + \gamma C, \qquad (2.\ 2)$$

está representado en MC por el operador

$$\hat{A} = \beta\hat{B} + \gamma\hat{C}. \qquad (2.\ 3)$$

(ii) El valor esperado de un observable A representado por $\hat{A}$ en un estado cuántico ρ representado en MC por el operador estado (o matriz densidad) $\hat{\rho}$ es

[4] Las páginas entre corchetes se refieren a las páginas de la edición en castellano de [Von Neumann 32] en las que se pueden encontrar las correspondientes afirmaciones. La páginas en números romanos sólo se encuentran en la edición de 1991 y corresponden a la conferencia de VN de 1938.

$$\langle A\rangle_\rho = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{A})^5. \qquad (2.\ 4)$$

En particular, para cualesquiera observables A, B, C relacionados por (2. 3), de acuerdo con (i), y usando (2. 4) se obtiene

$$\langle A\rangle_\rho = \beta\langle B\rangle_\rho + \gamma\langle C\rangle_\rho. \qquad (2.\ 5)$$

La relación (2. 5) es cierta incluso si B y C (y por tanto A) son observables (mutuamente) *incompatibles*; en tal caso, (2. 5) sólo tiene significado físico si se refiere a los valores esperados en mediciones de A, B y C sobre, respectivamente, tres subconjuntos *diferentes* de un conjunto de sistemas idénticamente preparados en el estado cuántico ρ.

Además, sobre las colectividades estadísticas, VN supone:

(iii) [p. LIX] Todas las colectividades estadísticas ε se pueden representar por los operadores $\hat{\rho}$. En particular, esta correspondencia entre las colectividades ε y los estados cuánticos ρ está definida por una relación análoga a (2. 4) (cambiando en el miembro de la izquierda ρ por ε). En particular, teniendo en cuenta (iii) y (ii) debe suceder que:

(iv) [p. 223] En cualquier colectividad de sistemas idénticos ε, los valores esperados de cualesquiera observables A, B, C relacionados por (2. 2), han de satisfacer

$$\langle A\rangle_\varepsilon = \beta\langle B\rangle_\varepsilon + \gamma\langle C\rangle_\varepsilon. \qquad (2.\ 6)$$

Teorema de von Neumann: No existen colectividades de sistemas idénticos que sean libres de dispersión para todos los observables. "En consecuencia el principio (*) se viola y la MC es, por consiguiente, una teoría "propiamente" estadística. Esto quiere decir que no es posible ninguna explicación (...) de la MC [en términos de colectividades de sistemas idénticos libres de dispersión para todos los observables], salvo que se sacrifique alguna parte de la teoría en su forma actual."

[5] Existen diversas formulaciones axiomáticas de la MC; una formulación próxima a la de [Von Neumann 32] es la de [Galindo-Pascual 78]; en [Balian 89] se sugieren dos "pedagogical improvements" respecto a formulaciones anteriores: "emphasizing observables rather than states", "density operators should appear conceptually more basic and easier to comprehend than state vectors"; esta sugerencia se sigue en la formulación de [Ballentine 90]. En ambas formulaciones, ya sea como consecuencia de los postulados [Galindo-Pascual 78], o directamente como uno de ellos [Ballentine 90], se verifica (2. 4).

No daremos aquí una demostración general del teorema de VN[6], en su lugar daremos dos ejemplos en los que las hipótesis de VN conducen a contradicción.

c. Ejemplos

En general, en una colectividad ε libre de dispersión para A, el valor medio $\langle A\rangle_\varepsilon$ coincide con el valor de A que tienen todos y cada uno de los sistemas individuales de esa colectividad; denotaremos por $v(A)$ este valor. Supongamos que una colectividad ε fuese libre de dispersión simultáneamente para los observables A, B y C (en general incompatibles) relacionados entre si por la ec. (2. 2); supongamos también que los observables A, B y C tienen sólo dos posibles valores: +1 ó −1. En ese caso, por lo que acabamos de decir, (2. 6) se convierte en

$$v(A) = \beta\, v(B) + \gamma\, v(C), \tag{2. 7}$$

donde cada uno de los valores $v(A)$, $v(B)$ y $v(C)$ vale +1 ó −1, por la hipótesis de ser ε libre de dispersión para A, B y C.

Vamos a ver dos ejemplos en los que (2. 7) conduce a una contradicción:

Ejemplo 1: Supongamos los observables A, B, C (incompatibles) descritos por los operadores

$$\hat{A} = \hat{\sigma}_z, \tag{2. 8 a}$$

$$\hat{B} = (\sqrt{3}\,\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_z)/2, \tag{2. 8 b}$$

$$\hat{C} = -(\sqrt{3}\,\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)/2. \tag{2. 8 c}$$

A, B, C representan sendas componentes de espín de una partícula de espín 1/2 según tres vectores coplanarios que forman ángulos de 120°. Es fácil ver que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 0, \tag{2. 9}$$

---

[6] Ésta puede encontrarse, además de en [Von Neumann 32], en [Von Neumann 31], y también, desarrollada y comentada extensamente, en [Albertson 61], y [Jammer 74] (Sec. 4). Además de las referencias mencionadas y de las que citaremos a lo largo de esta sección, las siguientes referencias tratan del teorema de VN o de algún aspecto particular del mismo: [Ballentine 70], [Capasso-Fortunato-Selleri 70], [Bell 71], [Clauser 71 a, b], [Belinfante 73] (Parte I, Cap. 2) [Gudder 80], [Selleri 90] (Cap. 2). En la reedición en castellano, de 1991, de [Von Neumann 32] hay una extensa introducción histórica de José Manuel Sánchez Ron; concretamente, el teorema de imposibilidad se trata en las pp. XXXIX-L.

que es un caso particular de (2. 3). Estos observables tienen pues las características deseadas: $v(A)$, $v(B)$, $v(C)$) sólo pueden valer +1 ó −1 y satisfacen una relación del tipo (2. 2). Sin embargo,

$$v(A)+v(B)+v(C) \tag{2. 10}$$

nunca puede valer cero como requieren (2. 7) y (2. 9), *q.e.d.*

Este primer ejemplo procede de [Peres 90 b], uno muy similar puede encontrarse en [Bell 66].

Ejemplo 2: Consideremos los siguientes observables:

$$A=S_x^2, \qquad B=S_y^2, \qquad C=S_z^2, \tag{2. 11}$$

es decir, los cuadrados de las componentes del espín de una partícula de espín s, según tres direcciones ortogonales. Para cualquier s se verifica que

$$\hat{S}_x^2+\hat{S}_y^2+\hat{S}_z^2=\hbar^2 s(s+1)\hat{I}\,, \tag{2. 12}$$

donde $\hat{I}$ es la matriz identidad en el espacio de Hilbert correspondiente. La ec. (2. 12) es otro caso particular de (2. 3). Fijémonos sólo en el caso $s=3/2$ (el menor valor de s para el cual esos tres observables S_i^2 son incompatibles); entonces, los posibles resultados de la medida de esos observables son solo dos: $9\hbar^2/4$ ó $\hbar^2/4$, y, por tanto, no es posible que

$$v(S_x^2)+v(S_y^2)+v(S_z^2) \tag{2. 13}$$

sume $15\hbar^2/4$, como exige (2. 12), *q.e.d.*

Este ejemplo procede de [Ballentine 90], p. 131.

d. Crítica de Bell

Bell, [Bell 66], Sec. II, construye un modelo explícito *de variables ocultas* en el que los valores esperados de la medida de una componente de espín de una partícula de espín 1/2 coinciden con los de la MC. En el modelo de Bell no se atribuye ningún significado físico a las variables ocultas que aparecen, su única pretensión es mostrar que hay teorías de variables ocultas que no están excluidas por el teorema de VN. Un modelo similar pueden encontrarse en [KS 67], Sec. 6. La objeción de Bell a la prueba de VN [Bell 66], Sec. III, tiene que ver con lo que para Bell es la "hipótesis esencial"

del teorema: "Any real linear combination of any two Hermitian operators represents an observable, and the same linear combination of expectation values is the expectation value of the combination." Según Bell, el que se verifique (2. 5) para los valores medios cuánticos no implica que deba suceder lo mismo para los valores medios de un estado de variables ocultas *en el caso de observables incompatibles*, es decir no tiene por qué verificarse la relación lineal (2. 6). La razón física es que en una situación real las mediciones de A, B y C no pueden ser llevadas a cabo simultáneamente; cada una de ellas se debe hacer sobre un sistema individual diferente, y además requiere un dispositivo de medida diferente. El que los promedios estadísticos verifiquen (2. 5), es para Bell, "a quite peculiar property of quantum mechanical states (...). There is no reason to demand it individually of the hypothetical dispersion free states." Su conclusión es que, "the formal proof of von Neumann [de imposibilidad de variables ocultas que satisfagan los requisitos de VN] does not justify his informal conclusion [la imposibilidad de variables ocultas de tipo más general]."

Contrariamente a lo que a veces se afirma, la demostración de VN, sí había sido objetada muchas veces antes de [Bell 66] (ver las referencias de la nota 6).

2. 2. 2. El teorema de Gleason

En 1957 Andrew Gleason [Gleason 57] demostró un teorema cuyas consecuencias son fundamentales para la resolución del problema de las variables ocultas. El objetivo del teorema de Gleason era, sin embargo, otro de apariencia distinta: simplificar la base axiomática de la MC, mostrando que las probabilidades de obtener los distintos resultados en la medida de un observable físico siempre se pueden calcular a partir de la matriz densidad $\hat{\rho}$. En el trabajo de Gleason no hay ninguna alusión al problema de las variables ocultas.

El artículo de Gleason comienza[7]: "In his investigations of the mathematical foundations of quantum mechanics, Mackey [Mackey 57] has proposed the following problem: Determine all measures on the closed subspaces of a Hilbert space. A measure on the closed subspaces means a function μ which assigns to every closed subspace a non-negative real number such that if $\{H_i\}$ is a countable collection of mutually orthogonal subspaces having closed linear span H, then

$$\mu(H) = \sum_i \mu(H_i). \tag{2. 14}$$

It is easy to see that such a measure can be obtained by selecting a vector $\mathbf{v}_i$ and, for each closed subspace H_i, taking $\mu(H_i)$ as the square of the norm of the projection of $\mathbf{v}_i$ on H_i. Positive linear combinations of such measures lead to more examples, and, passing to the limit, one finds that, for every positive semi-definite self-adjoint operator $\hat{\rho}$ of the trace class,

$$\mu(H_i) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\,\hat{P}_i), \tag{2. 15}$$

where $\hat{P}_i$ denotes the orthogonal projection on H_i, defines a measure on the closed subspaces. It is the purpose of this paper to show that, in a separable Hilbert space of dimension at least three, whether real or complex, every measure on the closed subspaces is derived in this fashion."

En particular, si consideramos las medidas de probabilidad definidas, no sobre los subespacios H_i, sino sobre los correspondientes proyectores ortogonales $\hat{P}_i$, el teorema se enuncia de la manera siguiente:

Teorema de Gleason: Para espacios de Hilbert separables (reales o complejos) H de dimensión mayor o igual que tres, todas las medidas de probabilidad, μ, sobre el

[7] Por motivos de conveniencia he cambiado la notación respecto al artículo original.

conjunto de los proyectores $\{\hat{P}_i\}$ sobre subespacios cerrados de H (es decir las aplicaciones μ de $\{\hat{P}_i\}$ en el intervalo [0, 1], que verifican $\mu(\hat{0})=0$, $\mu(\hat{I})=1$, y $\mu(\Sigma_i\hat{P}_i)=\Sigma_i\mu(\hat{P}_i)$) son necesariamente de la forma

$$\mu(\hat{P}_i)=\mathrm{tr}(\hat{\rho}\,\hat{P}_i), \tag{2. 16}$$

donde $\hat{\rho}$ es un operador no negativo de clase traza determinado de forma única por la medida (como los operadores densidad que representan estados físicos en MC)[8].

La relevancia del artículo de Gleason para la cuestión de las variables ocultas proviene de un lema implícito previo al teorema principal[9], lema que, siguiendo a Belinfante, enunciaremos de la manera siguiente:

Lema de Gleason: Sea R_3 cualquier subespacio real de dimensión tres de un espacio de Hilbert, esto es, el espacio formado por los vectores

$$\psi=\sum_{i=1}^{3}c_i\psi_i, \tag{2. 17}$$

donde $\{\psi_i\}_{i=1}^{3}$ es una base cualquiera de vectores ortogonales de R_3, y c_i son coeficientes reales. Cualquier medida de probabilidad $\mu(\psi)$ en R_3 debe de ser una función *continua* en los coeficientes c_i que determinan ψ por la ec. (2. 17).

Para ver qué consecuencias tiene este lema para el problema de las variables ocultas hay que dar un par de pasos más[10]: Consideremos un espacio de Hilbert real de dimensión tres que suponemos representa un cierto sistema físico (más adelante veremos ejemplos de ello), de manera que los proyectores sobre subespacios unidimensionales del espacio de Hilbert total representan proposiciones físicas (por ejemplo proposiciones del tipo "el observable A tiene el valor a"). Las proposiciones

---

[8] El enunciado original del teorema de Gleason está en las pp. 892-893 de [Gleason 57].

[9] Lema que no figura como tal en el artículo de Gleason. Belinfante, [Belinfante 73], p. 44, lo reconstruye y lo identifica con las lineas 5 y 4 desde el final de la p. 889 de [Gleason 57]. Bibliografía adicional sobre el teorema de Gleason: [Piron 72], [Belinfante 73] (Sec. 3. 6), una demostración simplificada de Gudder, no publicada, citada en [Jammer 74] (p. 297), [Krips 74, 77], [Eilers-Horst 75] (para espacios de Hilbert no separables), [Piron 76] (Sec. 4. 2), [Hultgrenn-Shimony 77], [Drisch 79] (para espacios de Hilbert no separables y sin la condición de positividad), [Cooke-Keane-Moran 85] (una demostración simplificada), [Redhead 87] (Sec. 1. 5), [Van Fraassen 91] (Sec. 6. 5), [Peres 93 b] (Sec. 7. 2).

[10] El razonamiento que sigue es esencialmente el que se hace en [Redhead 87], pp. 28-29.

sólo admiten dos posibles resultados: 1 (si la proposición es "verdadera") ó 0 (si la proposición es "falsa). Una teoría determinista de variables ocultas debe asignar valores bien definidos 1 ó 0 a esas proposiciones. Ahora bien, tanto en MC como en una teoría de variables ocultas, de cada tres proposiciones mutuamente compatibles, por ejemplo P_1: "A vale a", P_2: "A vale b", P_3: "A vale c" (supuesto que a, b y c son distintos, y son los únicos resultados posibles al medir el observable A") sólo una puede ser cierta, las otras dos han de ser falsas. Las variables ocultas deberían poder asignar a todas las proposiciones del sistema un valor 1 ó 0 satisfaciendo la única restricción de que en cada descomposición de la identidad en términos de tres proyectores mutuamente ortogonales a uno y sólo a uno de ellos se le asigne el valor 1 y a los otros dos el valor 0. Pero este requisito verifica las condiciones que debe cumplir una "medida de probabilidad".

Veamos ahora por qué esa medida de probabilidad es precisamente del tipo de las que son imposibles según el lema de Gleason, es decir por qué es "discontinua". Para ello, identifiquemos el espacio de Hilbert abstracto de dimensión tres con el espacio euclídeo ordinario, y los proyectores con las direcciones representadas por rectas que pasan por el origen de coordenadas. Consideremos una esfera de radio unidad centrada en el origen de manera que cada dirección intersecta con ella en dos puntos antípodas; si la medida de probabilidad antes definida asigna el valor 1 a una dirección, colorearemos de blanco los dos puntos antípodas correspondientes, y si asigna el valor 0 los colorearemos de negro. La restricción aludida entre los valores de los proyectores se traduce en que por cada par de puntos blancos antípodas (por ejemplo los polos norte y sur de la esfera) todos los puntos sobre al correspondiente ecuador han de ser negros. Es sencillo ver que, en el supuesto de que se pudiese colorear toda la esfera de esa manera, esta forma de colorear la esfera sería discontinua en el siguiente sentido: habría puntos blancos tan próximos como se quisiese a puntos negros. Según el lema de Gleason, esa medida de probabilidad no puede implementarse, y por tanto la asignación de variables ocultas para colorear la esfera tampoco. A lo largo del capítulo volveremos con frecuencia sobre este problema de "coloreabilidad".

Nótese, en particular, que el lema de Gleason permite prescindir del postulado de aditividad de los valores esperados para *cualesquiera* proyectores (conmutativos o no) del teorema de von Neumann y sustituirlo por un postulado de aditividad para los valores esperados para proyectores *conmutativos*, eludiendo así la crítica de Bell al teorema de von Neumann[11].

---

[11] Como se señala, por ejemplo, en [Jammer 74], p. 297: "Through Gleason's work it became clear that von Neumann's result concerning the impossibility of hidden variables does not hinge on (...)

Como veremos, Bell también se dio cuenta de esto[12], y buscó una salida que siguiese permitiendo las variables ocultas; volveremos sobre ello en la Sec. 2. 3. 3.

Antes de que se advirtiese la relevancia del lema de Gleason para el problema de las variables ocultas, el mismo resultado ya había sido descubierto por otro camino.

---

the additivity assumption for the expectation values of any operators, even if they do not commute. It now became clear that in Hilbert spaces of at least three dimensions it suffices to postulate such an additivity for commuting operators *alone* in order to exclude the possibility of dispersion-free states."

[12] [Jammer 74], pp. 299-300: "The first to realize the importance of Gleason's result for the problem of hidden variables was probably Josef Maria Jauch (...). Impressed by Gleason's result to which his attention was drawn by a reference in Mackey's *Lecture notes* [Mackey 60], and admitting that von Neumann's assumptions for this hidden variable proof were too stringent and that, in particular, the additivity postulate (...) was difficult to justify, Jauch, in collaboration with Constantin Piron, remodeled the proof to avoid all objections of circular reasoning and to make it independent of the additivity assumption." Ver [Jauch-Piron 63], ver también [Jauch-Piron 68]. El resultado de Jauch y Piron se puede enunciar como el siguiente teorema, [Jauch 68], pp. 117-118: "If a proposition system (...) admits hidden variables, then any pair of propositions (...) is compatible. (...). Thus it suffices to exhibit a single pair of noncompatible propositions to establish that hidden variables are empirically refuted." Críticas a la demostración de Jauch y Piron pueden encontrarse en [Bell 66] y [Bohm-Bub 66 b]. Otra prueba de imposibilidad similar es [Misra 67]. Muy probablemente Bell se percató de la importancia del teorema de Gleason para las variables ocultas al entrar en contacto con Jauch; de hecho, en los agradecimientos de [Bell 66], reconoce su deuda con Jauch, y en [Bell 82] se refiere al lema relevante como "the Gleason-Jauch argument" o "the Gleason-Jauch result".

2. 3. El teorema de Bell-Kochen-Specker

2. 3. 1. Introducción histórica

El teorema de Bell-Kochen-Specker (BKS), al que durante mucho tiempo se llamó simplemente teorema de Kochen-Specker (KS)[13], más que un "corolario" del teorema de Gleason (como a veces se dice[14]), será para nosotros un resultado con entidad propia sobre la imposibilidad de (una familia de) variables ocultas en MC. De hecho, como tal estaba ya contenido esencialmente en un artículo de Ernst Specker [Specker 60] completamente independiente del trabajo de Gleason, y anterior a los trabajos de Bell[15] y Jauch y Piron basados en el lema de Gleason. En concreto, en [Specker 60], a la pregunta[16]: "[p. 139] can the description of a quantum mechanical system be enlarged by means of additional propositions in such way that classical propositional logic is valid in the enlarged domain?", Specker responde: "The answer to this question is negative except in the case of Hilbert (i.e. unitary) spaces of dimensions 1 and 2. (...) [p. 140] For a three dimensional orthogonal vector space, exactly one of the values *t*(rue) and *f*(alse) is assigned to each linear subspace so that the following conditions are satisfied: t is assigned to the whole space, and f to the null space; if a and b are

---

[13] Muy probablemente los trabajos de Mermin [Mermin 90 d, 93 a, b] contribuyeron a este cambio de nombre.

[14] Por ejemplo en [Van Fraassen 91].

[15] Bell, en una nota añadida en las pruebas de un artículo publicado en 1982 [Bell 82], dice "I am sorry to have missed, before writing the above, an early paper by E. Specker [Specker 60]. It announced already what I have called the Gleason-Jauch result. Specker did not know the work of Gleason, but mentioned rather the possibility of an 'elementary geometrical argument'- presumably of the kind that I myself gave later [Bell 66] as a preliminary to criticism of the axioms."

[16] Traducción de Allen Stairs, en [Hooker 75], pp 135-140, de [Specker 60]; el original dice: "[p. 245] Kann die Beschreibung eines quantenmechanischen Systems durch Einführung von zusätzlichen — fiktiven — Aussagen so erweitert werden, dass im erweiterten Bereich die klassische Aussagenlogik gilt (...)?

Die Antwort auf diese Frage ist negativ, ausser im Fall von Hilbertschen (d. h. unitären) Räumen der Dimension 1 und 2. (...) [p. 246] Es ist jedem linearen Teilraum eines dreidimensionalen orthogonalen Vektorraumes einer der Werte w (ahr), f (alsch) so zuzuordnen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Dem ganzen Raum ist w, dem Nullraum f zugeordnet; sind $a$und b orthogonale Teilräume, so ist ihrem Durchschnitt $a \cap b$ genau dann der Wert w zugeordnet, wenn beiden der Wert w zugeordnet ist, und es ist dem von ihnen aufgespannten Teilraum $a \cup b$ genau dann der Wert w zugeordnet, wenn mindestens einem der Teilräume a, b der Wert w zugeordnet ist.

Ein elementargeometrisches Argument zeigt, dass eine solche Zuordnung unmöglich ist, und dass daher über ein quantenmechanisches System (von Ausnahmefällen abgesehen) keine konsistenten Prophezeiungen möglich sind."

orthogonal subspaces, then the value t is assigned to their intersection $a \cap b$ exactly when the value t is assigned to both of them; and the value t is assigned to their span $a \cup b$, if the value t is assigned to at least one of the subspaces a, b.

An elementary geometrical argument shows that such an assignment is impossible, and that therefore (aside from the exceptions noted above) no consistent predictions concerning a quantum mechanical system is possible."

En trabajos posteriores (ya en inglés) en colaboración con Simon Kochen [KS 65 a, b], y sobre todo en [KS 67], se desarrolla explícitamente el "argumento geométrico elemental" aludido en [Specker 60][17]. Este argumento alcanza su versión final en un artículo de 29 páginas titulado "The problem of hidden variables in quantum mechanics" [KS 67][18], el único trabajo de los cuatro reseñados que se suele citar al respecto.

Bell, en su revisión crítica de las pruebas de imposibilidad de variables ocultas [Bell 66][19] estudia la transcendencia (para Bell intrascendencia) del lema de Gleason como prueba de imposibilidad de variables ocultas. Bell resta importancia al teorema de Gleason basándose en la (para él) plausibilidad física de las variables ocultas que descarta directamente el resultado: las variables ocultas no-contextuales; veremos la crítica de Bell en la Sec. 2. 3. 3. Pese a esta postura de rechazo, es procedente atribuirle el mismo resultado a Bell. Una comparación detallada entre [Bell 66] y [KS 67] puede encontrarse en [Fine-Teller 78] y en [Brown 93]. Las, a nuestro juicio, ventajas de [KS 67] frente a [Bell 66] quedarán claras en secciones posteriores, especialmente en la Sec. 2. 3. 4 a cuando enunciemos las características de la demostración de [KS 67].

---

[17] En particular en [KS 65 a] aparece por vez primera un conjunto de 8 proposiciones al que nos referiremos más adelante en este capítulo como KS-8.

[18] [KS 67] empieza: "Forty years after the advent of quantum mechanics the problem of hidden variables, that is, the possibility of imbedding quantum theory into a classical theory, remains a controversial and obscure subject. (...) The main aim of this paper is to give a proof of the nonexistence of hidden variables." Sobre la atribución, según KS, del mérito de la idea, en la p. 70 de [KS 67] podemos leer: "Theorem 1 implies that there is no map of the sphere S onto $\{0, 1\}$ satisfying (...). This result, first stated in [Specker 60], can be obtained more simply either by a direct topological argument or by applying a theorem of Gleason [Gleason 57]." [KS 67] apareció en la misma revista que [Gleason 57], de hecho el editor científico que comunica el trabajo de KS es el propio Gleason.

[19] [Bell 66] fue escrito antes que su famoso artículo sobre imposibilidad de variables ocultas locales [Bell 64], aunque fue publicado después; ver [Jammer 74], p. 303.

2. 3. 2. Enunciado del teorema

Consideremos una teoría de variables ocultas (VO) en la que cualquier sistema individual tiene un conjunto de variables que junto, posiblemente, con otras variables asociadas al aparato de medida determinan (de alguna forma no especificada) el resultado de cualquier experimento sobre ese sistema individual (es decir, una teoría de VO *deterministas*). Llamaremos "valores de VO" a los valores que las VO determinan para cada experimento posible. Supongamos específicamente que en nuestra teoría de VO los valores de VO satisfacen las siguientes hipótesis[20]:

(BKS1) *Definitud a priori:* Un sistema individual puede tener simultáneamente valores de VO precisos para dos observables no compatibles, B y β, aunque éstos no se puedan medir conjuntamente (en el sentido de que no se puede hacer una preparación con valores bien definidos para ambos).

(BKS2) *No-contextualidad:* El valor que las VO asocian a la medida de un observable A en un sistema individual es independiente de qué otros observables (compatibles con A) se midan conjuntamente con A.

$$v(A) := v(A_{A,B,\ldots}) = v(A_{A,\beta,\ldots}). \qquad (2.\ 18)$$

Restricciones sugeridas por la MC sobre los valores de VO:

(BKS3): Si la medida de un observable A sobre un conjunto de sistemas idénticamente preparados da resultados en un conjunto discreto de valores (que, de acuerdo con la MC, pertenecen al espectro del operador autoadjunto asociado $\hat{A}$), el valor asociado a ese observable en una teoría de VO, que denotaremos por $v(A)$, debe de ser uno de tales valores para cualquier sistema individual del conjunto.

Corolario: Si un estado cuántico es libre de dispersión para un observable A (lo cual significa que, de acuerdo con la MC, es matemáticamente describible por un estado propio de $\hat{A}$ correspondiente a un cierto valor propio a), cualquiera de los sistemas individuales en dicho estado tendrá un valor de VO para A igual al valor propio,

[20] Este enunciado es esencialmente el que aparece en [Cabello 94] y [Cabello-García Alcaine 95 b]. Los comentarios posteriores pertenecen a [Cabello-García Alcaine 95 b].

$$v(A) = a\,. \qquad (2.\ 19)$$

(BKS4): Cualquier conjunto de valores de VO que corresponda a un conjunto de observables compatibles (descritos en MC por operadores autoadjuntos que conmutan) satisface las mismas relaciones que cualquier resultado posible (según la MC) de medir esos observables de acuerdo con la MC. Esto es: sea $\{A, B, C, \ldots\}$ un conjunto de observables mutuamente compatibles, y supongamos que los operadores que los representan satisfacen una cierta identidad funcional

$$f(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots) = 0. \qquad (2.\ 20)$$

El resultado de cualquier medida conjunta de este conjunto de observables sobre un sistema individual será (de acuerdo con la MC) un conjunto de valores propios de los correspondientes operadores, $\{a, b, c, \ldots\}$, que satisfaga la relación

$$f(a, b, c, \ldots) = 0. \qquad (2.\ 21)$$

(BKS4) establece que cualquier conjunto de valores de VO para esos observables debe verificar la misma relación

$$f(v(A), v(B), v(C), \ldots) = 0. \qquad (2.\ 22)$$

Teorema de Bell-Kochen-Specker: Para sistemas físicos descritos en MC por espacios de Hilbert de dimensión mayor o igual que tres, no existe ninguna teoría de variables ocultas que satisfaga a la vez las hipótesis (BKS1)-(BKS4).

Las hipótesis (BKS3) y (BKS4), las dos que hemos llamado "restricciones sugeridas por la MC", aunque son razonables, no son inevitables, incluso para una teoría de VO cuyas predicciones sean totalmente compatibles con las de la MC. Por ejemplo, en la teoría de Bohm [Bohm 52], [Bohm-Hiley 93], en particular en el tratamiento que en este marco hacen Dewdney *et al.* del espín de las partículas de espín 1/2 [Dewdney-Holland-Kyprianidis-Vigier 88], [Dewdney 92], [Holland 93] (Cap. 10), las tres componentes del espín de una partícula individual tienen valores (ocultos) continuos simultáneamente bien definidos; es en la interacción con el dispositivo de medida, típicamente un aparato de Stern-Gerlach [Gerlach-Stern 21, 22 a, 22 b], cuando aparece la discretización de la componente de espín que se está midiendo (de manera que está prohibida la existencia de conjuntos libres de dispersión para más de

una componente de espín). La teoría de VO de Bohm es compatible con la MC pero no satisface ni (BKS1) ni (BKS3) ni (BKS4) [Dewdney 92] y por tanto no le afecta el teorema de BKS. Una discusión más detallada de las razones por las que la teoría de Bohm elude el teorema de BKS puede verse en [Dewdney 92, 93], [Pagonis-Clifton 95].

2. 3. 3. Crítica de Bell

En [Bell 66] Bell hace una crítica a las hipótesis del lema relevante (como prueba de imposibilidad de variables ocultas) del teorema de Gleason (esto es, a las hipótesis del teorema de BKS[21]). Las críticas de Bell se dirigen fundamentalmente a la hipótesis de no-contextualidad [Bell 66], p. 451: "The danger in fact was not in the explicit but in the implicit assumptions [sobre los operadores conmutativos]. It was tacitly assumed that measurement of an observable must yield the same value independently of what other measurements may be made simultaneously. Thus as well as $P(\phi_3)$ [la proposición asociada al proyector sobre el vector ϕ_3 del espacio de Hilbert] say, one might measure *either* $P(\phi_2)$ *or* $P(\psi_2)$, where ϕ_2 and ψ_2 are orthogonal to ϕ_3 but not to one another. These different possibilities require different experimental arrangements; there is no *a priori* reason to believe that the results for $P(\phi_3)$ should be the same. The result of an observation may reasonably depend not only on the state of the system (including hidden variables) but also on the complete disposition of the apparatus." [Bell 66], p. 447: "These additional demands [la no-contextualidad] appear reasonable when results of measurement are loosely identified with properties of isolated systems. They are seen to be quite unreasonable when one remembers with Bohr ([Bohr 49], p. 210) "the impossibility of any sharp distinction between the behavior of atomic objects and the interaction with the measuring instruments which serve to define the conditions under which the phenomena appear.""[22]

---

[21] En [Bell 66] Bell habla del teorema "de Gleason", en [Bell 82] habla del teorema "de Gleason-Jauch" aunque, como ya hemos dicho, reconoce al final que este resultado ya había sido adelantado por Specker. En ese mismo artículo, Bell cita por primera vez el trabajo de Kochen y Specker [KS 67], pero simplemente como una "prueba de imposibilidad" más.

[22] De hecho, se pueden encontrar citas de Bohr aún más explícitas, por ejemplo, [Bohr 28], p. 99 (de la edición en castellano): "... el postulado cuántico implica que toda observación de los fenómenos atómicos lleva aparejada una interacción con el aparato de observación que no puede ser despreciada. Por consiguiente, no puede adscribirse una realidad independiente en el sentido físico ordinario ni a los fenómenos ni a los instrumentos de observación. Después de todo, el concepto de observación es arbitrario en la medida en la que depende de qué objetos se incluyan en el sistema a observar."

La respuesta a las objeciones de Bell es la siguiente: Para que el teorema de BKS funcione no hace falta suponer que el resultado de una medición sólo depende de las variables ocultas del sistema sobre el que se mide, puede, también depender de las variables ocultas del aparato de medida, ése no es el problema; el problema (para las variables ocultas) es otro, como ilustra el siguiente ejemplo: supónganse tres observables A, B, C, de manera que A es compatible con B y C, pero B y C son incompatibles entre sí; supóngase que, al menos en este caso, la condición de no-contextualidad no se cumple y que $v(A)$ es diferente cuando A se mide conjuntamente con B que cuando se mide conjuntamente con C. "Conjuntamente", sin embargo, no quiere decir "simultáneamente" (ni siquiera quiere decir, en este caso, que deba de existir un referencial en el que ambas mediciones sean simultáneas): la condición de compatibilidad permite medir A y *después* decidir qué otro observable (B o C) se mide (o incluso decidir no medir ningún observable más). Supuestamente las variables ocultas *deberían* permitir *predecir* el resultado —posiblemente distinto— de cada uno de estos tipos de medición de A, $v(A)$, *antes* de decidir cuál es la medición conjunta (A y B, A y C, o sólo A) pero ¿cómo puede depender $v(A)$ de una decisión futura?[23]. Otra versión de la misma idea consiste en sustituir esa elección "futura" por una elección que se toma en una región del espacio-tiempo separada de la región en la que se efectúa la medición de A por un intervalo de género-espacio, de manera que no exista conexión causal entre la medición de A y la decisión de qué se mide (B o C). Eso implica considerar sistemas compuestos de al menos dos partes espacialmente separables, de manera que la medición de A se efectúe en una de las partes y que los observables B y C sean observables sobre la otra parte. Eso es equivalente a sustituir la hipótesis de no-contextualidad por un caso particular de la misma, mucho más plausible físicamente: la hipótesis de localidad. De hecho, en [Bell 66], este paso ya se apunta al final del artículo, p. 452: "It would (...) be interesting, perhaps, to pursue some further "impossibility proofs", replacing the arbitrary axioms objected to above by some condition of locality, or of separability of distant systems." Cuando por fin se publicó [Bell 66], hubo que añadir una nota al final: "Since the completion of this paper such a proof has been found [Bell 64]". En la Sec. 3. 3. 1 y siguientes desarrollaremos la demostración (con desigualdades) de Bell. Seguiremos, sin embargo, con un estudio de las demostraciones del teorema de BKS porque de lo que aparentemente Bell no se dio cuenta es que las mismas demostraciones (algebraicas) del teorema de BKS podrían, en ciertas condiciones, servir para demostrar un teorema de imposibilidad de variables ocultas locales (el teorema de Bell-EPR) cuando se aplican a sistemas compuestos de

[23] [Peres-Ron 88], p. 119, "There is however a difficulty. (...) if $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{C}] = 0$ but $[\hat{B}, \hat{C}] \neq 0$, suppose that we measure A first and only a later time decide whether to measure B or C or none of them. How can the outcome of the measurement A depend on this *future* decision?"

dos (o más) partes separadas por intervalos de género-espacio. En el capítulo 4 veremos cuáles son esas condiciones.

2. 3. 4. La demostración de Kochen y Specker

a. Características

La demostración original por Kochen y Specker del teorema de BKS en dimensión 3 [KS 67] tiene cinco características que nos interesará recordar en el resto del capítulo:

(1) *Es independiente del estado:* la contradicción se alcanza para cualquier asignación de valores de partida.

Más adelante veremos demostraciones que llamaremos "dependientes del estado" en las que la contradicción se alcanza sólo para una cierta elección de valores de partida (equivalentemente, para una cierta preparación de un estado físico), e incluso demostraciones "probabilísticas" en las que la contradicción surge sólo para ciertos valores de partida y ciertos valores finales (equivalentemente, para un cierto conjunto de estados individuales postseleccionados por una segunda medición tras la preparación inicial); de hecho, veremos que la demostración de KS contiene varias demostraciones dependientes del estado y varias demostraciones probabilísticas.

(2) *Usa sólo proyectores sobre subespacios unidimensionales.* Estrictamente hablando, la demostración original usa operadores que representan componentes de espín al cuadrado de una partícula de espín 1, $\hat{S}_n^2$, que son operadores de espectro {0, $\hbar^2$ (doblemente degenerado)}, pero como existe una biyección entre estos operadores y los proyectores sobre subespacios unidimensionales[24],

$$\hat{P}_n = \hat{I} - \hat{S}_n^2 / \hbar^2 \qquad (2.\ 23)$$

(el espectro de los $\hat{P}_n$ es {0 (doblemente degenerado), 1}), diremos que la demostración de KS es equivalente a una demostración con proyectores unidimensionales.

[24] En la representación, [Messiah 64], p. 512 (de la versión en castellano):

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.\ a)$$

En 2. 5 veremos demostraciones no con proyectores unidimensionales (proyectores de rango 1) sino con operadores en dimensión 4 (y 8) con dos valores propios distintos doblemente (y cuatro veces) degenerados. Además, en [Kernaghan-Peres 95] se da una demostración (en dimensión 8) con 30 proyectores, 14 de rango 2, y 16 de rango 1, y en [Peres 96 b] se presenta otra (en dimensión 4) con 9 proyectores de rango 2.

(3) *Tiene una interpretación física:* los $\hat{S}_n^2$ representan componentes de espín al cuadrado de una partícula de espín 1, $S_n^2 = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})^2$. Además KS dan una receta para medir conjuntamente cualquier conjunto completo de estos observables (tres S_n^2 en tres direcciones mutuamente ortogonales).

Uno de los puntos fuertes de [KS 67] frente a cualquier demostración anterior, en particular frente a [Bell 66], es precisamente éste: que proponen una interpretación física concreta de los operadores que se manejan y además dan una receta para su medición, tanto de cada uno de ellos individualmente como de conjuntos mutuamente conmutativos de ellos (mientras que Bell maneja proyectores abstractos sin preocuparse de su interpretación física). La medición de un S_n^2 se puede hacer mediante Stern-Gerlach ordinarios, y una medida conjunta de un conjunto completo de este tipo de observables, por ejemplo de S_x^2, S_y^2 y S_z^2, es equivalente a una medición del observable

$$H_\theta = aS_x^2 + bS_y^2 + cS_z^2, \tag{2. 24}$$

con a, b, c reales y distintos (los posibles resultados de una medición de H_θ son $\{h_x = b+c,\ h_y = a+c,\ h_z = a+b\}$[25]), ya que S_x^2, S_y^2 y S_z^2 se pueden escribir como función de H_θ, concretamente,

$$S_x^{\,2} = (a-b)^{-1}(c-a)^{-1}[H_\theta - (b+c)](H_\theta - 2a), \tag{2. 25 a}$$

$$S_y^{\,2} = (b-c)^{-1}(a-b)^{-1}[H_\theta - (c+a)](H_\theta - 2b), \tag{2. 25 b}$$

$$S_z^{\,2} = (c-a)^{-1}(b-c)^{-1}[H_\theta - (a+b)](H_\theta - 2c). \tag{2. 25 c}$$

Así, por ejemplo, si el resultado de una medida de H_θ fuese $h_x = b+c$, la MC permite inferir, a partir de las expresiones (2. 25 a)-(2. 25 c), que $S_x^2 = 0$, y $S_y^2 = S_z^2 = 1$. Físicamente, KS interpretaban H_θ como la perturbación de primer orden que experimenta la energía de un átomo de ortohelio en el estado 2^3S_1 —$n = 2$, $l = 0$,

[25] Equivalentemente H_θ se puede representar por el operador

$$\hat{H}_\theta = h_x|S_x = 0\rangle\langle S_x = 0| + h_y|S_y = 0\rangle\langle S_y = 0| + h_z|S_z = 0\rangle\langle S_z = 0|. \tag{2. b}$$

$s=1$— sometido a un campo eléctrico de simetría ortorómbica[26]. Entonces el hamiltoniano H es perturbado a $H + H_\theta$. El operador $\hat{H}_\theta$ corresponde así al observable físico que representa el cambio de energía del estado orbital más bajo del ortohelio que resulta de aplicar ese campo eléctrico. El cambio en los niveles de energía se puede medir estudiando el espectro del átomo de helio después de aplicar el campo. Con esa interpretación física resuelta de este modo, el resultado de KS se puede enunciar diciendo que no es posible asignar consistentemente valores de VO no-contextuales a un conjunto de observables $\{S_n^2\}$.

(4) *Es finita:* requiere sólo un número finito de operadores (de proyectores) y por tanto sólo supone la existencia de valores para un número finito de observables (proposiciones) físicos.

Otra diferencia esencial entre [Bell 66] y [KS 67] es que mientras Bell (y [Gleason 57]) maneja un *continuo* de proyectores, KS sólo usan un número *finito*. En la Sec. 2. 3. 5 nos ocuparemos de las demostraciones continuas. La siguiente cita refleja porqué KS pensaban que era importante hacer una demostración con un número finito de proposiciones, [KS 67], p. 70: "Theorem 1 implies that there is no map of the sphere S onto $\{0, 1\}$ satisfying (...). This result, first stated in [Specker 60], can be obtained more simply either by a direct topological argument or by applying a theorem of Gleason [Gleason 57]. However, it seems to us important in the demonstration of the non-existence of hidden variables that we deal with a small finite partial Boolean algebra [definida en la p. 65 de [KS 67]]. For otherwise a reasonable objection can be raised that in fact it is not physically meaningful to assume that there are a continuum of quantum mechanical propositions."

[26] Una receta ingenua para obtener un campo de ese tipo es: colóquense sendas cargas eléctricas puntuales idénticas λ en los puntos de coordenadas $(a, 0, 0)$ y $(-a, 0, 0)$, otras dos cargas μ, una en $(0, b, 0)$ y otra en $(0, -b, 0)$; y otras dos ν, una en $(0, 0, c)$ y otra en $(0, 0, -c)$. El campo resultante tiene la simetría requerida. Ver [KS 67], pp. 72-73 y [Belinfante 73], p. 36. Ver también [Swift-Wright 80] (Stern-Gerlach generalizados) y la Sec. 2. 4. 3 h.

(5) *Se basa en descomposiciones aditivas de la identidad en el espacio de Hilbert total* (de dimensión 3, en el caso de KS),

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{3} \hat{P}_i \qquad (2.\ 26)$$

(o, equivalentemente en la versión original, en descomposiciones del tipo

$$2\hbar^2 \hat{I} = \sum_{i=1}^{3} \hat{S}_i^2). \qquad (2.\ 27)$$

En 2. 5 veremos demostraciones "multiplicativas" que se basan en descomposiciones de la identidad como producto de operadores. Es también pertinente resaltar que la demostración de KS usa descomposiciones de la identidad del espacio de Hilbert *total*, ya que, como veremos en la Sec. 2. 4. 2. h, existen demostraciones con las características (1)-(4) pero basadas en descomposiciones aditivas de la identidad de *subespacios* del espacio de Hilbert total.

Veamos cómo se traducen las hipótesis del teorema a una demostración de estas características. Consideremos el espacio de Hilbert de dimensión tres que representa los estados de espín de una partícula de espín. Sobre ese espacio de Hilbert, KS consideran operadores del tipo $\hat{S}_n^2$, equivalentemente nosotros consideraremos los correspondientes proyectores unidimensionales $\hat{P}_n = \hat{I} - \hat{S}_n^2 / \hbar^2$. Supongamos que existiese en ese caso una teoría de variables ocultas que satisfaga (BKS1)-(BKS4).

Equivalencia entre observables (proposiciones) y direcciones. Una propiedad útil de este ejemplo es que dos observables S_i^2 y S_j^2 (las componentes al cuadrado según los vectores unitarios $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$), o equivalentemente las correspondientes proposiciones P_i y P_j, son compatibles cuando $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$ son ortogonales, dicho de otra manera $[\hat{S}_i^2, \hat{S}_j^2] = [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0$. Esta propiedad permite establecer una biyección entre las direcciones en el espacio euclídeo tridimensional (que representaremos por vectores $\mathbf{r}_i$) y los correspondientes operadores (o proyectores), explícitamente esta relación es $\hat{I} - \hat{S}_i^2 / \hbar^2 = \hat{P}_i = \mathbf{r}_i^{\mathrm{t}} \otimes \mathbf{r}_i$ (donde $\mathbf{r}_i$ es real y unitario y $\mathbf{r}_i^{\mathrm{t}}$ su transpuesto). En adelante hablaremos casi siempre de direcciones en lugar de observables o proposiciones.

Por (BKS1) cada observable S_n^2 (cada proposición P_n) debe tener un valor predefinido que, por (BKS3), supondremos que es 0 ó $\hbar^2$ (1 ó 0); con la equivalencia anterior supondremos que cada dirección $\mathbf{r}_i$ debe tener un valor predefinido

$$v(\mathbf{r}_i) \in \{1,\ 0\}. \tag{2. 28}$$

Ademas, como la suma de cualquier conjunto completo de operadores (proyectores) compatibles es la identidad multiplicada por $2\hbar^2$ (la identidad), es decir, los resultados de cualquier medida de un conjunto completo de observables (proposiciones) siempre es $2\hbar^2$ (1), siendo siempre dos de ellos $\hbar^2$ (0) y el tercero 0 (1), la hipótesis (BKS4) se traduce en que para cualquier trío de direcciones mutuamente ortogonales $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_k$, debe ocurrir que

$$v(\mathbf{r}_i) + v(\mathbf{r}_j) + v(\mathbf{r}_k) = 1. \tag{2. 29}$$

Es decir, los valores asignados a tres direcciones mutuamente ortogonales han de ser un 1 y dos 0's. En particular no es posible asignar el valor 1 a dos direcciones ortogonales.

La hipótesis de no-contextualidad (BKS2) se traduce en que el valor asignado a una dirección debe ser el mismo cualquiera que sea la terna de direcciones ortogonales que se considere. Por ejemplo, supóngase que $\{\mathbf{r}_i,\ \mathbf{r}_j,\ \mathbf{r}_k\}$ es una terna ortogonal, que contiene a $\mathbf{r}_i$, entonces para cualquier otra terna ortogonal que contenga a $\mathbf{r}_i$, $\{\mathbf{r}_i,\ \mathbf{r}_{j'},\ \mathbf{r}_{k'}\}$, debe ocurrir que

$$\begin{aligned} v(\mathbf{r}_i) &= 1 - v(\mathbf{r}_j) - v(\mathbf{r}_k) \\ &= 1 - v(\mathbf{r}_{j'}) - v(\mathbf{r}_{k'}) \end{aligned} \tag{2. 30}$$

Equivalencia entre valores y colores. Es habitual en la literatura asignar un color a cada uno de los dos posibles valores que pueden tomar las direcciones (por ejemplo, blanco para el 1 y negro para el 0). Un conjunto de direcciones sobre el que no se puede implementar tal asignación se dice entonces que es un conjunto "no-coloreable" de direcciones. El problema de encontrar una aplicación v sobre las direcciones del espacio euclídeo que verifique (2. 28) y (2. 29) es entonces equivalente al de "colorear" una esfera centrada en el origen (cada pareja de puntos antípodas de la esfera representa una dirección) con las restricciones que se deducen trivialmente de (2. 28) y (2. 29).

b. Diagramas de KS

En el trabajo original [KS 67], pp. 68, 69 y 70, KS utilizaban unas construcciones a las que en la literatura posterior se les llama "diagramas de KS" (ver, por ejemplo, [Belinfante 73], pp. 64 y 67) o "grafos de KS" [Peres-Ron 88][27]. Su único cometido es representar las ortogonalidades entre direcciones: cada vértice representa una dirección y dos vértices están unidos por un segmento si son ortogonales. En dimensión 3 un conjunto de direcciones ortogonales se representa entonces por un triángulo.

En esta memoria usaremos con frecuencia estos diagramas o generalizaciones de los mismos que cumplan el mismo cometido, cuando o la dimensionalidad del espacio de Hilbert o el número de direcciones representado desaconsejen usar los diagramas de KS habituales.

c. Los tres pasos

La construcción de un conjunto de direcciones no-coloreable con las características antes señaladas procederá en tres pasos. En el primero construiremos un conjunto de direcciones para el que una elección particular de valor para una de las direcciones determina el valor de otra de ellas; encadenando cinco de estos conjuntos construiremos en el segundo paso conjuntos que son no-coloreables para una elección particular de una de sus direcciones; encadenando tres de estos conjuntos obtendremos en el tercer paso un conjunto que no es coloreable sea cual sea la elección de partida.

Primer paso: construcción de un conjunto con una predicción definida

Definición: Llamaremos *conjunto con una predicción definida (definite prediction set, DPS)* a un conjunto $S = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{f}$ de direcciones tal que al menos para una elección de valor para una dirección particular $\mathbf{r}_i$ de S, el valor para otra dirección $\mathbf{r}_j$ de S está determinado por (2. 28) y (2. 29).

[27] Estos diagramas se usan en por vez primera en [KS 65 a], Fig. 1. También se usan en [Lenard 74], p. 229, [Pitowsky 82], p. 394, [Redhead 87], p. 126 y 130, [Clifton 93] pp. 444 y 446, [Bechmann Johansen 94], [Vermaas 94], p. 659.

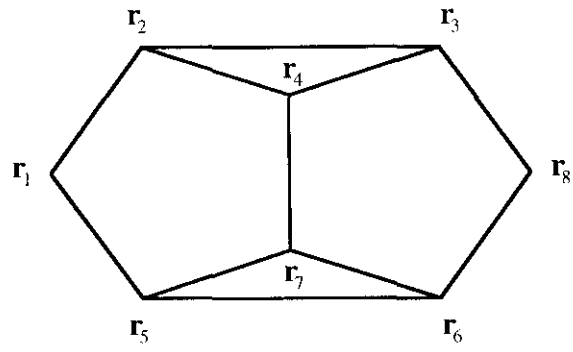


Fig. 2. 1. Diagrama de Kochen-Specker del conjunto KS-8. En el caso más general las direcciones son:

$\mathbf{r}_1 = (1,\ 0,\ 0)$
$\mathbf{r}_2 = (0,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha)$
$\mathbf{r}_3 = (\cot\phi,\ 1,\ -\cot\alpha)$
$\mathbf{r}_4 = (\tan\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha,\ -\sin\alpha,\ \cos\alpha)$
$\mathbf{r}_5 = (0,\ \cos\beta,\ \sin\beta)$
$\mathbf{r}_6 = (\cot\phi,\ 1,\ -\cot\beta)$
$\mathbf{r}_7 = (\tan\phi\,\mathrm{cosec}\,\beta,\ -\sin\beta,\ \cos\beta)$
$\mathbf{r}_8 = (\sin\phi,\ -\cos\phi,\ 0)$

con $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta \neq p\pi/2$, p entero. Para que $\mathbf{r}_4$ sea ortogonal a $\mathbf{r}_7$, es necesario que

$$\sin\alpha \sin\beta \cos(\alpha - \beta) = -\tan^2\phi\,. \tag{2. 31}$$

Como el miembro izquierdo de (2. 31) está acotado entre –1/8 y 1, entonces

$$|\phi| \leq \arctan(1/\sqrt{8})\,. \tag{2. 32}$$

Para cualquier elección de ϕ consistente con esta desigualdad, elegiremos α y β de manera que verifiquen (2. 31).

El conjunto de 8 direcciones de la Fig. 2. 1, al que llamaremos *KS-8*, es un DPS[28] como muestra el siguiente lema.

---

[28] Como ya hemos dicho, KS-8 aparece por primera vez en [KS 65 a], Fig. 1. En su forma original el conjunto tenía 11 proposiciones, de las que 3 no juegan ningún papel y por tanto se pueden eliminar. Clifton [Clifton 93] conjetura que ése es el conjunto más sencillo de este tipo (lo que nosotros llamamos un DPS), e incita a buscar uno más pequeño. En respuesta a Clifton, Vermaas [Vermaas 94] señala que se puede eliminar uno de las direcciones del conjunto de 8 (como preparar el sistema de manera que $v(\mathbf{r}_1) = 1$, es equivalente a preparar $v(\mathbf{r}_2) = v(\mathbf{r}_5) = 0$, podemos prescindir de $\mathbf{r}_1$ y decir simplemente que nuestra preparación —o preselección— es $v(\mathbf{r}_2) = v(\mathbf{r}_5) = 0$). De hecho se puede eliminar, sin merma de significado físico, otra dirección más (por un argumento simétrico, si al medir

Lema 1: $v(\mathbf{r}_1)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_8)=0$.

Demostración: Por reducción al absurdo; supongamos

$$v(\mathbf{r}_1)=v(\mathbf{r}_8)=1; \tag{2. 33}$$

$$v(\mathbf{r}_1)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_2)=v(\mathbf{r}_5)=0,\ v(\mathbf{r}_8)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_3)=v(\mathbf{r}_6)=0, \tag{2. 34}$$

$$v(\mathbf{r}_2)=v(\mathbf{r}_3)=0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_4)=1,\ v(\mathbf{r}_5)=v(\mathbf{r}_6)=0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_7)=1, \tag{2. 35}$$

pero $\mathbf{r}_4 \perp \mathbf{r}_7$, *q.e.d.*

Añadiendo dos direcciones más a KS-8, como se hace en la Fig. 2. 2, se obtiene un DPS, que llamaremos *KS-10*, de distinto tipo, como muestra el siguiente lema.

Lema 2: $v(\mathbf{r}_1)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{10})=1$.

Demostración: Por reducción al absurdo; supongamos

$$v(\mathbf{r}_1)=1,\ v(\mathbf{r}_{10})=0, \tag{2. 36}$$

por el lema 1

$$v(\mathbf{r}_1)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_8)=0, \tag{2. 37}$$

de (2. 36) y (2. 37)

$$v(\mathbf{r}_{10})=v(\mathbf{r}_8)=0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_9)=1, \tag{2. 38}$$

pero $\mathbf{r}_1 \perp \mathbf{r}_9$, *q.e.d.*

—postseleccionar— encontramos $v(\mathbf{r}_8)=1$ eso equivale a $v(\mathbf{r}_3)=v(\mathbf{r}_6)=0$, por lo que podemos prescindir también de $\mathbf{r}_8$. KS-8 ha sido "redescubierto" varias veces, por ejemplo, [Belinfante 73], p. 63. En Galindo [Galindo 74], p. 201, se dice "Belinfante lo consigue con ocho puntos y puede mejorarse a seis." En la Sec. 2. 3. 5 veremos que la demostración de Belinfante es en realidad una demostración continua que no tiene las características de la de KS, así que la "mejora" de la que habla Galindo probablemente no tiene que ver con una reducción en el número de direcciones de KS-8 sino con las demostraciones continuas; de hecho, Galindo propone una demostración de este último tipo en [Galindo 75]. Los DPSs veremos que tienen un papel relevante en otros tipos de demostraciones del teorema de BKS: las continuas (ver la Sec. 2. 3. 5), y las probabilísticas (Sec. 2. 3. 6); y juegan un papel fundamental en la construcción de conjuntos totalmente no coloreables, como se verá en 2. 4.

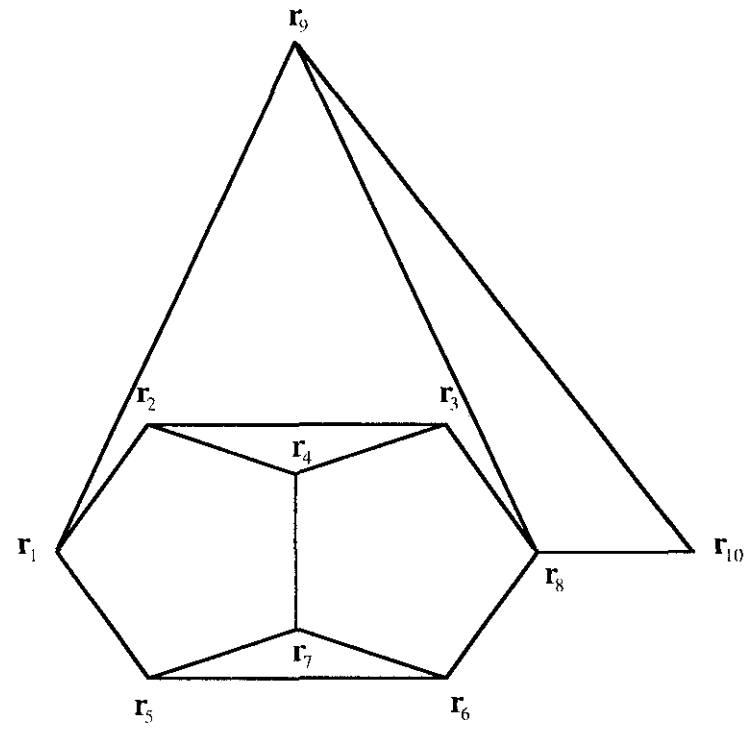


Fig. 2. 2. Diagrama de Kochen-Specker del conjunto KS-10. Las direcciones son las mismas que las de la figura 2. 1 con $\mathbf{r}_9 = (0,\ 0,\ 1)$, y $\mathbf{r}_{10} = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0)$.

Segundo paso: construcción de un conjunto parcialmente no-coloreable

Definición: Llamaremos *conjunto parcialmente no-coloreable* (*partially non-colourable set, PNCS*) a un conjunto T de direcciones tales que existe *al menos una elección de valor* para alguna dirección de T que hace imposible asignar valores al resto de las direcciones de T siguiendo (2. 28) y (2. 29).

El conjunto de la Fig. 2. 3. se ha construido encadenando cinco diagramas como los de la Fig. 2. 2 con ángulo $\phi = \pi/10$ entre las direcciones inicial y final de cada diagrama. La elección de este ángulo (compatible con (2. 32) tiene la ventaja de que permite ir desde la dirección a otra perpendicular mediante un número exacto de pasos ($(\pi/2)/(\pi/10) = 5$), así todos las direcciones iniciales y finales de los KS-10's intermedios están en el mismo plano y se puede elegir la dirección $\mathbf{r}_9$ común a todos ellos. Este conjunto es un PNCS como se ve aplicando cinco veces del lema 2:

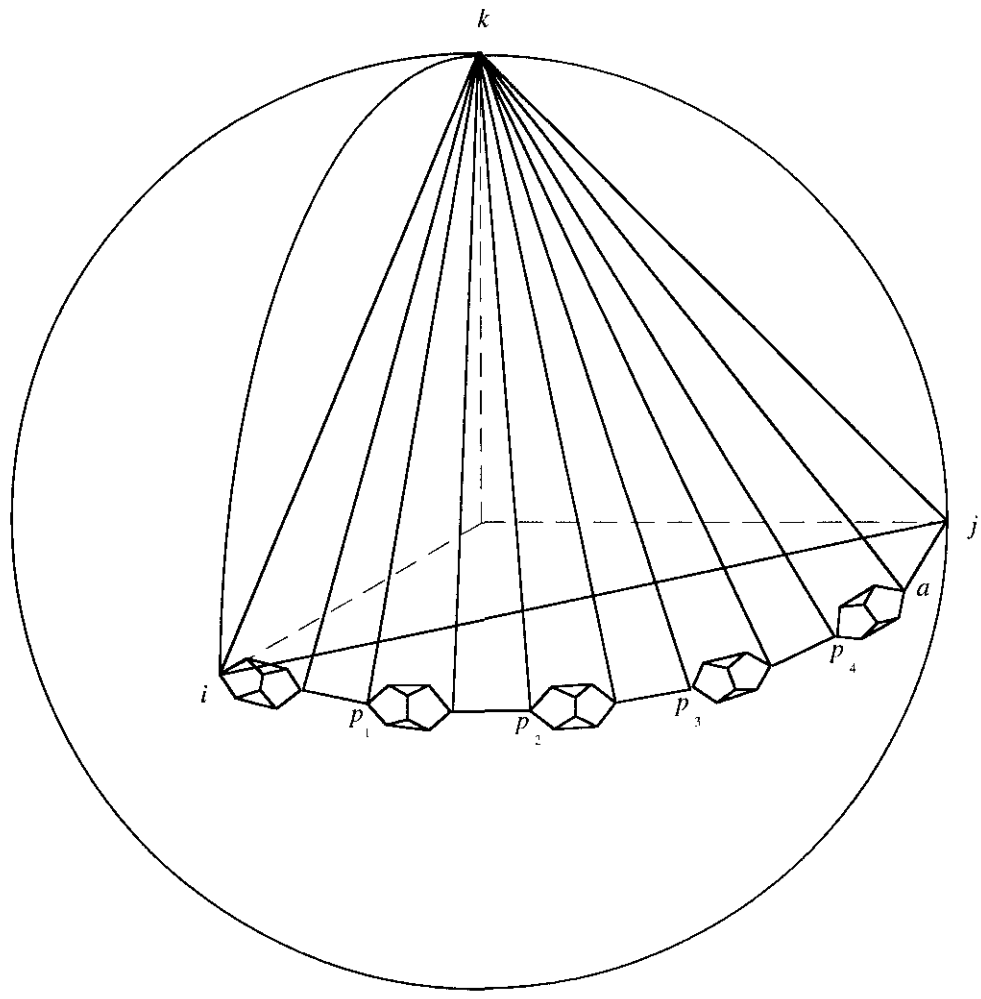


Fig. 2. 3. Conjunto parcialmente no coloreable construido encadenando cinco conjuntos con una predicción definida (cinco KS-10's como los de la Fig. 2. 2). $v(\mathbf{r}_i)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_j)=1$, pero $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{r}_j$.

$$v(\mathbf{r}_i)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_1})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_2})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_3})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_4})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_j)=1, \qquad (2.\ 39)$$

pero $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{r}_j$, *q.e.d.*

En [Cabello 94] se propone una simplificación de esto: basta aplicar cuatro veces el lema 2 (con $\phi=\pi/10$)

$$v(\mathbf{r}_i)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_1})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_2})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_3})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{p_4})=1, \qquad (2.\ 40)$$

y una vez el lema 1 (con $\phi=\pi/10$)

$$v(\mathbf{r}_i) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_8) = 0, \tag{2. 41}$$

pero es inmediato comprobar que $\mathbf{r}_8 = \mathbf{r}_{p_4}$, con lo que hemos llegado a una contradicción. El PNCS resultante tiene menos direcciones (38) que en el caso anterior (41).

Un PNCS da lugar a una demostración dependiente del estado ("state-specific", en la terminología de [Kernaghan-Peres 95]): si se prepara el sistema en un estado propio de $v(\mathbf{r}_i)$ con valor propio 1, la asignación de valores no se puede completar de manera consistente con (2. 28) y (2. 29)[29].

Tercer paso: construcción de un conjunto totalmente no coloreable

Definición: Llamaremos *conjunto totalmente no-coloreable (totally non-colourable set, TNCS)* a un conjunto finito de direcciones que no se puede colorear *de ninguna manera* consistente con (2. 28) y (2. 29).

[29] Sobre la traducción de esto al lenguaje de [KS 67], Clifton, e-mail del 20 de febrero: "When I first got on to the idea of a state dependent argument (which, after all, is how my probabilistic arguments [Clifton 93] work), I was influenced by looking at the KS 1967 paper. I was trying to find a physical way to understand the criterion they call "weak embeddability" of partial Boolean algebra (pBa) into a Boolean algebra. The definition of that is that, for any nonzero element (say, a ray) of a pBa of projections on a Hilbert space, there is a two-valued homomorphism that sends that element to 1. So what "state dependent" proofs show from that point of view is that there are certain rays that do not admit value 1 without contradiction (viz. the ray you choose the state vector to lie in to get the contradiction), that is, certain pBa's that are not weakly embeddable in a BA [Boolean algebra]. KS also define a notion of (just) embeddability (sans "weak") and that is that for any two nonzero elements (rays) a and b, there is a homomorphism that separates their values, i.e. for which h(a) is not equal to h(b). So there is another kind of "KS contradiction" (if you can call it that) worth looking out for - sets of rays where no valuation permits two rays in the set to have opposite values (KS, in their paper, give a 17-point graph in 3D that illustrates that point [p. 70] - so there, too, it is possible to lower substantially the number of rays needed if one only seeks a nonembeddability result rather than a result which proves there are no valuations at all - which is the original idea of a "KS contradiction".)"

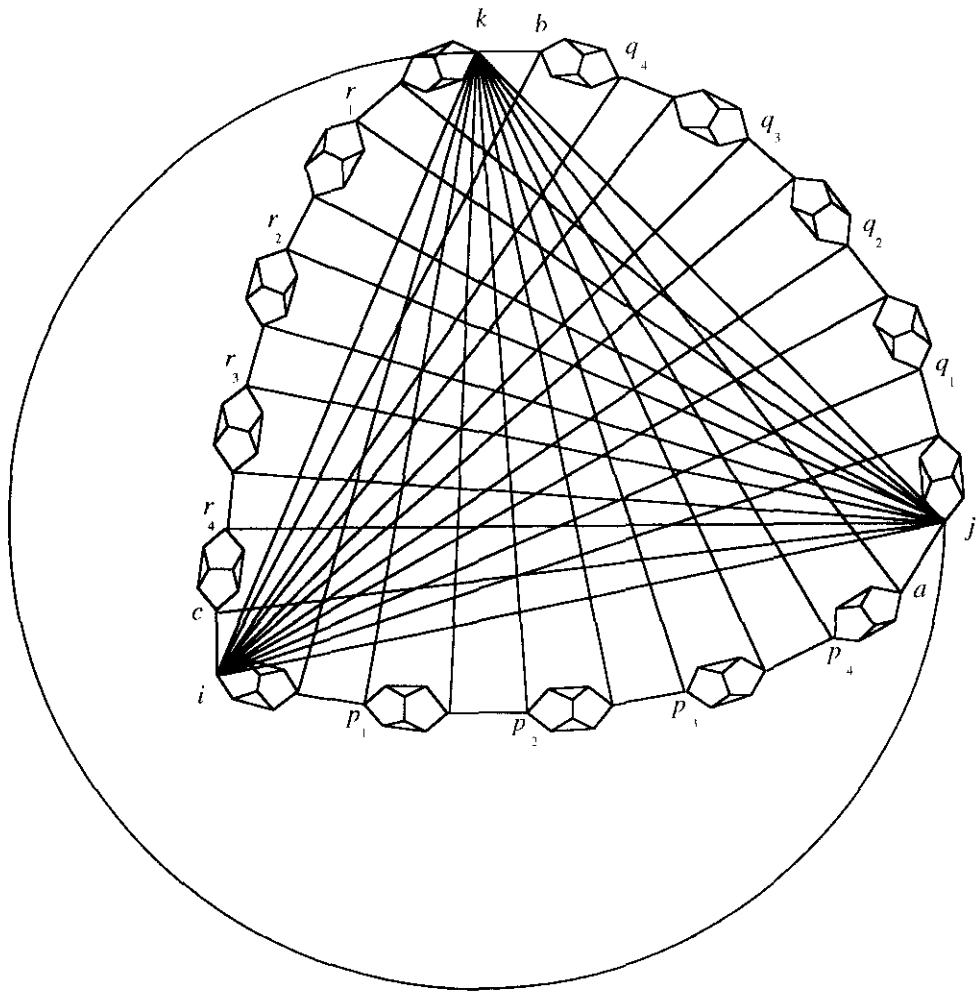


Fig. 2. 4. Conjunto totalmente no-coloreable formado por las 117 direcciones de KS, *KS-117*. Sólo las direcciones *i, p, j, q, k, r*, están en su verdadera posición sobre la esfera, *a* y *i* representan la misma dirección, y lo mismo *b* y *j*, y *c* y *k*. Tomado de [Cabello 95].

El conjunto de la Fig. 2. 4, construido, encadenando tres PNCS's es un TNCS.

Demostración: $v(\mathbf{r}_i)$ no puede ser 1 (si lo es, ya hay una contradicción, según vimos); análogamente $v(\mathbf{r}_j)$ y $v(\mathbf{r}_k)$ tampoco pueden ser 1; pero $v(\mathbf{r}_i) = v(\mathbf{r}_j) = v(\mathbf{r}_k) = 0$ es incompatible con (2. 29), *q.e.d.*

El diagrama de KS final (en representación tridimensional) es el de la figura 2. 4 (el diagrama original —un diagrama plano— puede verse en [KS 67], p. 69, o [Redhead 87], portada y p. 130)[30].

El número de direcciones empleadas en la construcción es: 150 (15, número de KS-10's, por 10 número de direcciones en cada KS-10), menos 15 (puesto que la dirección final de cada KS-10 es la dirección inicial del siguiente) menos 15 (puesto que las direcciones de tipo $\mathbf{r}_9$ es $\mathbf{r}_k$ para los cinco KS-10's con direcciones inicial y final en el plano *x-y*, $\mathbf{r}_i$ para los cinco en el plano *y-z*, y $\mathbf{r}_j$ para los cinco en el plano *x-z*) y menos 3 (puesto que $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_k$); en total 117 direcciones distintas.

Un TNCS da lugar a una demostración del teorema de BKS independiente del estado.

d. Otros DPSs

En las figuras 2. 5 y 2. 6 se representan otros dos DPS diferentes. *B-11* (Fig. 2. 5) es un subconjunto del que usaba Bell en [Bell 66], que es el DPS que aquí llamaremos *B-13* que se obtiene como se explica la Fig. 2. 5. *CG-14* (Fig. 2. 6), se propuso en [Cabello-García Alcaine 95 b] como ejemplo de un DPS que sirve para hace predicciones con certeza en una teoría de VO que discrepan más de la MC que en los casos anteriores (ver la Sec. 2. 3. 6), y para obtener TNCSs con menos direcciones que los basados en KS-10 (ver la Sec. 2. 4. 3. d). *CG-16* es otro DPS obtenido a partir de CG-14.

---

[30] El diagrama de KS, [KS 67], p. 69 —del que la figura 2. 4 es una representación tridimensional—, ha sido bautizado, [Redhead 87], p. 129, como la "cuna del gato" ("the amazing 'cat's cradle'"), nombre que también se usa en [Clifton 93], p. 446. Ver la disgresión en [Mermin 93 b], p. 808, sobre el "great power over the philosophic imagination" que ha tenido este diagrama.

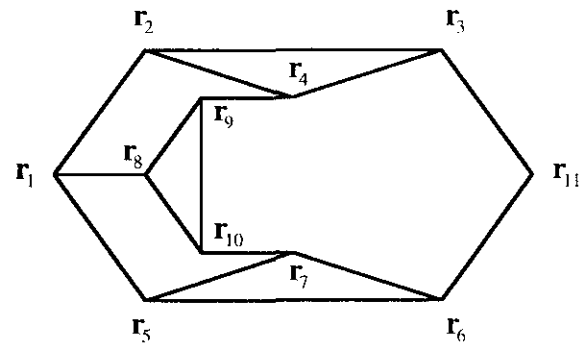


Fig. 2. 5. Diagrama de Kochen-Specker del conjunto B-11. En el caso más general las direcciones son:

$\mathbf{r}_1 = (1,\ 0,\ 0)$
$\mathbf{r}_2 = (0,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha)$
$\mathbf{r}_3 = (\cot\phi,\ 1,\ -\cot\alpha)$
$\mathbf{r}_4 = (\tan\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha,\ -\sin\alpha,\ \cos\alpha)$
$\mathbf{r}_5 = (0,\ \cos\beta,\ \sin\beta)$
$\mathbf{r}_6 = (\cot\phi,\ 1,\ -\cot\beta)$
$\mathbf{r}_7 = (\tan\phi\,\mathrm{cosec}\,\beta,\ -\sin\beta,\ \cos\beta)$
$\mathbf{r}_8 = (0,\ 1,\ 0)$
$\mathbf{r}_9 = (\sin\alpha\cos\alpha,\ 0,\ -\tan\phi)$
$\mathbf{r}_{10} = (\sin\beta\cos\beta,\ 0,\ -\tan\phi)$
$\mathbf{r}_{11} = (\sin\phi,\ -\cos\phi,\ 0)$

con $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta \neq p\pi/2$, p entero. Para que $\mathbf{r}_9$ sea ortogonal a $\mathbf{r}_{10}$ es necesario que

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = -\tan^2\phi. \qquad (2.\ 42)$$

Como el miembro izquierdo de (2. 42) está acotado entre –1/4 y 1, entonces

$$|\phi| \leq \arctan(1/2). \qquad (2.\ 43)$$

Para cualquier elección de ϕ consistente con esta desigualdad, elegiremos α y β de manera que verifiquen (2. 42).

Se puede obtener otro DPS, que llamaremos B-13, añadiendo a B-11 los vectores $\mathbf{r}_{12} = (0,\ 0,\ 1)$, y $\mathbf{r}_{13} = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0)$ (igual que hicimos para obtener KS-10 a partir de KS-8); B-13 es el usado en [Bell 66].

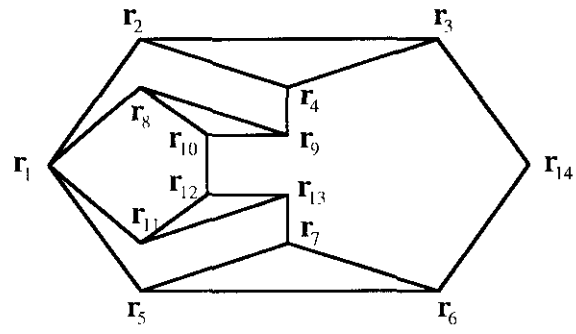


Fig. 2. 6. Diagrama de Kochen-Specker del conjunto CG-14. En el caso más general las direcciones son:

$$\mathbf{r}_1 = (1,\ 0,\ 0) \qquad \mathbf{r}_8 = (0,\ 1,\ 0)$$

$$\mathbf{r}_2 = (0,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha) \qquad \mathbf{r}_9 = (\sin\alpha\cos\alpha,\ 0,\ -\tan\phi)$$

$$\mathbf{r}_3 = (\cot\phi,\ 1,\ -\cot\alpha) \qquad \mathbf{r}_{10} = (\tan\phi,\ 0,\ \sin\alpha\cos\alpha)$$

$$\mathbf{r}_4 = (\tan\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha,\ -\sin\alpha,\ \cos\alpha) \qquad \mathbf{r}_{11} = (0,\ \cos\gamma,\ \sin\gamma)$$

$$\mathbf{r}_5 = (0,\ \cos\beta,\ \sin\beta) \qquad \mathbf{r}_{12} = (\tan\phi\,\mathrm{cosec}\,\beta\sec(\beta-\gamma),\ -\sin\gamma,\ \cos\gamma)$$

$$\mathbf{r}_6 = (\cot\phi,\ 1,\ -\cot\beta) \qquad \mathbf{r}_{13} = (\cot\phi\sin\beta\cos(\beta-\gamma),\ \sin\gamma,\ -\cos\gamma)$$

$$\mathbf{r}_7 = (\tan\phi\,\mathrm{cosec}\,\beta,\ -\sin\beta,\ \cos\beta) \qquad \mathbf{r}_{14} = (\sin\phi,\ -\cos\phi,\ 0)$$

con $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq p\pi/2$, con p entero. Para que la dirección $\mathbf{r}_{10}$ sea ortogonal a $\mathbf{r}_{12}$, es necesario que

$$\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos(\beta-\gamma) = -\tan^2\phi\,. \tag{2. 44}$$

Como el miembro izquierdo de (2. 44) está acotado entre $-3\sqrt{3}/16$ y 1, entonces

$$|\phi| \leq \arctan(3^{3/4}/4)\,. \tag{2. 45}$$

Para cualquier elección de ϕ consistente con esta desigualdad, elegiremos α, β y γ de manera que verifiquen (2. 44).

Se puede obtener otro DPS, que llamaremos CG-16, añadiendo a CG-14 los vectores $\mathbf{r}_{15} = (0,\ 0,\ 1)$, y $\mathbf{r}_{16} = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0)$ (igual que hicimos para obtener KS-10 a partir de KS-8).

En resumen, los DPS que hemos considerado son de dos tipos:

(a) Aquellos en los que $v(\mathbf{r}_i)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_f)=0$. De este tipo son KS-8, B-11 y CG-14. En particular, si $\mathbf{r}_i \hat{} \mathbf{r}_f = \theta$, KS-8 hace esa predicción para todas las direcciones según vectores unitarios con extremo en la corona esférica comprendida entre los ángulos

$$70.5^\circ \leq \theta \leq 109.5^\circ, \tag{2. 46}$$

tomando como eje polar la dirección $\mathbf{r}_i$. B-11 hace lo mismo para

$$63.4^\circ \leq \theta \leq 116.6^\circ, \tag{2. 47}$$

y CG-14 para

$$60.3^\circ \leq \theta \leq 119.7^\circ. \tag{2. 48}$$

(b) Aquellos en los que $v(\mathbf{r}_i)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_f)=1$. De este tipo son KS-10, B-13 y CG-16. En particular KS-10 hace esa predicción para todas las direcciones según vectores unitarios con extremo en el casquete esférico de ángulo

$$|\theta| \leq 19.5^\circ, \tag{2. 49}$$

tomando como eje polar la dirección $\mathbf{r}_i$. B-13 hace lo mismo para

$$|\theta| \leq 26.6^\circ, \tag{2. 50}$$

y CG-16 para

$$|\theta| \leq 29.7^\circ. \tag{2. 51}$$

2. 3. 5. Demostraciones continuas

Con un DPS (un conjunto en el que la asignación de un determinado valor a una de las direcciones obliga a que otra de las direcciones, que subtiende un cierto ángulo respecto al primero, deba tomar un determinado valor) y la ayuda de argumentos geométricos auxiliares, se pueden obtener demostraciones del teorema de BKS sin necesidad de completar un conjunto finito no-coloreable. Así, por ejemplo, Bell [Bell 66] propone el siguiente argumento geométrico: puesto que los proyectores sólo pueden tomar los valores 1 ó 0, deben existir dos direcciones arbitrariamente cercanos en los que tomen valores diferentes; y esto es imposible. Para verlo, pensemos en un DPS como el que sirvió para demostrar el lema 1 (en particular Bell usa el conjunto B-13

descrito en la sección anterior); en él, si una dirección tiene asignado el valor 1, cualquier otro que forme con él un ángulo menor que uno dado también *debe* tener el valor 1. Belinfante [Belinfante 73], p. 63 utiliza un argumento similar; considera un DPS con 8 direcciones en $\mathbf{RP}^3$ (el que hemos llamado KS-8) y un argumento que tiene que ver con el tamaño relativo de los conjuntos de direcciones a los que se ha de asignar uno u otro valor. De este tipo es también la demostración de Galindo [Galindo 75] y la de [Gill-Keane 96][31]. De hecho demostraciones como estas dos últimas son "redescubiertas" periódicamente[32]. A estas demostraciones se les ha dado el nombre de demostraciones *"continuas"* (*"continuum proofs"*) [Brown 93], [Mermin 93 a, b], donde el adjetivo se refiere a que para implementar esos argumentos geométricos sería necesario un continuo de direcciones[33].

2. 3. 6. Un test experimental del teorema de BKS

En las secciones anteriores se ha visto que las construcciones geométricas en las que se apoya la demostración del teorema de BKS se forman a partir de una estructura más básica. Esta estructura más básica por si sola permite otro tipo de demostraciones del teorema de BKS que llamaremos probabilísticas que, idealmente, podrían trasladarse a un sencillo experimento. Lo que sigue se trata en [Cabello-García Alcaine 95 b].

Estrictamente hablando, el teorema de BKS es un enunciado matemático que no requiere ningún experimento para ser probado o refutado[34]. Lo mismo podría decirse respecto al teorema de Bell, sin embargo, mientras que los experimentos para "probar" el teorema de Bell han sido motivo de gran atención durante años, no ha sucedido lo mismo con los experimentos para "probar" el teorema de BKS. El propósito de esta sección es el de examinar la posibilidad de trasladar los argumentos de tipo BKS estudiados en las secciones precedentes en experimentos reales para comprobar las

---

[31] Como dicen [Gill-Keane 96], p. L290: "It is (...) largely a matter of mathematical taste which proof [la de KS o las continuas] is to be preferred." Recuérdese la cita de KS en la que justificaban las ventajas de una demostración finita.

[32] Peres, e-mail del 22 de febrero de 1996, "Michael Kernaghan has told me that the geometrical proof that Richard Gill send me is well known. (...) he may well be rediscovering known things." Gill, e-mail del 12 de marzo de 1996, "[Galindo 75] has a proof in very similar spirit to ours [Gill-Keane 96] (...). I also found a similar earlier 'verbal' proof by a Dutch physicist."

[33] [Fine-Teller 78], p. 633 y [Mermin 93 b], p. 808, opinan que el número de direcciones en el argumento de [Bell 66] es finito; [Bub 74], pp. 69-71, opina lo contrario.

[34] [Zukowski 91a], p. 198, "The Kochen-Specker theorem is a mathematical one, and as such it does not need experimental confirmation."

predicciones de la MC frente a ciertas predicciones de una teoría de VO[35] que satisfaga las mismas (o similares) hipótesis que las consideradas en el teorema de BKS[36].

Las hipótesis del teorema de BKS ya se comentaron en la Sec. 2. 3. 2. El primer punto a tratar es el de identificar esas predicciones mas sencillas con los DPSs y contrastarlas con las de la MC. Después se discutirá cómo se puede trasladar esta contradicción predicción de VO versus predicción de la MC, en experimentos realizables.

El objetivo es encontrar una situación experimental que discrimine entre la MC y una teoría de VO construida sobre las hipótesis (BKS1), (BKS2), (BKS3) y (BKS4), en particular usando la hipótesis de definitud *a priori* (hipótesis (BKS1)) para el menor número de observables posible. Para ello necesitamos clarificar la relación entre los "valores de VO" a los que nos referíamos en los enunciados de las hipótesis y los resultados de las medidas. En otras formulaciones del teorema de BKS (que esencialmente coinciden con la nuestra), por ejemplo en [Redhead 87], entre las hipótesis del teorema se supone la de

(BKSE) *Fidelidad de la medida* (*faithful measurement*, en inglés): Si un sistema individual tiene un valor de VO $v(A)$ para un observable A, una medida de A, dará el resultado $v(A)$.

Esta hipótesis no es necesaria en una demostración del teorema de BKS no-probabilístico y es experimentalmente inverificable (si hay dispersión en los resultados, solo se pueden comparar las frecuencias de las predicciones y de los resultados). Es más, la hipótesis de fidelidad de la medida no se verifica en todas las teorías de VO (la teoría de Bohm es, de nuevo, el contraejemplo). Por fortuna, para una comprobación experimental de la familia de VO en la que estamos interesados, una hipótesis más débil será suficiente.

---

[35] Una observación: hablar de "predicciones" de una teoría de VO que cumpla las mismas hipótesis consideradas en el teorema de BKS no es del todo correcto ya que, según se usen estas premisas, la "predicción" podría ser una u otra diferente. Ahí nace precisamente la inconsistencia lógica que subraya el teorema de BKS. El sentido empleado en lo sucesivo es el de cuál es la predicción más sencilla de una teoría de VO basada en la premisas de BKS que difiera de la correspondiente predicción cuántica. Donde "más sencilla" quiere decir aquella en la que se suponga que están definidos *a priori* el *menor* número posible de observables.

[36] ¿Es interesante un test experimental de imposibilidad de variables ocultas no-contextuales?. La siguiente cita nos lleva a pensar que sí, [Santos 88], p. 376: "For instance, Shimony has recently [?] stated that "Gleason's theorem doomed the program of noncontextual hidden-variables theories." It is a fact, however, that no empirical disproof of these theories has yet been exhibited."

(BKSE') Si una teoría de VO asigna el mismo valor $v(A)$ a cualquier sistema individual de una colectividad, una medida del observable A en cualquiera de los sistemas de la colectividad dará el resultado $v(A)$.

A diferencia de la hipótesis (BKSE), la hipótesis (BKSE') se puede verificar experimentalmente. Nótese que (BKSE') y el corolario de (BKS3) suponen que los valores de VO y los resultados de la MC son iguales sólo en aquellos casos en los que ambos están libres de dispersión en alguna colectividad de sistemas; esto ocurre incluso en la teoría de Bohm (ya hemos dicho, pero quizá conviene repetirlo aquí, que el teorema de BKS no es aplicable a la teoría de Bohm por otros motivos, no por esta hipótesis.

Analicemos ahora los resultados predichos por una teoría de VO no-contextuales frente a los de la MC en el caso de una demostración probabilística del teorema de BKS. Consideremos el DPS que hemos llamado KS-8. Si preparamos una colectividad de partículas de espín 1 en un estado cuántico puro con valor cero para la componente de espín S_z, de acuerdo con la hipótesis (BKS3) todos los sistemas individuales de esa colectividad verificarán

$$v(S_z^2) = s_z^2 = 0 \tag{2. 52}$$

(recordemos que por (2. 23) esto es equivalente a $v(\mathbf{r}_1) = 1$, donde $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 1)$, en la notación de proyectores usada al demostrar los DPSs). Para cualquier sistema individual con este valor de VO, hemos visto que una teoría de variables ocultas que satisfaga (BKS1)-(BKS4) predice *con certeza*

$$v(S_\theta^2) = \hbar^2 \tag{2. 53}$$

si el ángulo $\varphi = \pi/2 - \theta$ verifica la ec. (2. 32)[37]. Por lo tanto, de acuerdo con (BKSE'), la predicción de VO es que el resultado de la medida de $S_\theta{}^2$ sobre cualquier sistema individual de la colectividad será $\hbar^2$. Por otro lado, la MC predice que si medimos el observable S_θ sobre el conjunto de sistemas individuales en el estado $s_z = 0$, la probabilidad de obtener el resultado $s_\theta = 0$ ($\Rightarrow s_\theta{}^2 = 0$) es

$$P_{|s_z=0\rangle}(s_\theta = 0) = \left|\langle s_\theta = 0 | s_z = 0\rangle\right|^2 = \cos^2\theta\,. \tag{2. 54}$$

Por tanto, ambas teorías predicen resultados distintos para el mismo experimento ideal. La mayor discrepancia con la predicción de variables ocultas se obtiene cuando

[37] Alternativamente, si en lugar de KS-8 usamos B-11, el ángulo $\varphi = \pi/2 - \theta$ debería verificar la ec. (2. 43), y si usamos CG-14 debería verificar la ec. (2. 45).

$$\theta = \arctan(\sqrt{8}) \approx 70^\circ\ 31'\ 44'' \quad \Rightarrow \quad P_{|s_z=0\rangle}(s_\gamma = 0) = \frac{1}{9}. \qquad (2.\ 55)$$

Es decir: la MC predice que una de cada 9 veces el resultado será $s_\gamma = 0$, un resultado que es incompatible con el valor de VO $v(S_\gamma{}^2) = \hbar^2$ más la hipótesis (BKSE')[38].

Las preparaciones y medidas necesarias para el experimento ideal sugeridos pueden hacerse mediante aparatos de Stern-Gerlach tradicionales[39], en lugar de con medidas más complicadas de momentos cuadrupolares como se sugiere en [Peres 92 c]. La dependencia angular explícita de la predicción cuántica (2. 54), debería facilitar la discriminación entre señal y ruido en un experimento real.

El experimento descrito permitiría confirmar la predicción de la MC, y por tanto excluir *experimentalmente* la existencia de cualquier teoría de VO que satisfaga las hipótesis (BKS1)-(BKS4) y (BKSE'). El experimento exacto que se ha descrito probablemente sea irrealizable porque los aparatos de Stern-Gerlach reales no seleccionan tan bien las componentes de espín como dan a entender los libros de MC.

La demostración anterior es (como argumento teórico) un ejemplo de lo que aquí llamaremos (siguiendo a [Kernaghan-Peres 95]) demostraciones "probabilísticas" del teorema de BKS. El nombre viene del hecho de que preparando (preseleccionando) los sistemas en un estado sólo encuentra contradicción cuando en una medida posterior (postselección) sobre ese sistema se encuentra un determinado valor (distinto del predicho por las VO), es decir sólo se encuentra contradicción en un subconjunto de los sistemas postseleccionados; el hecho de que la MC permita predecir con qué probabilidad se dan esos resultados es lo que justifica el nombre de probabilísticas para estas demostraciones[40].

---

[38] Alternativamente, si consideramos B-11, la mayor discrepancia con las VO se produce cuando

$$\theta = \arctan(2) \approx 63^\circ\ 26'\ 6'' \quad \Rightarrow \quad P_{|s_z=0\rangle}(s_\gamma = 0) = \frac{1}{5}, \qquad (2.\ c)$$

o, si consideramos CG-14, cuando

$$\theta = \arctan[4(3^{-3/4})] \approx 60^\circ\ 19'\ 20'' \quad \Rightarrow \quad P_{|s_z=0\rangle}(s_\gamma = 0) = \left(1 + \frac{16}{\sqrt{27}}\right)^{-1} \approx \frac{1}{4}. \qquad (2.\ d)$$

[39] Bibliografía sobre los aparatos de Stern-Gerlach: [Gerlach-Stern 21, 22 a, b], [Swift-Wright 80] (SG generalizados), [Platt 92] (análisis con MC del experimento de SG), [Martens-de Muynck 93, 94] (SG para electrones).

[40] Los DPSs pueden considerarse conjuntos no-coloreables en un tercer sentido: son no coloreables con ciertas asignaciones iniciales conjuntas a proposiciones que, a diferencia de los otros casos comentados, no poseen estados propios comunes. Esta asignación tiene físicamente sentido si se supone que la preparación de un estado cuántico conocido permite asignar valores de variables ocultas a un

El primero sugerir la posibilidad de estas demostraciones fue Stairs [Stairs 83], pp. 588-589 (que usó KS-8), más recientemente Clifton [Clifton 93] ha propuesto un argumento similar (con KS-8 y B-13)[41]. En [Cabello-García Alcaine 95 b] se propone un nuevo DPS (el que antes hemos llamado CG-14), que, como hemos visto, revela una probabilidad mayor de que se produzca una incompatibilidad que las anteriores propuestas.

primer subconjunto de proposiciones del DPS, y el resultado de una medición posterior sobre un sistema individual así preparado, permite asignar valores de variables ocultas a un segundo subconjunto de proposiciones del DPS. En ciertos casos (para determinados resultados, que se dan con probabilidad no nula según la MC), ambas asignaciones hacen imposible completar la asignación a las restantes proposiciones del DPS.

[41] En [Clifton 93] los cálculos son incorrectos; ver [Bechmann Johansen 94] y [Vermaas 94].

2. 4. Otras demostraciones aditivas

2. 4. 1. Demostraciones aditivas en dimensión 3

a. Introducción

Dada la importancia fundamental del teorema de BKS, ha habido muchos intentos de simplificar su demostración, en particular de reducir el número de direcciones de la demostración original de KS (117 en dimensión 3). En las secciones siguientes pasaremos revista a dos de estas simplificaciones: en (b) veremos una demostración debida a Asher Peres, un TNCS de 33 direcciones en dimensión 3; en (c) "reconstruiremos" el conjunto de Peres a partir de los DPSs ya introducidos en secciones anteriores; y en (c) veremos la demostración más económica conocida en dimensión 3, con 31 direcciones, debida a John Horton Conway y Simon Kochen.

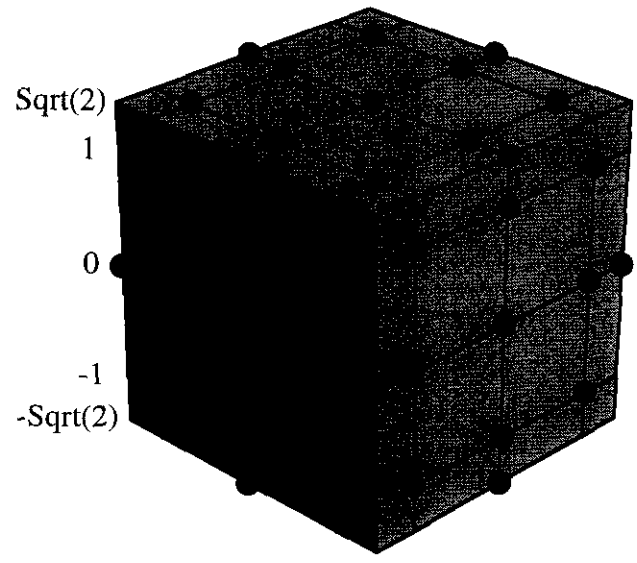


Fig. 2. 7. Las 33 direcciones de P-33 se obtienen uniendo el centro del cubo con los puntos negros que están sobre las caras y las aristas (tomado de [Peres 93], p. 198).

b. P-33: el "poliedro cuántico"

En [Peres 91] y [Peres 93], p. 197, se presenta un TNCS de 33 vectores en dimensión 3, al que nosotros llamaremos *P-33*. P-33 es cualquier conjunto de direcciones que tenga las mismas relaciones de ortogonalidad que el conjunto de 33 direcciones cuyos cosenos directores al cuadrado son una de las combinaciones

$0+0+1=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ y todas sus permutaciones. Estas 33 direcciones se pueden visualizar en la figura 2. 7 uniendo el centro de un cubo de lado $\sqrt{2}$ con los puntos negros sobre sus caras y aristas.

P-33 no es el TNCS más pequeño conocido en dimensión 3, pero tiene una propiedad adicional que permite comprobar de manera sencilla que es no-coloreable: con la elección explícita de direcciones que hemos hecho antes, P-33, como conjunto no ordenado de direcciones, es invariante bajo intercambio de los ejes x, y, z, y bajo cambios de signo de cada eje. Esto permite asignar arbitrariamente, sin pérdida de generalidad, el valor 1 a algunas direcciones, ya que el asignar el valor 0 en lugar del valor 1 sería equivalente a intercambiar los ejes o a cambiarlos de signo, como se indicará en la tabla 2. 1, en la que se demuestra que, con una serie de elecciones admisibles (no restrictivas), P-33 es no-coloreable.

Trío ortogonal			Otros vectores ortogonales al 1°		El 1er vector toma el valor 1 por
001	100	010	110	1–10	elección arbitraria del eje z
101	10–1	*010*			elección arbitraria de x vs. $-x$
011	01–1	*100*			elección arbitraria de y vs. $-y$
1–1$\sqrt{2}$	–11$\sqrt{2}$	*110*	$\sqrt{2}$0–1	0$\sqrt{2}$1	elección arbitraria de x vs. y
10$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$0–1	*010*	–$\sqrt{2}$11		ortogonalidad con el 2° y el 3°
$\sqrt{2}$11	*01–1*	*–$\sqrt{2}$11*	10–$\sqrt{2}$		ortogonalidad con el 2° y el 3°
$\sqrt{2}$01	*010*	*10–$\sqrt{2}$*	11–$\sqrt{2}$		ortogonalidad con el 2° y el 3°
11$\sqrt{2}$	*1–10*	*11–$\sqrt{2}$*	0$\sqrt{2}$–1		ortogonalidad con el 2° y el 3°
01$\sqrt{2}$	*100*	*0$\sqrt{2}$–1*	1–$\sqrt{2}$1		ortogonalidad con el 2° y el 3°
1$\sqrt{2}$1	*10–1*	*1–$\sqrt{2}$1*	01–$\sqrt{2}$		ortogonalidad con el 2° y el 3°
100	*0$\sqrt{2}$1*	*01–$\sqrt{2}$*			

Tabla 2. 1. No-coloreabilidad de P-33 partiendo de una elección inicial arbitraria para los valores de cuatro vectores. La contradicción surge en la última linea: los tres vectores ortogonales han aparecido ya con valor cero. Las direcciones que faltan para completar P-33 son: 1$\sqrt{2}$0, 1$\sqrt{2}$–1, –1$\sqrt{2}$0, –1$\sqrt{2}$1, $\sqrt{2}$10, $\sqrt{2}$1–1, $\sqrt{2}$–10, $\sqrt{2}$–11.

En la tabla 2. 1 sólo aparecen los 25 vectores que se usan para la demostración de no-coloreabilidad *para unas elecciones particulares*, las 8 direcciones necesarias para repetir el mismo argumento para otras elecciones distintas están al pie de la tabla. Por motivos de espacio, al escribir los vectores hemos prescindido de los paréntesis y las comas; así 1--10 indica el vector (1, –1, 0). La tabla debe leerse de izquierda a derecha y de arriba a abajo. En cada linea, al primer vector, en negrita, se le asigna el valor 1. La justificación de porqué se asigna el valor 1 al primero de los vectores de cada linea se explica en la propia tabla. Los vectores segundo y tercero forman con el primero un trío ortogonal, por lo tanto se les asigna el valor 0. Los otros vectores de la misma linea son también ortogonales al primero y por tanto también se les asigna el valor 0. Si un vector está en cursiva eso indica que ya ha aparecido antes. La demostración concluye con la contradicción que surge entre la primera linea y la última; en la primera al vector 100 se le ha asignado el valor 1, y en la última debería asignársele el valor 0, *q.e.d.*

Con ayuda de un programa de ordenador como el que se presenta en [Peres 93], p. 209, se puede comprobar que P-33 es un TNCS *crítico*: si se elimina cualquier dirección el conjunto resultante ya no es un TNCS.

c. De la "cuna del gato" al "poliedro cuántico": P-33 a partir de KS-8

Tal como sugirió Roger Penrose [Penrose 92] (ver también las notas 42 y 45), P-33 puede interpretarse geométricamente como el conjunto de las direcciones relevantes de tres cubos interpenetrados de una manera particular. En esta sección usaremos esa interpretación geométrica para obtener otra demostración de la no-coloreabilidad de P-33. Además de su belleza geométrica, esta demostración nos servirá para volver a subrayar el papel que juegan los DPSs en la construcción de los TNCSs. Esencialmente lo que vamos a hacer es "reconstruir" P-33 "engarzando" conjuntos de tipo KS-8 (recuérdese que KS-10 era el "eslabón" básico de la "cuna del gato"). Hay que señalar que Peres llegó a P-33 de una forma completamente distinta a la que aquí proponemos, veremos esa forma en la Sec. 2. 6. 1[42].

---

[42] Peres, en una comunicación particular al autor del 16 de febrero de 1996, relata, entre otras cosas, cómo llegó a P-33: "... is a long story. After I heard of Mermin's 3-particle "paradox", I wrote my paper that later appeared in Physics Letters 1990 [Peres 90 a], and sent preprints to several people, including Mermin, whom I knew personally. He wrote to me that it was all wrong, and we had a long exchange of correspondence, to which he alludes at the end of his Phys. Rev. Letter of 31 Dec. 1990 [Mermin 90 d]. We both learnt that subject together, but published separately.

During that time, he also asked the opinion of Abner Shimony, who told him that Kochen had told him that he and Conway had a KS construction with 33 vectors (John H. Conway is a famous

Como vimos, KS-8 es realizable si y sólo si el ángulo entre sus vectores inicial y final cumple $\arccos \frac{1}{3} \leq \mathbf{r}_1 \hat{} \mathbf{r}_8 \leq \frac{\pi}{2}$. Una forma explícita de implementar KS-8 en el caso extremo $\mathbf{r}_1 \hat{} \mathbf{r}_8 = \arccos \frac{1}{3}$ (para el que se obtiene la máxima contradicción con la QM), es con la elección de vectores de la figura 2. 8.

---

mathematician at Princeton University, probably better known that Simon Kochen). That construction starts from a unit lattice of points in 3 dimensions. Draw a sphere of radius 2.5, and keep only the points inside that sphere. Connect them to the center of the sphere. This gives 37 rays (these are the 37 spots on the cube on page 114 of my book [Peres 93], the idea of drawing them on the faces of a cube was given to me by Roger Penrose). Then remove 4 "equatorial" points. The 33 remaining points form a "non-colorable" set. I then checked that the 37 points indeed form such set, but instead of testing the non-symmetric set of 33, I had the idea that if, in the cubic lattice, a coordinate 2 was replaced by $\sqrt{2}$, there would again be numerous orthogonality relations, because $1 + 1 - \sqrt{2}\sqrt{2} = 0$. As you had read in Horgan's article [Horgan 93], I have zero geometric intuition. On the other hand, I can easily do simple algebra.

I then wrote to Kochen (whom I also knew personally) that I had another 33 ray set, but that I would withhold publication until after he and Conway publish their result, since they got it first. Kochen answered that meanwhile they had a set with only 31. He did not tell me how it was done, but I guessed it also was a subset of the 37. Then I wrote my computer program [Peres 93], p. 209, and quickly found these 31. After that, I realized that from the multiplicative KS contradiction that Mermin had found, it was possible to construct an additive contradiction, just by taking the eigenvectors of the matrices used for the multiplicative proof. Thus I got the 24 rays in 4 dimensions. I again wrote to Kochen, that 24 < 31, and if he did not object I would publish my results, and mention that he had a construction with 31 vectors [Peres 91]. Some time later, I sent him the figure on page 114 of my book [Peres 93], to be sure that he did not object to its publication — because he and Conway never bothered to publish their proof.

In 1991, I gave a lecture on these results at a meeting in Copenhagen, and Roger Penrose immediately said: these are Escher's interpenetrating cubes, and the 24 are the 24-cell regular polytope. He is really amazing!". Para más detalles sobre el encuentro Penrose-Peres ver [Horgan 93]; ver también [Penrose 92].

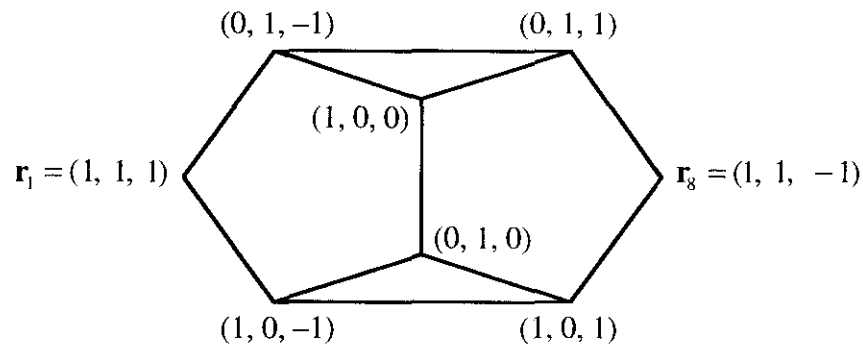


Fig. 2. 8. Una implementación de KS-8 en la que el ángulo $\mathbf{r}_1\hat{}\mathbf{r}_8$ es el mínimo posible.

Arccos $\frac{1}{3}$ es el ángulo que subtienden dos direcciones distintas de entre las que conectan el centro de un cubo con sus vértices. Si suponemos un cubo de lado unidad centrado en el origen y con las caras perpendiculares a los ejes cartesianos, $\mathbf{r}_1 = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{r}_8 = (1, 1, -1)$ representan sendas direcciones que conectan el centro del cubo con uno de sus vértices. Los restantes vectores de la Fig. 2. 8 representan direcciones que conectan el centro del cubo con el centro de alguna de sus aristas (los vectores con una sola componente 0) o con el centro de alguna de sus caras (los vectores con dos componentes 0). KS-8 se puede interpretar entonces diciendo que si se asigna el valor 1 a una de las direcciones que conectan el centro de un cubo con un vértice, el valor asignado a otra de dirección que conecte el centro con un vértice adyacente debe tener el valor 0. Esto nos permite enunciar el siguiente lema.

Lema 1: De las cuatro direcciones que unen el centro del cubo con uno de sus vértices, no puede haber dos a las que se asigne el valor 1.

Siendo estrictos en la cuenta de vectores, para demostrar el lema anterior serían necesarios 6 diagramas como el de la figura 2. 8 (los que ligan dos a dos las cuatro direcciones que unen el centro de un cubo con sus vértices). Sin embargo, esos 6 diagramas comparten muchas direcciones, y basta con 13 direcciones para contenerlos a todos. Este conjunto, formado por las 13 direcciones que se pueden definir sobre un cubo uniendo el centro del mismo con sus vértices, centros de arista y centros de cara, es al que llamaremos el *conjunto de las direcciones "relevantes" de un cubo.*

Llegado este punto es conveniente introducir una generalización de los diagramas de KS usados hasta ahora (por ejemplo, en la figura 2. 8) para representar las relaciones de

ortogonalidad y los tríos mutuamente ortogonales que hay entre conjuntos de direcciones, de modo que sirvan no sólo para conjuntos con pocas direcciones y/o relaciones de ortogonalidad sino que también sirvan para conjuntos con muchas direcciones y/o relaciones de ortogonalidad[43]. En estos nuevos diagramas, a los que llamaremos *diagramas de ortogonalidad*, cada dirección se va a representar por un círculo gris, la ortogonalidad entre dos direcciones se va a indicar por un segmento uniendo dos círculos grises o por un punto negro en la intersección de dos segmentos, y los tríos de direcciones mutuamente ortogonales se van a representar por segmentos más gruesos en la conexión de tres círculos grises o entre dos puntos negros. Por ejemplo en la figura 2. 9 se representa el diagrama de ortogonalidad para las 13 direcciones relevantes de un cubo de lado unidad centrado en el origen y con las caras perpendiculares a los ejes cartesianos (cubo al que por conveniencia llamaremos cubo A).

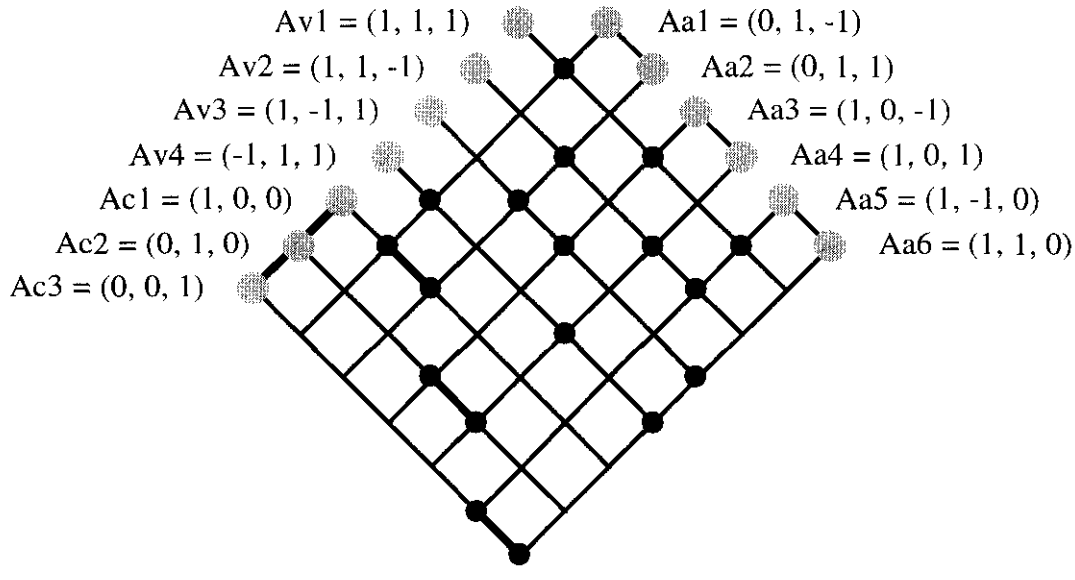


Fig. 2. 9. Diagrama de ortogonalidad que representa las relaciones de ortogonalidad y los tríos mutuamente ortogonales entre las direcciones "relevantes" del cubo A. Hay 24 parejas ortogonales (tantas como puntos negros y segmentos con círculos grises en los extremos) y 4 tríos mutuamente ortogonales (tantos como segmentos oscuros entre puntos negros y segmentos conteniendo tres círculos grises). La notación es: "A" cubo A; "v" vértice; "c" centro de cara; "a" centro de arista.

[43] En [Kernaghan 95] se puede ver lo confuso que resulta utilizar los diagramas de KS tradicionales para representar las relaciones de ortogonalidad de conjuntos grandes (por ejemplo P-33).

Consideremos ahora las 13 direcciones relevantes Bv1, ..., Ba6 de otro cubo B que se obtiene rotando $\frac{\pi}{2}$ el cubo A entorno al eje Aa5, de manera que Ba5 = Aa5, y además Ba6 = Ac3, y Bc3 = Aa6 (figura 2. 10, arriba y centro). Por último, consideremos las 13 direcciones relevantes Cv1, ..., Ca6 de un tercer cubo C que se obtiene rotando $\frac{\pi}{2}$ el cubo A entorno al eje Aa6, de manera que Ca6 = Aa6 y además Ca5 = Ac3, y Cc3 = Aa5 (ver figura 2. 10, abajo).

El conjunto resultante tiene 13 (direcciones) × 3 (cubos) menos las 6 direcciones repetidas (Cc3 = Ba5 = Aa5, Ca5 = Ba6 = Ac3, Ca6 = Bc3 = Aa6), es decir 33 direcciones. Estas 33 tienen las mismas relaciones de ortogonalidad que las de la tabla 2. 1 y por tanto son otra implementación de P-33.

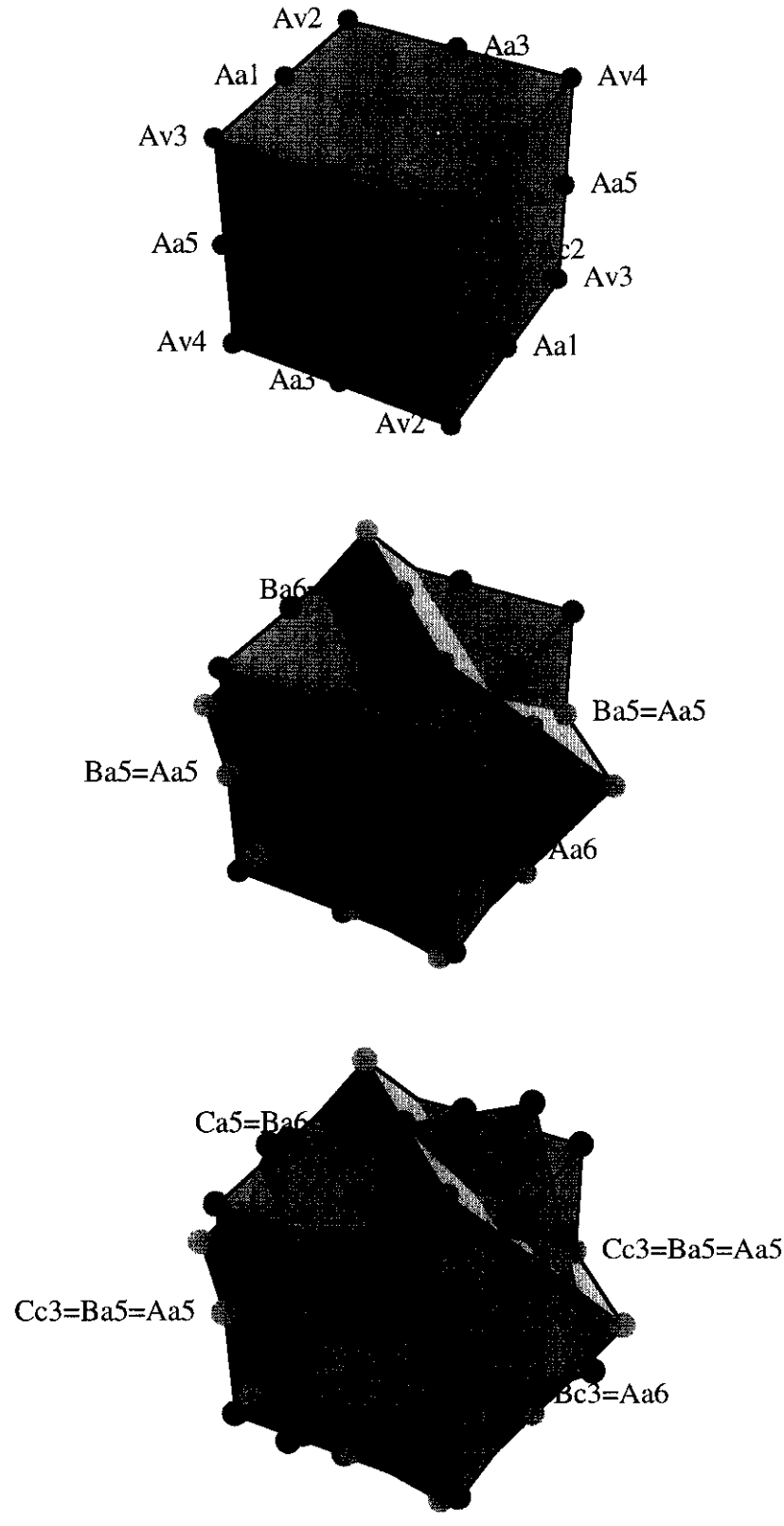


Fig. 2. 10. Arriba: direcciones "relevantes" sobre el cubo A. Centro: el cubo B se obtiene rotando el cubo A entorno al eje Aa5. Abajo: el "poliedro cuántico"; el cubo C se obtiene rotando el cubo A entorno al eje Aa6.

Para demostrar la no-coloreabilidad de P-33 consideremos el diagrama de KS (tradicional) de la figura 2. 11;

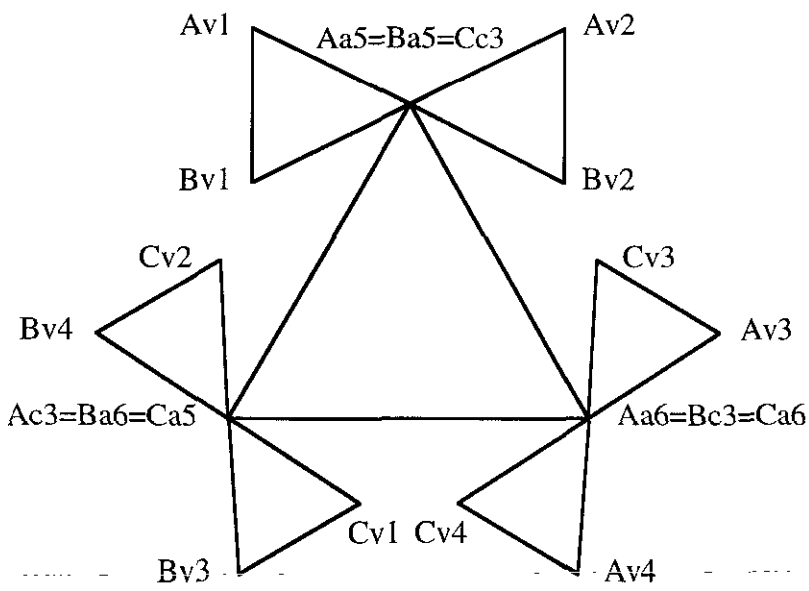


Fig. 2. 11. Diagrama de KS que demuestra, junto con el lema 1, que P-33 es no-coloreable.

$Av1 = (1, 1, 1)$	$Av3 = (1, -1, 1)$	$Bv3 = (\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}+1, 0)$
$Bv1 = (1, 1, -2)$	$Cv3 = (-1, 1, 2)$	$Cv1 = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1, 0)$
$Aa5 = (1, -1, 0)$	$Aa6 = (1, 1, 0)$	$Ac3 = (0, 0, 1)$
$Av2 = (1, 1, -1)$	$Av4 = (-1, 1, 1)$	$Bv4 = (-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1, 0)$
$Bv2 = (1, 1, 2)$	$Cv4 = (1, -1, 2)$	$Cv2 = (\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1, 0)$

del lema se deduce que de las 4 direcciones v de cada cubo *no puede haber 2 blancas*, pero en la figura 2. 11, de las tres direcciones en el triángulo central una debe ser blanca y las otras dos negras; supongamos que tomamos como blanca Aa5; al ser negras Ac3 y Aa6, en cada una de las parejas (Bv4, Cv2), (Bv3, Cv1), (Av3, Cv3), (Av4, Cv4), una dirección debe ser blanca y la otra negra; es fácil ver que no existe ninguna elección compatible con el lema anterior. Otro tanto ocurre si elegimos inicialmente como blanca Ac3 ó Aa6; por tanto P-33 es un TNCS, *q.e.d.*[44]

[44] Obsérvese que si elegimos en la Fig. 2. 11, por ejemplo, Ac3 blanco, podemos prescindir de Bv3, Bv4, Cv1, Cv2 (que serían negros) y obtenemos así un PNCS con 29 direcciones.

Cada cubo tiene cuatro tríos ortogonales (ver Fig. 2. 9), y en el diagrama de la Fig. 2. 11 se ve que los tres cubos comparten un trío ortogonal y que entre las direcciones relevantes de cubos distintos se pueden formar seis nuevos tríos ortogonales, luego P-33 *contiene 16 tríos ortogonales*[45].

d. CK-37, CK-33 y CK-31

CK-37 es cualquier conjunto de direcciones que tenga las mismas relaciones de ortogonalidad que el conjunto cuyos cosenos directores al cuadrado son una de las combinaciones $0+0+1=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ y todas sus permutaciones, o equivalentemente, el conjunto de direcciones que unen el centro del cubo de la figura 2. 12 con los puntos (negros, grises y blancos) en las caras y aristas.

Como se puede comprobar con un programa de ordenador, CK-37 es un TNCS no-crítico. Eliminando las 4 direcciones correspondientes a los puntos blancos en la figura 2. 12 (las direcciones "ecuatoriales" a las que se refiere Peres en la nota 42), se obtienen un TNCS crítico de 33 vectores, conjunto que llamaremos *CK-33*. CK-37 posee tres de estos subconjuntos. CK-33 es distinto de P-33[46]. Además, eliminando las 6 direcciones correspondientes a los puntos grises de la figura 2. 12 se obtiene un TNCS crítico con 31 vectores, *CK-31*, que es el TNCS más económico que se conoce en dimensión 3 (se puede comprobar con ordenador que CK-37 no tiene ningún subconjunto no-coloreable de menos de 31 direcciones). CK-37 contiene seis de estos subconjuntos (curiosamente, pese a ser más abundantes los CK-31, se encontraron después que los CK-33; ver la nota 42). CK-33 y CK-31 fueron obtenidos (¡pero no publicados!) por J. H. Conway y S. Kochen; CK-31 aparece publicado por primera vez en [Peres 93], p. 114. En la nota 42, Peres cuenta cómo obtuvieron Conway y Kochen estos conjuntos.

---

[45] La construcción de la Fig. 2. 10 (abajo) ha sido bautizada como el "poliedro cuántico" [Horgan 93] y, curiosamente, aparece en una litografía del artista holandés Maurits C. Escher titulada "Cascada" (1961), ver por ejemplo [Locher 71], p. 253 en la versión en inglés, coronando una de las torres bajo la que discurre un (imposible) circuito perpetuo de agua, inspirado a su vez en un objeto imposible llamado la "tribarra" ideado por Roger Penrose y su padre Lionel [Penrose-Penrose 58].

[46] Sobre la relación entre P-33 y los conjuntos CK ver la nota 42. En [Penrose 92], p. 8, se propone otro TNCS de 33 direcciones en dimensión 3, distinto de CK-33 y P-33.

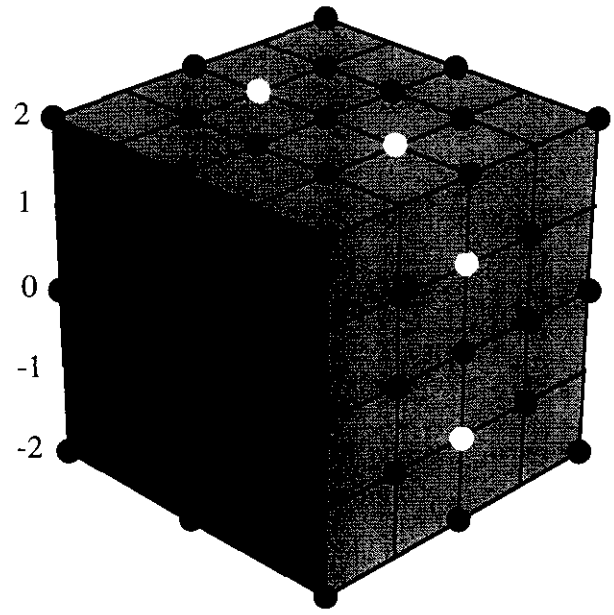


Fig. 2. 12. CK-37, CK-33 y CK-31. CK-37 se obtiene uniendo el centro del cubo con todos los puntos indicados (negros, blancos y grises). CK-33 es el subconjunto que se obtiene al considerar sólo los puntos negros y grises. CK-31 es el subconjunto que se obtiene al considerar sólo los puntos negros y blancos.

Habría sido interesante dar con un argumento para deducir la no-coloreabilidad de los conjuntos CK a partir de los DPSs que contienen. No he encontrado tal deducción[47], sin embargo, se puede ver que los CK están formados a base de "imbricar" KS-8's "máximos" (como el de la figura. 2. 8) y, además, B-11's máximos (ver la Sec. 2. 3. 4. d) como el de la figura 2. 13.

[47] Peres, en sendas comunicaciones particulares el 13 de marzo [y el 23 de febrero] de 1996 comenta que: "Using the text of a letter privately sent by [Kurt] Schütte [to Specker] in 1965, and recently circulated [during a conference in June 1994] by [Karl] Svozil [(Vienna)], Bub [Bub 96] has rediscovered the 33 vectors in 3d that were found by Conway and Kochen, before they found the 31 (not a subset of the 33). This is apparently the first time that these 33 will appear in the literature." Aparentemente el argumento Schutte contenía un conjunto de 13 direcciones (¿B-13?). Karl Svozil, que estaba en Nueva Zelanda cuando contacte con él, prometio mandarme fotocopia de la carta de Schütte a Specker, tan pronto regresase a Viena. Jeffrey Bub, también prometió enaviarme una copia de [Bub 96].

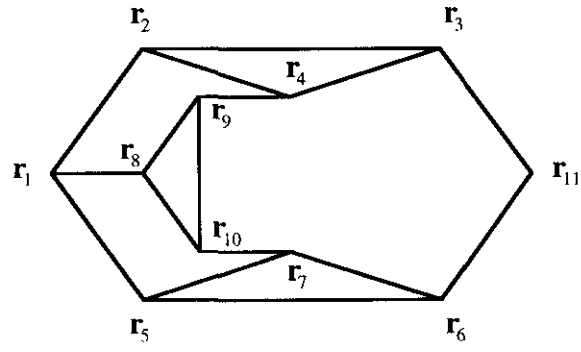


Fig. 2. 13. Implementación de B-11 en la que el ángulo $\mathbf{r}_1\hat{}\mathbf{r}_{11}$ es el mínimo posible:

$\mathbf{r}_1 = (1,\ 0,\ 0)$ $\quad$ $\mathbf{r}_5 = (0,\ 1,\ -1)$ $\quad$ $\mathbf{r}_9 = (1,\ 0,\ 1)$

$\mathbf{r}_2 = (0,\ 1,\ 1)$ $\quad$ $\mathbf{r}_6 = (-2,\ 1,\ 1)$ $\quad$ $\mathbf{r}_{10} = (1,\ 0,\ -1)$

$\mathbf{r}_3 = (2,\ -1,\ 1)$ $\quad$ $\mathbf{r}_7 = (1,\ 1,\ 1)$ $\quad$ $\mathbf{r}_{11} = (1,\ 2,\ 0)$

$\mathbf{r}_4 = (1,\ 1,\ -1)$ $\quad$ $\mathbf{r}_8 = (0,\ 1,\ 0)$

Todos estos vectores pertenecen a CK-31 (ver la Fig. 2. 14). En este caso particular $\mathbf{r}_2 \perp \mathbf{r}_5$. También pertenecen a CK-31 $\mathbf{r}_{12} = (0,\ 0,\ 1)$ y $\mathbf{r}_{13} = (2,\ -1,\ 0)$, que son los dos vectores que faltan para completar un conjunto de tipo B-13.

El alto grado de imbricación entre esos DPSs (KS-8's y B-11's) dentro de los CK, no hace fácil relacionar la no-coloreabilidad de éstos últimos a partir de las "predicciones" de DPSs que contienen; pero, de nuevo, se percibe el papel de los DPSs como componentes básicos dentro de los TNCSs.

Para terminar, y dado que CK-31 es el TNCS más económico conocido en dimensión 3[48], en la figura 2. 14 se presenta su diagrama de ortogonalidad. CK-31 contiene 71 parejas ortogonales (tantas como puntos negros y segmentos con círculos grises en ambos extremos) y 17 tríos ortogonales (tantos como segmentos en trazo grueso y segmentos conteniendo tres círculos grises).

[48] [Kernaghan 95] dice que CK-31 contiene (lo que en nuestra notación sería) un PNCS con 24 vectores, que también es el PNCS más económico en dimensión 3.

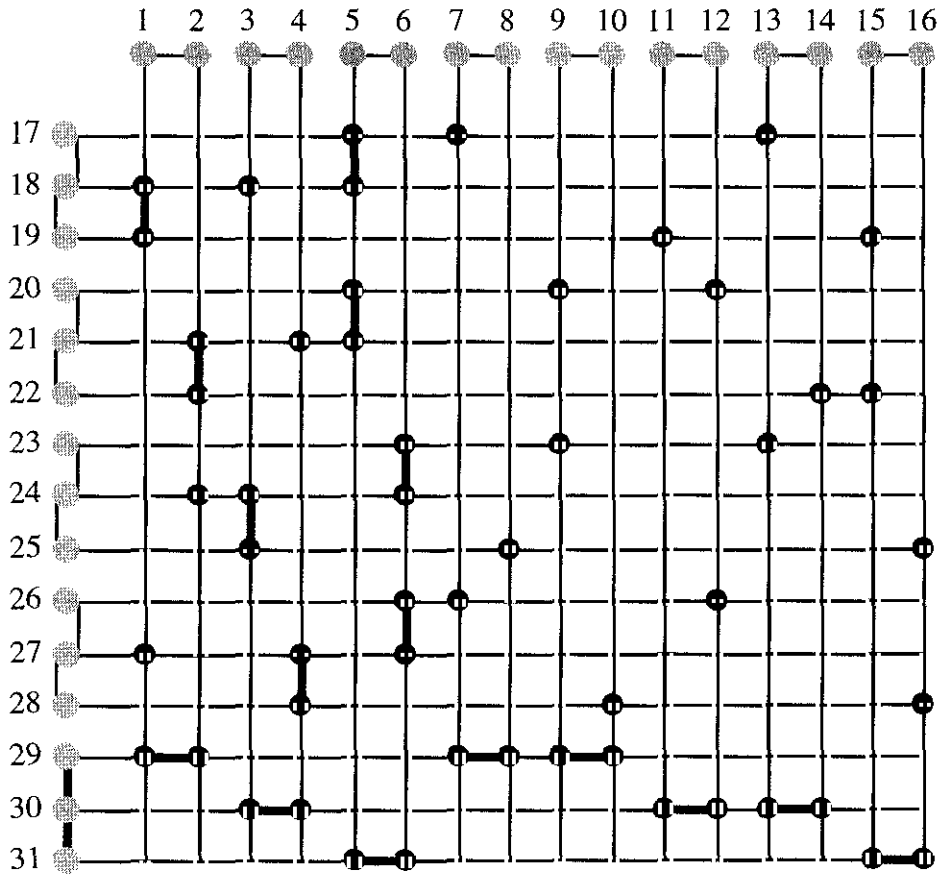


Fig. 2. 14. Diagrama de ortogonalidad correspondiente a CK-31.

1: (0, 1, –1)
2: (0, 1, 1)
3: (1, 0, –1)
4: (1, 0, 1)
5: (1, –1, 0)
6: (1, 1, 0)
7: (0, 2, 1)
8: (0, 1, –2)
9: (0, 2, –1)
10: (0, 1, 2)
11: (1, 0, 2)
12: (2, 0, –1)
13: (2, 0, 1)
14: (1, 0, –2)
15: (1, 2, 0)
16: (2, –1, 0)
17: (1, 1, –2)
18: (1, 1, 1)
19: (–2, 1, 1)
20: (1, 1, 2)
21: (1, 1, –1)
22: (2, –1, 1)
23: (–1, 1, 2)
24: (1, –1, 1)
25: (1, 2, 1)
26: (1, –1, 2)
27: (–1, 1, 1)
28: (1, 2, –1)
29: (1, 0, 0)
30: (0, 1, 0)
31: (0, 0, 1)

Entre esos 31 vectores hay 71 parejas ortogonales y 17 tríos ortogonales. Los vectores que faltan para formar CK-37 son:

32: (2, 1, 1)
33: (2, 1, 0)
34: (2, 1, –1)
35: (–1, 2, 1)
36: (1, –2, 0)
37: (1, –2, 1)

Si se eliminan de CK-37, por ejemplo, los vectores 7-10 se tiene CK-33.

2. 4. 2. Demostraciones aditivas en dimensión 4

a. Introducción

En las secciones siguientes estudiaremos dos conjuntos totalmente no-coloreables en dimensión 4 y sus subconjuntos.

El primero, en (b), fue descubierto por Roger Penrose, y a veces se refiere a él como el "dodecaedro mágico", y lo llamaremos *Q-40*[49], consta de 40 direcciones complejas en dimensión 4 y, en su forma original se usa en su construcción la representación de Majorana de los estados de espín de una partícula de espín 3/2 y la geometría del dodecaedro. Veremos también, (c) y (d) que Q-40 contiene subconjuntos críticos de 28 direcciones, algunos de los cuales, a los que llamaremos *Z-28*, fueron descubiertos por Jason Zimba.

El segundo conjunto totalmente no coloreable que trataremos en (e) fue descubierto por Asher Peres, y nos referiremos a él como el "teseracto cuántico" o también *P-24*. Obtendremos P-24 de una manera distinta a como se hizo originalmente (de la que nos ocuparemos en la Sec. 2. 6. 1); llegaremos a P-24 al considerar las direcciones "relevantes" de un hipercubo en dimensión 4 (un teseracto) análogas a direcciones "relevantes" de un cubo en dimensión 3 descritas en la sección 2. 4. 1. c. Veremos en (f) que P-24 contiene subconjuntos críticos de 20 vectores, que llamaremos *K-20*, descubiertos por Michael Kernaghan, y en (g) que también subconjuntos críticos de 18 vectores, que llamaremos *CEG-18*. Estos últimos son los conjuntos totalmente no-coloreables más "elementales" (más económicos) conocidos, aunque admiten una simplificación adicional que estudiaremos en (h). En el capítulo 4 estudiaremos la interpretación física de P-24 y de sus subconjuntos.

---

[49] En [Zimba-Penrose 93] se llama Q a este conjunto; se le da el nombre de "dodecaedro mágico" en [Penrose 93, 94 b]; como ya hemos usado la letra P para designar los TNCSs descubiertos por Peres, lo llamaremos Q-40.

El dodecaedro mágico y sus subconjuntos

b. Q-40: el "dodecaedro mágico"

El "dodecaedro mágico" ó Q-40 es un TNCS de 40 direcciones en dimensión 4 descubierto por Roger Penrose [Penrose 92, 93, 94 a, b][50] y posteriormente estudiado por Jason Zimba [Zimba 93], [Zimba-Penrose 93]. El método seguido para su construcción y la demostración de su no-coloreabilidad suponen una aproximación original al problema de obtener conjuntos no-coloreables y subrayan, una vez más, el papel que juegan las construcciones geométricas en estos problemas. Dada la complejidad de los argumentos originales, su explicación detallada requeriría más espacio del que se le puede dedicar en un trabajo de esta naturaleza; por ello nos limitaremos a presentar lo esencial, de forma que podamos comparar Q-40 con los conjuntos obtenidos en otras secciones. En relación con el esfuerzo e ingenio invertidos en esta demostración, la sencillez de otras pruebas, en especial la que veremos en la sección (g), resulta aun más llamativa.

Q-40 es un conjunto de 40 proposiciones en el espacio de Hilbert de dimensión 4 que representa los estados de espín de una partícula individual de espín 3/2. Toda la construcción de Q-40 parte de la observación de que el rayo que representa el estado propio de la componente de espín según el vector unitario $\hat{\mathbf{m}}$ con autovalor $+1/2$ ($\hbar := 1$), $|S_{\hat{\mathbf{m}}} = +1/2\rangle$, es ortogonal al rayo que representa un estado similar según el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, $|S_{\hat{\mathbf{n}}} = +1/2\rangle$, siempre que $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1/3$, es decir, si los vectores $\hat{\mathbf{m}}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ subtienden un ángulo $\alpha = \arccos(1/3)$. Equivalentemente diremos que las proposiciones correspondientes (los proyectores $\hat{P}_{\hat{\mathbf{m}}} = |S_{\hat{\mathbf{m}}} = +1/2\rangle\langle S_{\hat{\mathbf{m}}} = +1/2|$, $\hat{P}_{\hat{\mathbf{n}}} = |S_{\hat{\mathbf{n}}} = +1/2\rangle\langle S_{\hat{\mathbf{n}}} = +1/2|$) son compatibles (ortogonales) en ese caso[51]. En adelante hablaremos sólo de proposiciones (y no de proyectores, estados o rayos).

---

[50] [Penrose 92] es una conferencia que dio Penrose en el CERN (en honor a Bell) en 1991 (después de la conferencia de Copenhague en la que Penrose se interesó por el significado geométrico de las demostraciones de Peres; ver las notas 42 y 45); Emilio Santos (comunicación particular) recuerda una conferencia similar en Cesena, también en 1991 (conferencia que no se incluyó en los correspondientes "proceedings"). Quizá también se describen estos resultados en [Penrose 94 a], pero no he tenido acceso a esta referencia.

[51] En los trabajos de Penrose y Zimba todas las relaciones de ortogonalidad existentes entre los elementos de Q-40 se demuestran usando la representación de Majorana de los estados puros de espín de una partícula de espín 3/2. La representación de Majorana de un estado de espín de una partícula de espín 3/2 esencialmente reemplaza cada rayo tetradimensional por tres puntos sobre una esfera tridimensional de radio unidad. Sobre la representación de Majorana véase [Majorana 32], [Penrose-Rindler 84]. Sobre la traducción sobre la representación de Majorana de las relaciones de ortogonalidad entre estados de espín

En el siguiente paso se introduce el dodecaedro que da nombre a la construcción. Necesitaremos la siguiente definición:

Definición: Diremos que dos vértices *A* y *B* de un dodecaedro son *casi-adyacentes* si ambos son adyacentes a un tercero *C*. Nótese que dos vértices casi-adyacentes de un dodecaedro son vértices adyacentes de uno de los 5 cubos inscritos en el dodecaedro compartiendo 8 de sus 20 vértices; ver la figura 2. 15.

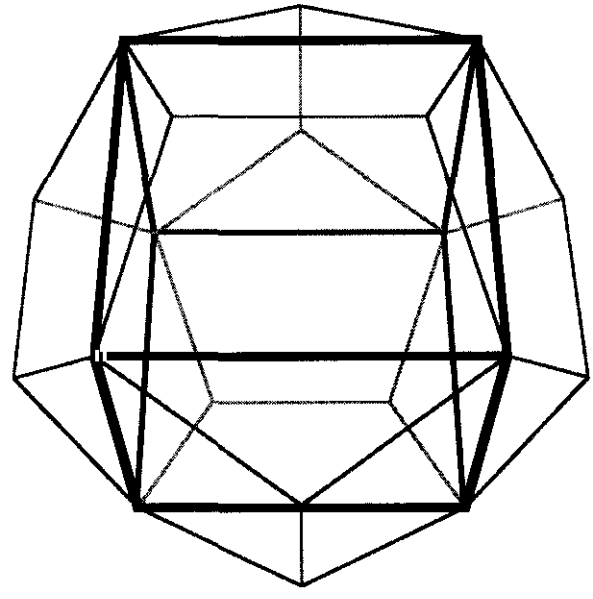


Fig. 2. 15. Uno de los cinco cubos inscritos en un dodecaedro compartiendo 8 de sus 20 vértices. Nótese que dos vértices adyacentes del cubo corresponden a dos vértices casi-adyacentes del dodecaedro.

La observación importante para relacionar la compatibilidad de proposiciones con la geometría del dodecaedro es que $\alpha = \arccos(1/3)$ es precisamente el ángulo que forman los vectores que unen el centro de un dodecaedro con dos de sus vértices casi-adyacentes.

$s \geq 1/2$ véase [Penrose 94 b], pp. 301-304 (pp. 321-325 de la versión en castellano). En particular, la demostración de que $|S_{\hat{\mathbf{m}}} = +1/2\rangle$ es ortogonal a $|S_{\hat{\mathbf{n}}} = +1/2\rangle$ si $\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1/3$, puede encontrarse en [Zimba-Penrose 93], pp. 700-702; y [Penrose 94 b], p. 304 (pp. 324-325 de la versión en castellano).

Definición: Llamaremos proposición *explícita* asociada al vértice U a una proposición del tipo: "la componente de espín según el vector que une el centro del dodecaedro con el vértice U tiene valor +1/2".

Podemos pues asociar una proposición *explícita* a cada uno de los 20 vértices de un dodecaedro. El siguiente paso en la construcción consiste en advertir es que las tres proposiciones explícitas asociadas a los tres vértices adyacentes a un vértice V, son mutuamente compatibles (ya que son mutuamente casi-adyacentes). Podemos pues, completar una tétrada de proposiciones mutuamente compatibles añadiendo a esas tres proposiciones explícitas una cuarta proposición implícita asociada al vértice V, definida de la manera siguiente:

Definición: Llamaremos proposición *implícitas* asociada al vértice V a una proposición del tipo: "las componentes de espín en *ninguna* de las tres direcciones que unen el centro del dodecaedro con los tres vértices adyacentes al vértice V tiene valor +1/2".

Q-40 es el conjunto formado por las 20 proposiciones explícitas y las 20 implícitas que se pueden asociar a los 20 vértices de un dodecaedro. Antes de completar las relaciones de compatibilidad entre proposiciones, necesitaremos la siguiente definición:

Definición: Diremos que dos vértices A y B de un dodecaedro son *casi-casi-adyacentes* si ocurre que: A es adyacente a C, B es adyacente a D, y C es adyacente a D. Nótese que dos vértices casi-casi-adyacentes de un dodecaedro son vértices adyacentes de uno de los 10 tetraedros inscritos en el dodecaedro compartiendo 4 de sus 20 vértices; ver la figura 2. 16.

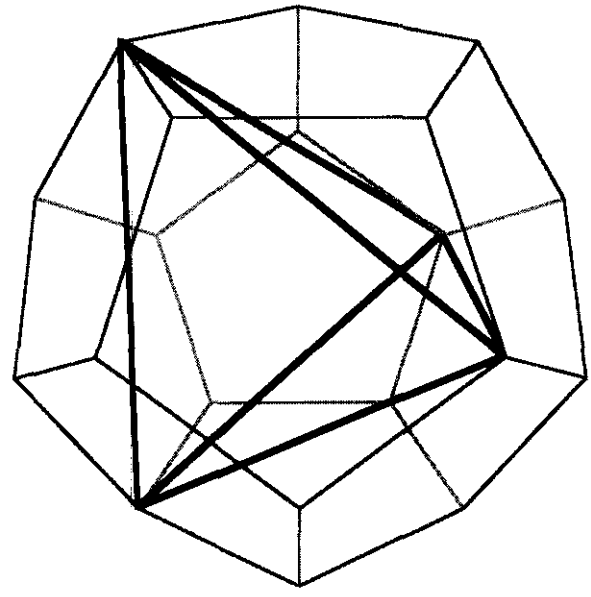


Fig. 2. 16. Uno de los 10 tetraedros inscritos en un dodecaedro compartiendo 4 de sus 20 vértices. Nótese que dos vértices adyacentes del tetraedro corresponden a dos vértices casi-casi-adyacentes del dodecaedro.

Se puede demostrar con ayuda de la representación de Majorana que cada proposición explícita asociada a uno de los vértices del dodecaedro es compatible con:

(1) la implícita asociada al mismo vértice[52],
(2) la explícita asociada al vértice antípoda[53],
(3) la implícita asociada al vértice antípoda[54],
(4) las 3 implícitas asociadas a sus 3 vértices adyacentes[55], y
(5) las 6 explícitas asociadas a sus 6 vértices casi-adyacentes[56];

y análogamente, que cada proposición implícita es compatible con:

---

[52] [Zimba 93]; [Zimba-Penrose 93], p. 709.

[53] [Penrose 92]; [Zimba 93]; [Zimba-Penrose 93], pp. 703-704; [Penrose 94 b], pp. 301-304 (pp. 321-325 de la versión en castellano).

[54] [Zimba 93]; [Zimba-Penrose 93], p. 709.

[55] [Penrose 92]; [Zimba 93]; [Zimba-Penrose 93], p. 704; [Penrose 94 b], pp. 301-304 (pp. 321-325 de la versión en castellano).

[56] [Penrose 92]; [Zimba 93]; [Zimba-Penrose 93], pp. 700-702; [Penrose 94 b], pp. 301-304 (pp. 321-325 de la versión en castellano).

(1') la explícita asociada al mismo vértice,

(2') la implícita asociada al vértice antípoda,

(3') la explícita asociada al vértice antípoda,

(4') las 3 explícitas asociadas a sus 3 vértices adyacentes, y

(6) las 6 implícitas asociadas a sus 6 vértices casi-casi-adyacentes[57].

Es decir, cada proposición es compatible con otras 12. Además es posible formar 40 tétradas diferentes de proposiciones mutuamente compatibles:

—20 formadas por una proposición implícita y las 3 explícitas asociadas a sus 3 vértices adyacentes.

—10 formadas por las proposiciones explícita e implícita asociadas a un mismo vértice y las proposiciones explícita e implícita asociadas al vértice antípoda.

—10 formadas por las 4 proposiciones implícitas asociadas a 4 vértices mutuamente casi-casi-adyacentes (una por cada tetraedro inscrito en el dodecaedro)[58].

[57] [Zimba-Penrose 93], p. 709.

[58] Los 10 tetraedros inscritos en el dodecaedro son, de acuerdo con la nomenclatura de la figura 2. 17, los de vértices AC*IJ*, AD*G*H, BE*H*I, BD*F*J, CE*FG*, y los 5 cuyos vértices son antípodas de los 5 anteriores.

Por motivos de utilidad posterior, nombremos los 20 vértices de un dodecaedro de acuerdo al siguiente criterio: Sean A, B, C, D, E los vértices de una de sus caras pentagonales, descritos cíclicamente, y sean F, G, H, I, J, los vértices adyacentes a cada uno de ellos. Sean A*, ..., J* los vértices antípodas respectivos; ver la figura 2. 17.

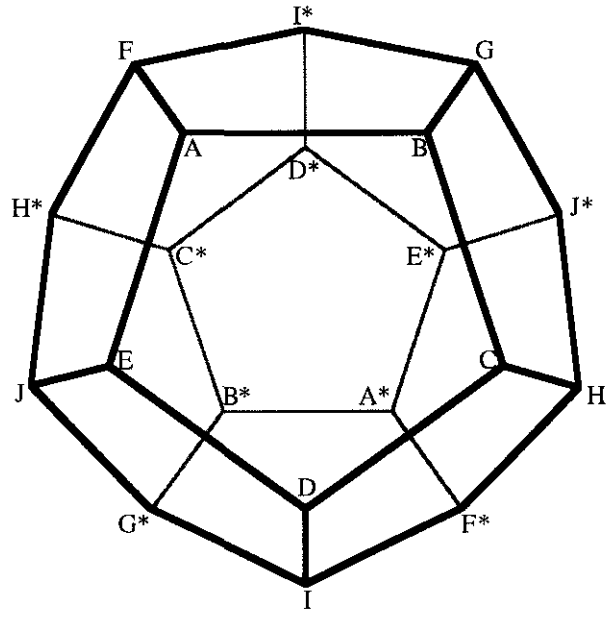


Fig. 2. 17. Nomenclatura para los 20 vértices de un dodecaedro: A* representa la el vértice antípoda de A, y análogamente para las demás letras.

Habiendo nombrado los vértices del dodecaedro de la forma anterior podemos denotar las 40 proposiciones de Q-40 de la manera siguiente: "A" representa la proposición explícita asociada al vértice A, "A*" la proposición explícita asociada al vértice A*, "a" la proposición implícita asociada al vértice A, y "a*" la proposición implícita asociada al vértice A*. Con esa nomenclatura y las reglas antes enumeradas de compatibilidad entre proposiciones, en la figura 2. 18 se recogen explícitamente todas las relaciones de compatibilidad entre las proposiciones de Q-40.

Para demostrar la no-coloreabilidad de Q-40 sólo son necesarias las relaciones de compatibilidad que antes hemos llamado 2, 4 (o sus recíprocas 2' y 4') y 5. Esta demostración puede encontrarse en [Penrose 92]; [Zimba 93]; [Zimba-Penrose 93], pp. 707-708; [Penrose 94 b], pp. 300-301 (pp. 320-321 de la versión en castellano).

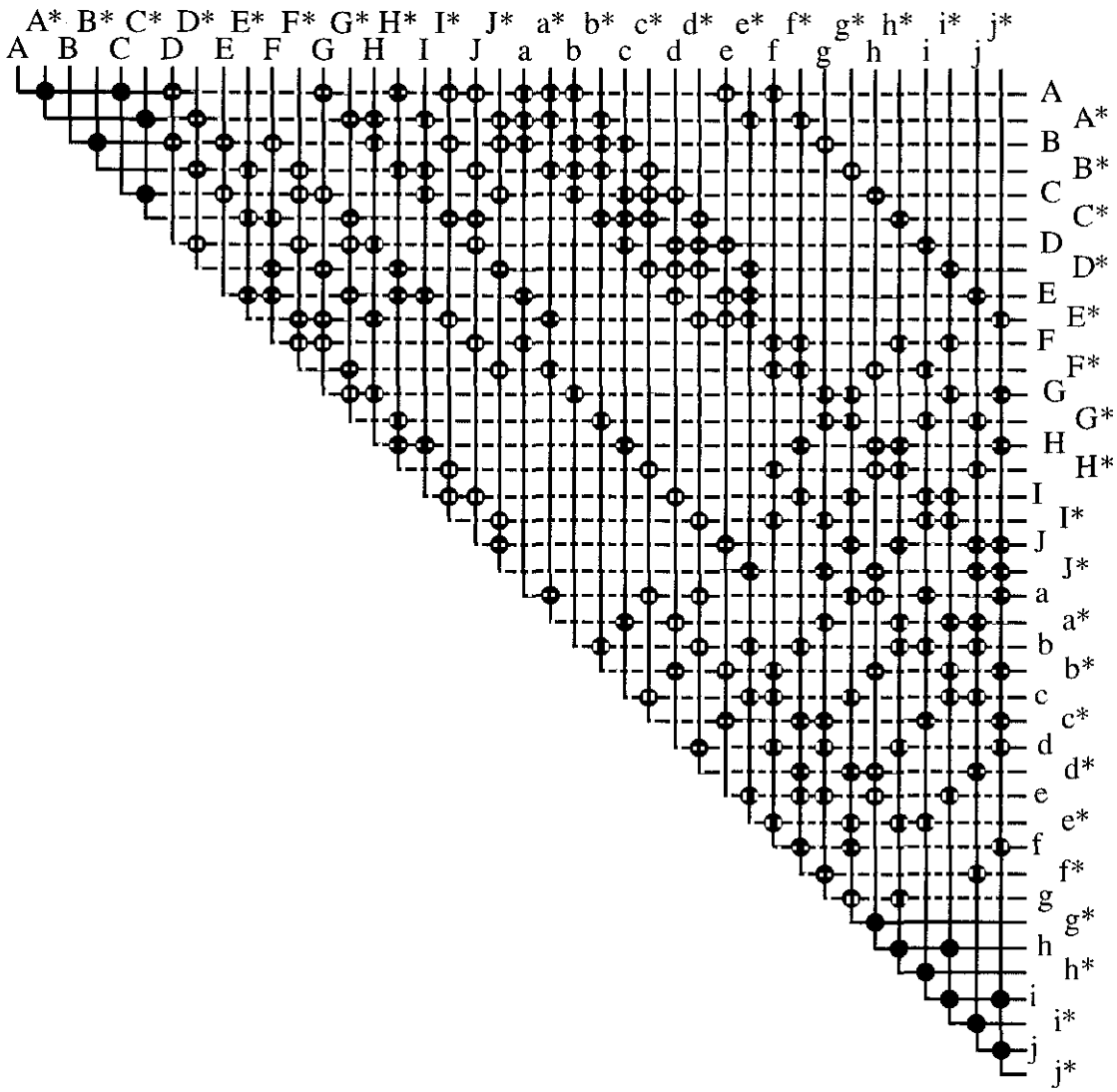


Fig. 2. 18. Relaciones de ortogonalidad completas entre las 40 proposiciones de Q-40[59]. Un punto negro en la confluencia de las rectas que salen de dos proposiciones quiere decir que esas proposiciones son ortogonales. La notación para las proposiciones es la descrita en el texto: mayúsculas para proposiciones explícitas y minúsculas para proposiciones implícitas. La notación para los vértices es la descrita en la figura 2. 17.

[59] Como se señala en [Zimba-Penrose 93], p. 710, una de las propiedades curiosas de Q-40 es que dos tétradas de proposiciones mutuamente compatibles comparten a lo sumo una de las proposiciones. Más adelante veremos que en P-24 hay tétradas que comparten dos proposiciones (luego P-24 no está contenido en Q-40). En la sección 2. 4. 3. g volveremos sobre esta forma de expresar las relaciones de compatibilidad entre proposiciones (o, equivalentemente, de ortogonalidad entre direcciones), ligeramente diferente de los diagramas de KS y los diagramas de ortogonalidad empleados hasta ahora.

Una última observación: El conjunto Q-40 contiene direcciones con componentes complejas por la propia forma de construirlo a partir de estados de espín (expresados en la base habitual [Schiff 68], p. 203) propios con autovalor +1/2 según vectores apuntando a los vértices de un dodecaedro. En principio podría pensarse que se podrían implementar las mismas relaciones de ortogonalidad con direcciones tetradimensionales de componentes reales pero esto no es así[60].

c. Z-28

Estudiando las relaciones de ortogonalidad completas de Q-40, Zimba [Zimba 93], [Zimba-Penrose 93] descubrió que existen subconjuntos no-coloreables de Q-40 de 28 elementos. Específicamente los subconjuntos críticos que descubrió Zimba son los que contiene las 20 proposiciones explícitas y 8 proposiciones implícitas asociadas a los vértices uno de los cinco cubos inscritos en el dodecaedro[61]. Nos referiremos genéricamente a ellos por Z-28. El argumento de Zimba para sospechar que Q-40 contiene subconjuntos críticos no-coloreables puede encontrarse en [Zimba 93] y [Zimba-Penrose 93], pp. 710-715. La demostración de que los Z-28 son no-coloreables puede encontrarse en [Zimba 93] y [Zimba-Penrose 93], pp. 715-716.

d. Otros subconjuntos de Q-40 de 28 elementos

Considerando todas las relaciones de ortogonalidad de Q-40 hemos comprobado por ordenador que Q-40 es no-coloreable pero no-crítico y que no existen subconjuntos no-coloreables de Q-40 con menos de 28 elementos. Sin embargo, hemos encontrado muchos más subconjuntos con 28 elementos de los que señala Zimba; de hecho, hemos encontrado subconjuntos no-coloreables con cualquiera de las combinaciones posibles en número de proposiciones explícitas e implícitas que sumen 28: además de los 5 conjuntos Z-28 (con 20 proposiciones explícitas y 8 implícitas correspondientes a los vértices de un cubo), hemos hallado conjuntos con 19 explícitas y 9 implícitas, 18 explícitas y 10 implícitas, etc. En particular, hay 5 conjuntos que son exactamente el negativo de los descubertos por Zimba: los nuestros tienen 8 proposiciones explícitas y

---

[60] [Zimba-Penrose 93], p. 698: "[Q-40] is the first that has been shown [Penrose 92] to be essentially *complex*—that is, it cannot be expressed solely in terms of vectors with real components (...) we remark that Penrose's set of 33 rays in three dimensions [Penrose 92] is also complex, whereas the other configurations listed [P-33, P-24, CK-31] can all be given in terms of real vectors."

[61] Con la notación de la figura 2. 17, los 5 cubos son los de vértices ACIJ (y sus antípodas), ADGH (id.), BDFJ (id.), BEHI (id.), CEFG (id.)

20 implícitas; en cada uno de ellos las 8 proposiciones explícitas están asociadas a los vértices de uno de los cubos inscritos en el dodecaedro.

El teseracto cuántico y sus subconjuntos

e. P-24: el "teseracto cuántico"

Llamaremos P-24 a cualquier conjunto de 24 direcciones que tenga las mismas relaciones de ortogonalidad que el conjunto de 24 direcciones cuyos cosenos directores al cuadrado son una de las combinaciones $0+0+0+1=0+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ y todas sus permutaciones. P-24 es un TNCS, y fue obtenido originalmente por Peres de un modo distinto al que sugeriremos a continuación (sobre cómo lo hizo Peres, ver la nota 42 y la Sec. 2. 6. 1). Aquí, nuestra forma de llegar a P-24 es la siguiente: Supongamos que estamos buscando un TNCS en dimensión 4; en dimensión 3 vimos que las 13 direcciones "relevantes" de un cubo (que contenían 6 DPSs del tipo KS-8) jugaban un papel fundamental en la construcción de P-33 (que podía interpretarse como las direcciones relevantes de tres cubos rotados) y de los conjuntos CK-31; así que empezaremos por considerar el análogo en dimensión 4 de ese conjunto de direcciones.

Recordemos primero que esas direcciones eran:

(a) Las 3 direcciones que se obtienen al unir el centro del cubo —que suponíamos en el punto (0, 0, 0)— con los centros de las 3 caras (figura 2. 19, izquierda) [si los ejes son perpendiculares a las caras, esas direcciones se pueden representar por vectores con *una* componente 1 y dos 0's: (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1)].

(b) Las 6 direcciones que se obtienen al unir el centro del cubo con los centros de las 12 aristas (figura 2. 19, centro) [direcciones que se pueden representar por vectores con *dos* 1's (+1's y/o –1's) y un 0: (1, 1, 0), (1, –1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, –1), (0, 1, 1), (0, 1, –1)].

(c) Las 4 direcciones que se obtienen al unir el centro del cubo con los 8 vértices (figura 2. 19, derecha) [direcciones que se pueden representar por vectores con *todo* 1's (+1's y/o –1's): (1, 1, 1), (1, 1, –1), (1, –1, 1), (–1, 1, 1)].

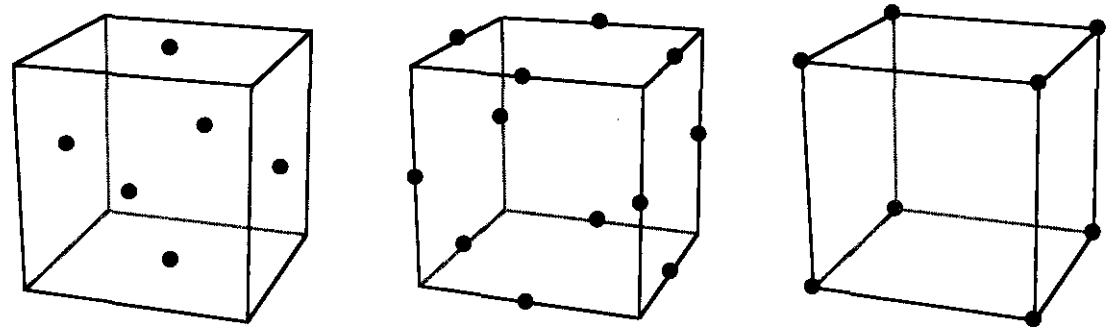


Fig. 2. 19. (a) Centros de cara (izquierda), (b) centros de arista (centro), y (c) vértices (derecha) de un cubo.

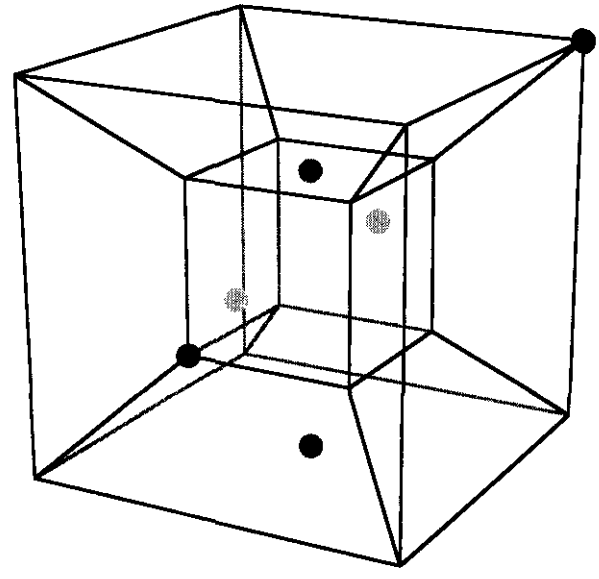


Fig. 2. 20. Proyección tridimensional de un teseracto. Los puntos en gris más claro representan centros de hipercaras opuestas, los puntos en gris más oscuro representan centros de caras opuestas, y los puntos negros representan vértices opuestos.

El análogo tetradimensional del cubo tridimensional es lo que se llama un *teseracto*[62]; ver la figura 2. 20.

[62] Un teseracto o hipercubo tetradimensional es un *politopo* (una figura geométrica limitada por porciones de lineas, planos o hiperplanos; es decir, la generalización *n*-dimensional del concepto de *polígono* bidimensional y de *poliedro* tridimensional) de 8 hipercaras (hexaedros, esto es, cubos

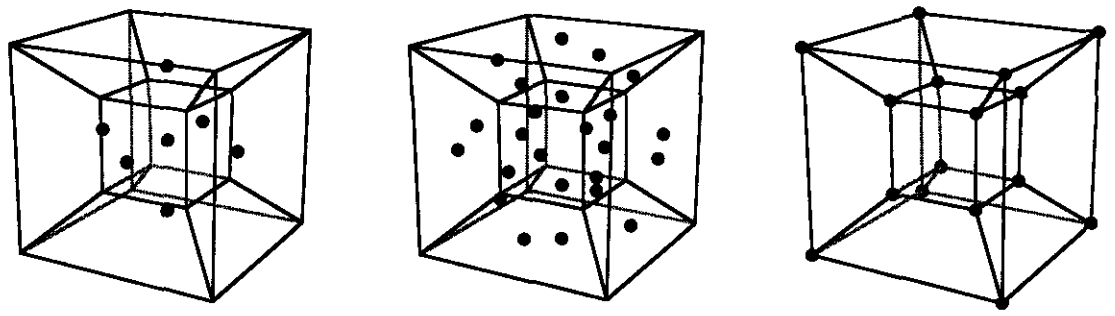


Fig. 2. 21. (a) Centros de hipercara (izquierda), (b) centros de cara (centro), y (c) vértices (derecha) de un teseracto.

Siguiendo con la analogía, nos fijaremos en las siguientes 24 direcciones "relevantes" del teseracto:

(a) las 4 direcciones que se obtienen al unir el centro del teseracto —que supondremos en el punto (0, 0, 0, 0)— con los centros de las 8 hipercaras (figura 2. 21, izquierda) [eligiendo adecuadamente los ejes, estas direcciones se pueden representar por vectores con *una* componente 1 y las demás cero: (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) y (0, 0, 0, 1)],

(b) las 12 direcciones que se obtienen al unir el centro del teseracto con los centros de las 24 caras (figura 2. 21, centro) [direcciones que se pueden representar por vectores con *dos* 1's (+1's y/o –1's) y dos 0's: (1, 1, 0, 0), (1, –1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, –1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, –1, 0), (0, 1, 0, –1), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, –1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, –1,0)],

---

tridimensionales), 24 caras (cuadrados bidimensionales), 32 aristas y 16 vértices; ver [Manning 14], pp. 239-241, 290-291, [Sommerville 29], pp. 170-171, [Coxeter 48], p. 123. Se puede visualizar proyectándolo en el espacio tridimensional de cuatro formas, descritas por primera vez en [Hall 93], según se de prioridad a vértices, aristas, caras o hipercaras. En la figura 2. 20 se presenta la proyección "hipercara primero" [Coxeter 48], p. 243, que es la más habitual, [Sommerville 29], p. 178; en ella, dos de los 8 cubos son los cubos externo e interno de la figura, y los otros 6 aparecen en perspectiva como troncos de pirámide; los 24 cuadrados aparecen en la proyección como 12 cuadrados (en perspectiva) y 12 trapecios. Un ejemplo de un teseracto proyectado tridimensionalmente es (esencialmente) el monumento a la Constitución que hay frente al Museo de Ciencias Naturales en Madrid. Para hacerse una idea mejor de lo que realmente "es" un teseracto, en [Dewdney 86] se describe un programa de ordenador para visualizar (mediante proyecciones tridimensionales que a su vez se representan en el plano mediante las leyes de la perspectiva) las rotaciones (en un espacio tetradimensional) de un teseracto.

(c) las 8 direcciones que se obtienen al unir el centro del teseracto con los 16 *vértices* (figura 2. 21, derecha) [direcciones que se pueden representar por vectores con *todo* 1's (+1's y/o −1's): (1, 1, 1, 1), (1, −1, 1, −1), (1, 1, −1, −1), (1, −1, −1, 1), (1, 1, 1, −1), (1, 1, −1, 1), (1, −1, 1, 1), (−1, 1, 1, 1)][63].

Vamos a probar que P-24 es efectivamente no-coloreable. En las secciones (f) y (g) veremos que P-24 contiene sendos TNCS, lo cual nos asegura que P-24 es un TNCS, sin embargo, también puede hacerse otra demostración usando un argumento de simetría análogo al descrito para P-33. El argumento se basa en que elección explícita de direcciones que hemos hecho para P-24 es invariante bajo el intercambio de los ejes cartesianos y bajo los cambios de signo de cada eje; ello permite asignar arbitrariamente, sin pérdida de generalidad, el valor 1 a una de las cuatro direcciones mutuamente ortogonales de tipo (a), a otra dirección de tipo (b) no ortogonal a la anterior, y a una tercera de tipo (c) no ortogonal a la anterior.

Tétrada ortogonal				Otros vectores ortogonales al primero					
1000	0100	0010	0001	0011	001–1	0101	010–1	0110	01–10
1100	1–100	*0011*	*001–1*	1–11–1	1–1–11	1–111	–1111		
1111	11–1–1	*1–11–1*	*1–1–11*	10–10	100–1				
1010	*10–10*	*0101*	*010–1*	11–11					
111–1	*11–11*	*1–111*	*–1111*	1001					
0110	*01–10*	*100–1*	*1001*						

Tabla 2. 2. Demostración de que P-24 es un TNCS. La contradicción surge en la última linea (en la que los cuatro vectores ortogonales han aparecido ya con valor cero).

[63] En [Peres 93], p. 201, se dice que "the 24 rays are orthogonal to the faces of the regular polytope known as the 24-cell"; esto no es correcto; lo que sucede es, [Penrose 92], p. 11, que "the 12 (b) points - together with their reflections - constitute the 24 vertices of a regular polytope known as a "24-cell", made up of 24 regular octahedra, 8 of these octahedra coming together at each vertex (see [Coxeter 48]). The centres of these octahedra form an exactly similar configuration, these points being given by the (a) points, and by the (c) points at half distance out from the origin (and by the reflections of all these points in the origin)." El 24-celdas tiene 24 hipercaras (octaedros, o bipirámides, de dos tipos), 96 caras (triángulos equiláteros), 96 aristas y 24 vértices; véase [Manning 14], pp. 295-297, [Sommerville 29], pp. 171-172, [Coxeter 48], pp. 148-149 y (cuatro proyecciones distintas en) p. 243. Para ver la relación entre la interpretación geométrica de P-24 que propone Penrose (con el 24-celdas) y la nuestra (con el teseracto), téngase en cuenta que los 8 centros de hipercaras y los 16 vértices del teseracto son vértices del 24-celdas, [Sommerville 29], p. 179.

La tabla 2. 2 prueba la no-coloreabilidad de P-24 para una asignación arbitraria de partida. Análogamente al caso de la demostración para P-33, en la tabla 2. 1, los cuatro primeros vectores de cada fila forman una tétrada ortogonal; los siguientes vectores son ortogonales al primero de la correspondiente fila (al que se asigna el valor 1), y las cursivas indican que el vector ya ha aparecido antes en la tabla. Se elige asignar el valor 1 al primer vector de las tres primeras filas. Por tanto, los restantes vectores de las tres primeras filas han de tener el valor 0. Las tétradas ortogonales de la cuarta y quinta filas están formadas cada una de ellas por tres vectores que ya han aparecido antes en la tabla y a los que se ha asignado el valor 0. Consecuentemente hay que asignar el valor 1 al cuarto de los vectores (el que ocupa el primer lugar en las filas cuarta y quinta). La contradicción surge entre la primera linea (en la que se ha elegido que 0110 tenga el valor 0) y la última (en la que 0110 ha de tener valor 1)[64].

[64] Tanto en [Peres 91], como en [Peres 93], p. 201, se afirma que la contradicción puede evitarse si se elimina una sola de las 24 direcciones, es decir se dice que el conjunto de 24 es crítico. Eso no es correcto, como se verá a continuación. En la lista de erratas sobre su libro que Peres envía (20 de marzo de 1996), dice: "Table 7-2 p. 201 is now superseded: it is possible to find "uncolorable" sets with only 20 rays: see [Kernaghan 94], or even 18 rays: see [Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 a]. En la reimpresión de 1995 de [Peres 93] ya está corregido este punto y, en la p. 201, hay una nueva tabla con los 20 rayos de [Kernaghan 94].

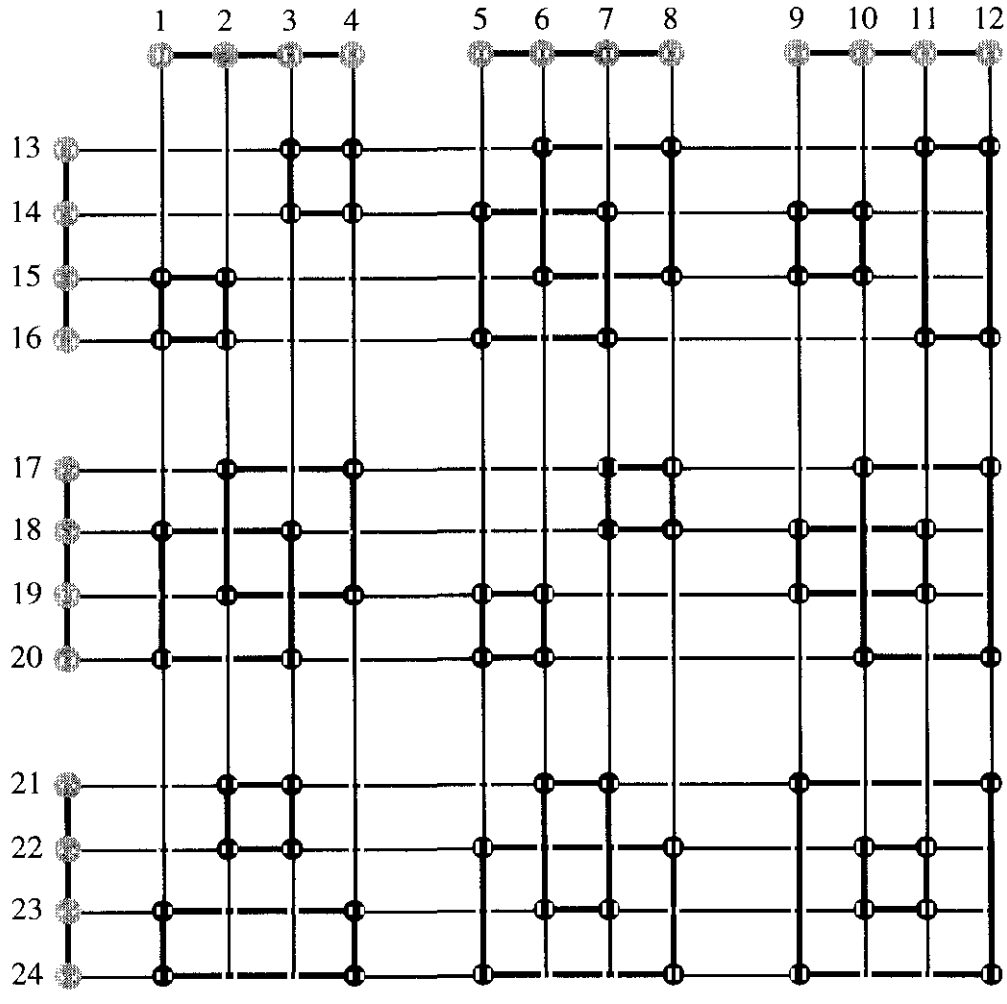


Fig. 2. 22. Diagrama de ortogonalidad correspondiente a P-24.

1: (1, 1, 0, 0)
2: (1, –1, 0, 0)
3: (0, 0, 1, 1)
4: (0, 0, 1, –1)
5: (1, 0, 1, 0)
6: (0, 1, 0, 1)
7: (1, 0, –1, 0)
8: (0, 1, 0, –1)
9: (1, 0, 0, 1)
10: (1, 0, 0, –1)
11: (0, 1, 1, 0)
12: (0, 1, –1, 0)
13: (1, 0, 0, 0)
14: (0, 1, 0, 0)
15: (0, 0, 1, 0)
16: (0, 0, 0, 1)
17: (1, 1, 1, 1)
18: (1, –1, 1, –1)
19: (1, 1, –1, –1)
20: (1, –1, –1, 1)
21: (1, 1, 1, –1)
22: (1, 1, –1, 1)
23: (1, –1, 1, 1)
24: (–1, 1, 1, 1)

Entre esos 24 vectores hay 108 parejas ortogonales (tantas como puntos negros y segmentos con círculos grises en ambos extremos) y 24 tétradas ortogonales (tantas como rectángulos en trazo grueso y segmentos conteniendo cuatro círculos grises). Cada vector es ortogonal a otros 9 vectores del conjunto.

f. K-20

El TNCS de 24 direcciones de Peres no es crítico, como demuestra el hecho de que existen subconjuntos que son también TNCSs; el primero en la literatura es un subconjunto de 20 vectores debido a Kernaghan [Kernaghan 94]. Este subconjunto, al que llamaremos K-20, se obtiene eliminando de P-24:

(d) tres direcciones que apunten a los centros de tres caras de una misma hipercara, por ejemplo, (1, 1, 0, 0), (1, 0, –1, 0), (1, 0, 0, 1),

(e) y la dirección que apunta al vértice de esa misma hipercara por el que no pasa ninguna de las tres caras anteriores, esto es, (1, –1, 1, –1).

El conjunto resultante tiene 20 vectores que se pueden combinar en 11 tétradas ortogonales que dan lugar a las siguientes 11 ecuaciones (las cursivas indican que el correspondiente vector ha aparecido antes en otra ecuación):

$$v(1,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 0,\ 0,\ 1)=1, \quad (2.\ 56)$$
$$v(1,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1)+v(0,\ 0,\ 1,\ -1)=1, \quad (2.\ 57)$$
$$v(1,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 1)+v(0,\ 1,\ 0,\ -1)=1, \quad (2.\ 58)$$
$$v(1,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 0,\ 1)+v(0,\ 1,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ -1,\ 0)=1, \quad (2.\ 59)$$
$$v(-1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ -1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 1,\ -1)=1, \quad (2.\ 60)$$
$$v(-1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ -1)=1, \quad (2.\ 61)$$
$$v(1,\ -1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(0,\ 1,\ 1,\ 0)+v(1,\ 0,\ 0,\ -1)=1, \quad (2.\ 62)$$
$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 1,\ -1)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0)=1, \quad (2.\ 63)$$
$$v(0,\ 1,\ -1,\ 0)+v(1,\ 0,\ 0,\ -1)+v(1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ -1,\ -1,\ 1)=1, \quad (2.\ 64)$$
$$v(0,\ 0,\ 1,\ -1)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0)+v(1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 1,\ -1,\ -1)=1, \quad (2.\ 65)$$
$$v(1,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 1)+v(1,\ 1,\ -1,\ -1)+v(1,\ -1,\ -1,\ 1)=1. \quad (2.\ 66)$$

La demostración de que es un TNCS es inmediata: la suma de los miembros de la derecha de (2. 56)-(2. 66) es *impar* (en concreto 11), mientras que la suma de los miembros de la izquierda es necesariamente *par*, porque cada vector aparece dos o cuatro veces.

g. CEG-18

El hecho de que K-20 (subconjunto de P-24) sea crítico (cosa que se puede comprobar por ordenador) podría inducir a la creencia de que no existen subconjuntos de P-24 con menos de 20 vectores. Falso: sí los hay. De hecho, las situación es la siguiente: P-24 tiene subconjuntos no coloreables de 20 vectores: 96 de ellos son

críticos (uno de ellos es el de Kernaghan) y 240 son no-críticos. Éstos últimos contienen 96 subconjuntos no-críticos de 19 vectores que a su vez contienen 16 subconjuntos críticos de *18* vectores, [Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 a][65].

Consideremos uno de estos conjuntos. Los 18 vectores se pueden combinar en 9 tétradas ortogonales que dan lugar a las siguientes ecuaciones (las cursivas indican, de nuevo, que el correspondiente vector ha aparecido antes en otra ecuación):

$$v(0,\ 0,\ 0,\ 1)+v(0,\ 0,\ 1,\ 0)+v(1,\ 1,\ 0,\ 0)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0)=1, \quad (2.\ 67)$$
$$v(0,\ 0,\ 0,\ 1)+v(0,\ 1,\ 0,\ 0)+v(1,\ 0,\ 1,\ 0)+v(1,\ 0,\ -1,\ 0)=1, \quad (2.\ 68)$$
$$v(1,\ -1,\ 1,\ -1)+v(1,\ -1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1)=1, \quad (2.\ 69)$$
$$v(1,\ -1,\ 1,\ -1)+v(1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 0,\ -1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ -1)=1, \quad (2.\ 70)$$
$$v(0,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 0)+v(1,\ 0,\ 0,\ 1)+v(1,\ 0,\ 0,\ -1)=1, \quad (2.\ 71)$$
$$v(1,\ -1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 0,\ 0,\ -1)+v(0,\ 1,\ -1,\ 0)=1, \quad (2.\ 72)$$
$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 1,\ -1)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1)=1, \quad (2.\ 73)$$
$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(-1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ -1)=1, \quad (2.\ 74)$$
$$v(1,\ 1,\ 1,\ -1)+v(-1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 0,\ 0,\ 1)+v(0,\ 1,\ -1,\ 0)=1. \quad (2.\ 75)$$

La demostración de que es un TNCS es inmediata: la suma de los miembros de la derecha de (2. 67)-(2. 75) es *impar* (es 9), mientras que la suma de los miembros de la izquierda es necesariamente *par*, porque cada vector aparece dos veces.

[65] Geométricamente, estos conjuntos, a los que llamaremos CEG-18, son subconjuntos de las 24 direcciones relevantes del teseracto (ver Fig. 2. 21). Se obtienen eliminando de P-24 una dirección de tipo (a), tres direcciones de tipo (b), y dos direcciones de tipo (c) tal y como se hace en la Fig. 2. a.

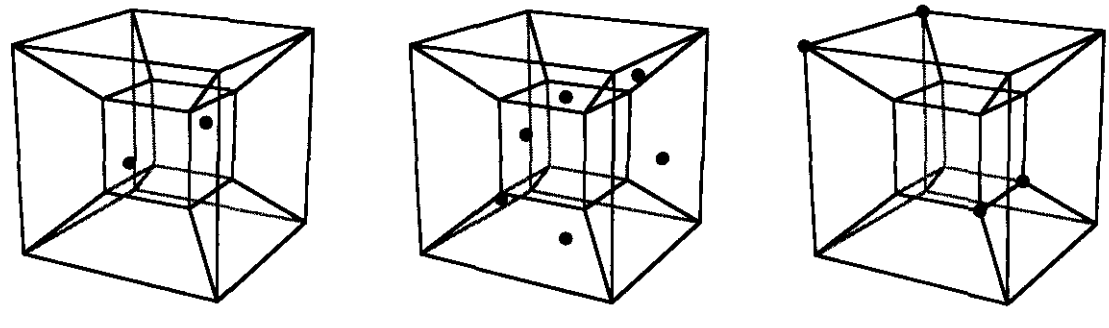


Fig. 2. a. Puntos relevantes del teseracto eliminados de P-24 para obtener CEG-18. Izda.: 2 puntos [una dirección] de tipo (a), centro: 6 puntos [3] de tipo (b), dcha.: 4 puntos [2] de tipo (c).

No es difícil ver que, por simetría, una eliminación como la de la Fig. 2. a se puede hacer de 16 maneras diferentes.

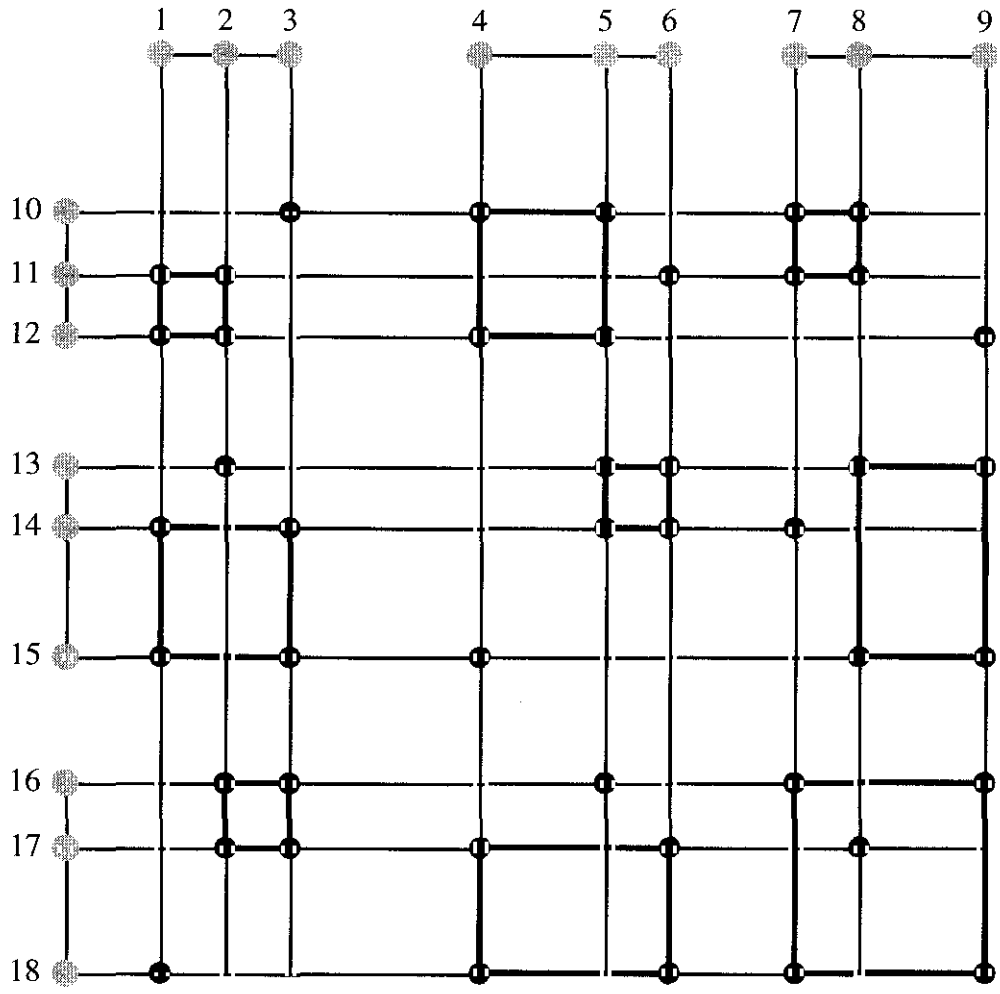


Fig. 2. 23. Diagrama de ortogonalidad correspondiente a CEG-18.

1: (1, 1, 0, 0)
2: (1, −1, 0, 0)
3: (0, 0, 1, 1)
4: (1, 0, 1, 0)
5: (1, 0, −1, 0)
6: (0, 1, 0, −1)
7: (1, 0, 0, 1)
8: (1, 0, 0, −1)
9: (0, 1, −1, 0)
10: (0, 1, 0, 0)
11: (0, 0, 1, 0)
12: (0, 0, 0, 1)
13: (1, 1, 1, 1)
14: (1, −1, 1, −1)
15: (1, −1, −1, 1)
16: (1, 1, 1, −1)
17: (1, 1, −1, 1)
18: (−1, 1, 1, 1)

Entre esos 18 vectores hay 63 parejas ortogonales (tantas como puntos negros y segmentos con círculos grises en ambos extremos) y 9 tétradas ortogonales (tantas como rectángulos en trazo grueso). Cada vector es ortogonal a otros 7 vectores en el conjunto.

Hasta la fecha no se conoce ninguna demostración más económica (con menos direcciones) del teorema de BKS que ésta[66].

h. La simplificación sugerida por Clifton

Rob Clifton[67] ha sugerido una modificación de las "reglas del juego" que permite reducir el número de direcciones implicadas en las demostraciones del teorema de BKS. Hay que hacer énfasis en que la propuesta de Clifton se basa en nuevas reglas y, por tanto, es una nueva versión de demostración y no es comparable a las anteriores. En particular, vamos a ver cómo la idea de Clifton permite una demostración del teorema de BKS con 14 de los 18 vectores de CEG-18. Los resultados de esta sección pertenecen a [Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 b].

---

[66] Esta sencilla demostración (obtenida el 22 de noviembre de 1995) ha merecido varias felicitaciones, por ejemplo: Lucien Hardy, 6 de febrero de 1996: "I am particularly impressed with the 18 vector proof of Bell-KS. Have you sent copies to Peres, Mermin and Clifton?"; A. Peres, 14 de febrero de 1996: "I checked your 18-vector proof, and I am very much impressed by it. I wonder why Michael Kernaghan, who did a computer search starting from "my" 24 vectors, missed that set of 18"; A. Peres, en otro mensaje el 14 de febrero: "I sent the list of 18 vectors to Michael Kernaghan, and he asked me to forward to you his warmest congratulations"; Rob Clifton, 19 de febrero de 1996: "... congratulations on finding your 18 ray set in 4D — it seems to have eluded everyone but yourselves!"; M. Kernaghan, 20 de febrero de 1996: "Because of time constraints (to finish my Ph.D.!) I did not get a chance to check all ways of removing vectors from Peres 24, I could only check that there were no ways to reduce the 20 that I had found. I am glad that you were able to do this". M. Kernaghan, 21 de febrero de 1996, "Your contribution should be of lasting value." Jeffrey Bub, 21 de febrero de 1996: "I am writing a book on foundations of quantum mechanics, to be published by Cambridge later this year, and would like to include a reference to your paper." Quizá este conjunto tenga además alguna otra utilidad; M. Kernaghan, 20 de febrero: "The (...) purpose was to find a small enough set so that I could use it easily for working out logical relations among quantum propositions; and this is what I am doing now (...) for development of quantum computer systems [una de las direcciones de Kernaghan es: Pacific Quantum Systems, pqs@mars.ark.com, http://mars.ark.com/~pqs]. The logical relations of your 18 are very beautiful, given the strict parity of the vectors (each occurs twice, etc.)"

[67] Comunicación particular de Clifton del 19 de febrero de 1996. Aparentemente, Clifton ya había sugerido esta idea antes, posiblemente a raíz de la publicación del conjunto con 20 vectores de Kernaghan [Kernaghan 94]; así se desprende de una comunicación de Peres del 20 de febrero: "I know of Rob Clifton quasi-KS proofs with fewer vectors but more complicated rules. We were already with fewer than 20 vectors when I met him and Michael Kernaghan in 1994. According to my personal taste, if the rules are too complicated, the result is not interesting". La sugerencia de Clifton está implícita en la distinción que se hace en [Fine-Teller 78], p. 634, entre "*Sum rule:* $v\left(\sum A_i\right) = \sum v(A_i)$, for commuting A_i", y "*Finite sum rule:* $v(A+B) = v(A) + v(B)$, for commuting A and B"; sobre la "regla de la suma" ver también [Redhead 81, 87].

El teorema de BKS, recordémoslo, subraya la imposibilidad de las teorías de variables ocultas que atribuyan respuestas definidas $v(\mathbf{u}_i)$ a las proposiciones $P_{\mathbf{u}_i}$ representadas por los proyectores $|\mathbf{u}_i\rangle\langle\mathbf{u}_i|$ satisfaciendo los siguientes requisitos:

(a) *En un sistema individual cada proposición $P_{\mathbf{u}_i}$ tiene un valor único, 0 ("no") o 1 ("sí"), que es independiente de cualesquiera otros observables compatibles que se consideren conjuntamente (no-contextualidad).*

(b) *Para cada conjunto de proyectores conmutativos de rango 1 cuya suma es la matriz identidad (en el espacio de Hilbert n-dimensional de los estados del sistema), el valor de una y sólo una de las correspondientes proposiciones es 1, y los valores de las restantes $n-1$ proposiciones son 0.*

Estas son las "reglas de juego" habituales para determinar si un conjunto es coloreable o no. Sin embargo, las condiciones (a) y (b) implican una tercera:

(c) *Dados dos conjuntos de proposiciones representadas por proyectores sobre el mismo subespacio, $\sum_i |\mathbf{u}_i\rangle\langle\mathbf{u}_i| = \sum_i |\mathbf{v}_i\rangle\langle\mathbf{v}_i|$, las sumas de los valores deben ser iguales $\sum_i v(\mathbf{u}_i) = \sum_i v(\mathbf{v}_i)$.*

La implicación es evidente: Si tenemos dos conjuntos diferentes de proyectores que sumen la matriz identidad, $\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{u}_i\rangle\langle\mathbf{u}_i| = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{v}_i\rangle\langle\mathbf{v}_i| = \mathbf{1}$, y ambos conjuntos comparten un elemento común, digamos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, la premisa (a) implica que el valor de la correspondiente proposición en ambos conjuntos de proposiciones debe ser el mismo (0 ó 1); entonces la premisa (b) implica que la suma de los valores de ambos conjuntos de proposiciones sobre el subespacio complementario también deben ser iguales (1 ó 0, respectivamente), $\sum_{i=2}^{n} |\mathbf{u}_i\rangle\langle\mathbf{u}_i| = \sum_{i=2}^{n} |\mathbf{v}_i\rangle\langle\mathbf{v}_i|$. El mismo argumento se puede usar de nuevo si hay más vectores comunes.

Eligiendo entre las ecs. (2. 67)-(2. 75) cuatro parejas de ecuaciones, cada pareja con un vector común, e igualando las sumas de los valores sobre los subespacios complementarios a esos vectores comunes, podemos reducir (de muchas maneras) el sistema a otro con sólo 5 ecuaciones con 14 vectores, por ejemplo (la siguiente elección está justificada por motivos de conveniencia posterior, como se verá en el capítulo 4),

$$v(0,\ 0,\ 1,\ 0)+v(1,\ 1,\ 0,\ 0)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0)= \\ v(0,\ 1,\ 0,\ 0)+v(1,\ 0,\ 1,\ 0)+v(1,\ 0,\ -1,\ 0) \tag{2. 76}$$

$$v(1,\ -1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1)= \\ v(1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(1,\ 0,\ -1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ -1) \tag{2. 77}$$

$$v(0,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 0)+v(1,\ 0,\ 0,\ 1)= \\ v(1,\ -1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 1,\ 1)+v(0,\ 1,\ -1,\ 0) \tag{2. 78}$$

$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 0,\ 1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ -1)= \\ v(1,\ 1,\ 1,\ -1)+v(1,\ 0,\ 0,\ 1)+v(0,\ 1,\ -1,\ 0) \tag{2. 79}$$

$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1)+v(1,\ 1,\ 1,\ -1)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1)=1. \tag{2. 80}$$

Podemos ahora formular la siguiente versión del teorema de BKS:

No existe ningún conjunto de valores $v(\mathbf{u}_i)$ *que verifiquen las ecs. (2. 76)-(2. 80).*

Demostración. De nuevo se emplea un argumento de paridad: si sumamos esas cinco ecuaciones, cada valor $v(\mathbf{u}_i)$ aparece o bien dos veces en el mismo lado de la ecuación resultante, con una contribución par (0 ó 2), o una vez en cada lado, con cancelación de ambas contribuciones; el término adicional 1 en el lado derecho hace que sea imposible que se satisfaga la igualdad, *q.e.d.*

Este conjunto de 14 vectores (o cualquiera de los muchos otros que se pueden obtener de forma similar) conduce a una demostración del teorema de BKS basado en el uso explícito de (c), siguiendo la sugerencia de Clifton. La condición (c) es una consecuencia directa de (a) y (b), y no impone ningún requisito nuevo sobre las variables ocultas. Su empleo no es un mero artificio para dejar fuera varias proposiciones cuando se cuenta el número de ellas necesario para la demostración, porque no se asume ningún valor concreto para esas proposiciones que se desechan; la demostración se mantiene, cualesquiera que sean los valores de las proposiciones omitidas.

2. 4. 3. Demostraciones aditivas en dimensión $n \geq 3$

a. Introducción

En esta tesis las demostraciones del teorema de BKS en espacios de Hilbert de dimensión mayor que 3, especialmente en espacios de dimensión 4 (como el de los estados de espín de *dos* partículas de espín 1/2) y 8 (estados de espín de *tres* partículas de espín 1/2) van a jugar un papel fundamental como se verá en el capítulo 4 (donde se trata el teorema de BKS en sistemas compuestos y su relación con el teorema de Bell). Por ello es preciso resolver primero el problema de construir demostraciones finitas del teorema de BKS en espacios de dimensión superior a 3. Hasta 1991, todos los TNCSs contemplados en la literatura se referían al caso de espacios de dimensión 3; desde entonces han aparecido TNCSs en dimensiones 4 (como los que henos visto en las secciones anteriores) y 8 [Kernaghan-Peres 95], y, como vamos a ver a continuación, diversos métodos para obtener TNCSs en dimensión arbitraria. El propósito de las secciones siguientes será estudiar estos métodos para construir conjuntos no-coloreables (DPSs, PNCSs y TNCSs) en cualquier dimensión finita mayor (o igual) que 3.

Empezaremos, en la sección (b), recordando la primera propuesta sistemática para construir TNCSs en dimensiones superiores. Este resultado, debido a Jason Zimba y Roger Penrose, permite construir TNCSs en cualquier dimensión salvo, en dimensión 5. En las secciones (c) y (d) se presenta un procedimiento explícito para construir (DPSs, PNCSs y) TNCSs en cualquier dimensión (incluso en dimensión 5). El procedimiento usa el esquema de tres pasos en que descompusimos al principio de este capítulo la demostración de Kochen y Specker. Veremos cómo ese esquema, la construcción sucesiva de tres tipos de conjuntos, sigue siendo fructífero al aplicarlo en dimensión arbitraria. En las secciones (e) y (f) se prueba otro resultado mucho más sencillo que permite construir un TNCS en dimensión n a partir de otro en dimensión d ($3 \leq d < n \leq 2d$). En la sección (g) se discute cómo atacar el problema de encontrar los TNCSs mínimos en cada dimensión. Por último, en la sección (h) se hace una primera incursión en el significado físico de los conjuntos de proyectores en dimensión arbitraria (recuérdese que uno de los puntos fuertes del artículo de Kochen y Specker de 1967 en comparación a otros trabajos, por ejemplo el de Bell, era el identificar los operadores en dimensión 3 con ciertos observables físicos y dar una receta para su medida, ¿qué sucede en dimensiones superiores?, ¿es posible hacer una correspondencia similar entre operadores y observables?, ¿cómo se miden estos últimos?); se volverá sobre el significado físico de tales conjuntos en el capitulo 4.

La sección (b) coincide esencialmente con la sección 6 de [Zimba-Penrose 93], las secciones (c), (d) y (h) coinciden con, respectivamente, la sección 3, el apéndice y la sección 5 de [Cabello-García Alcaine 96 a], las secciones (e) y (f) coinciden con [Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 c].

b. El teorema de Zimba y Penrose sobre construcción de TNCSs

En [Zimba-Penrose 93], pp. 716-719, se enuncia un teorema elemental que permite obtener un TNCS en dimensión $n+m$ a partir de dos TNCSs, uno en dimensión n y otro en dimensión m. Este resultado es como sigue.

Sean[68]

$$U = \{(u_{11}, \ldots, u_{1n}), \ldots, (u_{p1}, \ldots, u_{pn})\} \tag{2. 81}$$

y

$$V = \{(v_{11}, \ldots, v_{1m}), \ldots, (v_{q1}, \ldots, v_{qm})\} \tag{2. 82}$$

sendos TNCSs en dimensión n y m, respectivamente. Definamos

$$U * V = \{\tilde{\mathbf{u}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_p, \tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_q\} \tag{2. 83}$$

donde

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in}, 0, \ldots, 0) \tag{2. 84}$$

y

$$\tilde{\mathbf{v}}_j = (0, \ldots, 0, v_{j1}, \ldots, v_{jm}) \tag{2. 85}$$

son vectores en un espacio $n+m$ dimensional.

Teorema: $U * V$ es un TNCS $n+m$ dimensional.

Demostración: En un espacio de dimensión n la asignación un valor (1 ó 0) a cada dirección debe verificar:

(a) Si dos direcciones son ortogonales el *producto* de los valores asignados a ellas es 0.

---

[68] Salvo cambios mínimos, hemos respetado la notación del artículo original.

(b) En cualquier conjunto de n direcciones mutuamente ortogonales, la *suma* de los valores asignados es mayor que 0 (de hecho es 1, pero sólo necesitaremos saber que es mayor que 0).

Vamos a demostrar que si $U * V$ fuese coloreable, es decir si existiese una aplicación $v : U * V \rightarrow \{0, 1\}$ que satisfaga (a) y (b), entonces U ó V serían coloreables, es decir, existirían $v_1 : U \rightarrow \{0, 1\}$, $v_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, tales que al menos una de ellas satisface (a) y (b). Por lo tanto, si no existen v_1 y v_2 (y eso es así por la hipótesis de partida), tampoco puede existir v. Supongamos que existe $v : U * V \rightarrow \{0, 1\}$ satisfaciendo (a) y (b). Definamos $v_1 : U \rightarrow \{0, 1\}$ y $v_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ como

$$v_1(\mathbf{u}_i) = v(\tilde{\mathbf{u}}_i), \tag{2. 86}$$

$$v_2(\mathbf{v}_j) = v(\tilde{\mathbf{v}}_j). \tag{2. 87}$$

Para ver que v_1 satisface (a), consideremos dos vectores ortogonales en U, $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{u}_j$. Entonces es fácil ver que $\tilde{\mathbf{u}}_i$ y $\tilde{\mathbf{u}}_j$ son ortogonales en $U * V$, de manera que, como v satisface (a), $v(\tilde{\mathbf{u}}_i)v(\tilde{\mathbf{u}}_j) = 0$, es decir $v_1(\mathbf{u}_i)v_1(\mathbf{u}_j) = 0$. Por tanto, v_1 satisface (a). Análogamente, v_2 también satisface (a).

Por otro lado, por la hipótesis de que U es no-coloreable, debe existir algún conjunto $\{\mathbf{u}_j^i\}_{j=1}^n$ de n direcciones mutuamente ortogonales en U tal que $f_1(\mathbf{u}_1^i) + \ldots + f_1(\mathbf{u}_n^i) = 0$. Entonces, bajo la hipótesis de que $U * V$ es coloreable, cualquiera que fuera el conjunto $\{\mathbf{v}_k^j\}_{k=1}^m$ de m direcciones mutuamente ortogonales en V, las direcciones $\{\tilde{\mathbf{u}}_1^i, \ldots, \tilde{\mathbf{u}}_n^i, \tilde{\mathbf{v}}_1^j, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_m^j\}$ formarían un conjunto de $n + m$ direcciones mutuamente ortogonales en $U * V$ tal que

$$v(\tilde{\mathbf{u}}_1^i) + \ldots + v(\tilde{\mathbf{u}}_n^i) + v(\tilde{\mathbf{v}}_1^j) + \ldots + v(\tilde{\mathbf{v}}_m^j) > 0, \tag{2. 88}$$

es decir,

$$v_1(\mathbf{u}_1^i) + \ldots + v_1(\mathbf{u}_n^i) + v_2(\mathbf{v}_1^j) + \ldots + v_2(\mathbf{v}_m^j) > 0, \tag{2. 89}$$

y como $v_1(\mathbf{u}_1^i) + \ldots + v_1(\mathbf{u}_n^i) = 0$, entonces $v_2(\mathbf{v}_1^j) + \ldots + v_2(\mathbf{v}_m^j) > 0$. Pero como esto sería cierto para cualquier conjunto $\{\mathbf{v}_k^j\}_{k=1}^m$ de direcciones ortogonales de V, llegamos a que v_2 debería satisfacer (b), *q.e.d.*

Este resultado indica que se pueden combinar dos TNCSs conocidos, uno con p direcciones en dimensión n, y otro con q direcciones en dimensión m, y obtener un

nuevo TNCS con $p+q$ direcciones en dimensión $n+m$[69]. Como, cuando Zimba y Penrose escribieron su artículo, sólo se conocían TNCSs en dimensiones 3 y 4, el teorema anterior dice cómo construir TNCSs en dimensión k, siendo k un número que se pueda obtener como suma de un número entero de treses más otro número entero de cuatros. Es fácil ver que cualquier entero $k > 5$ satisface esa condición, lo que lleva a Zimba y Penrose a concluir que existen TNCSs en cualquier espacio de Hilbert de dimensión finita mayor o igual que 3, "excepto posiblemente en dimensión 5", aunque "uno sospeche que también lo hay en dimensión 5"[70].

c. Construcción en tres pasos de un TNCS en dimensión arbitraria

En esta sección se generaliza a $\mathbf{RP}^n$, con $n \geq 3$, la construcción original de KS de un TNCS en $\mathbf{RP}^3$.

La construcción procederá en tres pasos. En el primer paso construiremos un conjunto de direcciones tales que una elección particular de color para una de las direcciones determina el color de otra de las direcciones del conjunto. En el segundo paso usaremos estos conjuntos para construir otros conjuntos mayores que son no-coloreables con una elección particular de color para una de sus direcciones. Finalmente, en el tercer paso usaremos este segundo tipo de conjuntos para construir otros conjuntos todavía mayores que no son coloreables de ninguna manera.

Construcción de un conjunto con una predicción definida

Definición: Llamaremos *conjunto con una predicción definida (definite prediction set, DPS)* a un conjunto $S = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{f}$ de direcciones tal que al menos para una elección de valor para una dirección particular $\mathbf{r}_1$ de S, el valor para otra dirección $\mathbf{r}_f$ de S está determinado por las reglas (A) y (B)[71]:

---

[69] De hecho, definiendo $\tilde{\mathbf{u}}'^k = \tilde{\mathbf{u}}^i P^k$ y $\tilde{\mathbf{v}}'^k = \tilde{\mathbf{v}}^j P^k$, donde P^k es la matriz que permuta las componentes de $\tilde{\mathbf{u}}^i$ y $\tilde{\mathbf{v}}^j$, se podrían obtener hasta $(m+n)!$ TNCSs distintos, ya que la ortogonalidad de dos (o n) direcciones es invariante bajo una misma permutación de las componentes.

[70] Zimba y Penrose dicen textualmente: "... we include in Section 6 a simple proof of an interesting fact, namely that finite non-colourable sets exist in Hilbert spaces of all finite dimensions $n \geq 3$—except possibly for the $n = 5$ case.", p. 698; frase que se repite en las pp. 716 y 719. La última frase de su artículo es: "Of course, one suspects that there is such a set in [a Hilbert space of dimension 5] as well!, p. 719. La sección 6 de [Zimba-Penrose 93] está compuesta esencialmente por material de [Zimba 93].

[71] Admitiremos que también son DPSs aquellos que hacen una predicción definida sobre el valor de una dirección $\mathbf{r}_f$ de S siempre y cuando se parta de una elección particular de valores para *varias*

(A) Dos direcciones ortogonales no pueden tener ambas el valor 1 (el color "blanco").

(B) En cualquier conjunto de n direcciones mutuamente ortogonales en dimensión n, no todas pueden tener el valor 0 (el color "negro").

Lema 1: En $\mathbf{RP}^n$, con $n \geq 3$, existen conjuntos $S = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{f}$, tales que $v(\mathbf{r}_1) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_f) = 1$ si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_f$ subtienden un ángulo ϕ menor o igual que un cierto valor que ya discutiremos más adelante; cualquier conjunto de este tipo es un ejemplo de DPS.

Demostración: Construyamos explícitamente un conjunto con las propiedades arriba mencionadas; para simplificar la notación omitiremos los coeficientes de normalización en algunos de los vectores. Sea $S = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{f=n+7}$, donde
$\mathbf{r}_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$,
$\mathbf{r}_2 = (0, \cos\alpha, \sin\alpha, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{r}_3 = (\cot\phi, 1, -\cot\alpha, 0, \ldots, 0)$,
$\mathbf{r}_4 = (\tan\phi \operatorname{cosec}\alpha, -\sin\alpha, \cos\alpha, 0, \ldots, 0)$; $\mathbf{r}_5$, $\mathbf{r}_6$ y $\mathbf{r}_7$ se obtienen, respectivamente, a partir de $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ y $\mathbf{r}_4$, reemplazando $\alpha \to \beta$, con $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta \neq p\pi/2$, con p entero;
$\mathbf{r}_{n+5} = (\sin\phi, -\cos\phi, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{r}_{n+6} = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, y
$\mathbf{r}_{n+7} = (\cos\phi, \sin\phi, 0, 0, \ldots, 0)$. Si $n \geq 4$, $\{\mathbf{r}_i\}_{i=8}^{n+4}$ son direcciones de la forma $\mathbf{r}_i = (0, 0, 0, a_4, \ldots, a_n)$, con $a_{i-4} = 1$ y $a_j = 0$ si $j \neq i-4$.

---

direcciones $\{\mathbf{r}_i\}$ de S, suponiendo que tales elecciones se pueda implementar mediante un estado físico. Por ejemplo, si preparamos un sistema en un estado cuántico describible por el vector (1, 0, 0) (que representa, por ejemplo, el estado de espín de una partícula de espín 1 propio de S_z con autovalor $+\hbar$) entonces, por definición, $v(1, 0, 0) = 1$, y entonces, por ortogonalidad, $v(0, 1, 0) = 0$ y también $v(0, 1, 1) = 0$; por tanto, la elección $v(0, 1, 0) = v(0, 1, 1) = 0$ sería una elección de partida válida para un DPS. Ver la nota 28.

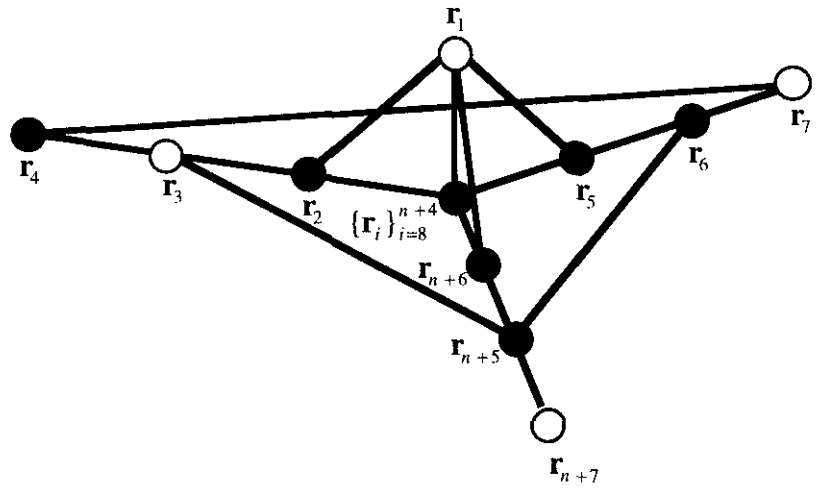


Fig. 2. 24. Una elección particular de colores para el DPS de $n + 7$ direcciones.

La figura 2. 24 representa las direcciones del conjunto S y sus relaciones de ortogonalidad. Cada punto representa una dirección, excepto el punto $\{\mathbf{r}_i\}_{i=8}^{n+4}$ que representa $n-3$ direcciones (en el caso $n=3$ este punto no existe). Los puntos que están sobre la misma recta representan direcciones mutuamente ortogonales. Si, como dijimos antes, coloreamos de "blanco" las direcciones con valor 1 y de "negro" las direcciones con valor 0, la figura 2. 24 representa *una* de las (dos) formas posibles de asignar valores (colores) a todas las direcciones de S siguiendo las reglas (A) y (B).

Para que la dirección $\mathbf{r}_4$ sea ortogonal a $\mathbf{r}_7$ (tal y como se representa en la figura 2. 24), es necesario que

$$\sin\alpha \sin\beta \cos(\alpha-\beta) = -\tan^2\phi . \tag{2. 90}$$

Y como el miembro izquierdo de (2. 90) está acotado entre $-1/8$ y 1, entonces

$$|\phi| \le \arctan(1/\sqrt{8}). \tag{2. 91}$$

Para cualquier elección de ϕ consistente con esta desigualdad, elegiremos α y β de manera que verifiquen (2. 90).

Con las relaciones de ortogonalidad consideradas en la figura 2. 24, $v(\mathbf{r}_1)=1$ (i.e., colorear $\mathbf{r}_1$ de blanco) $\Rightarrow v(\mathbf{r}_2)=v(\mathbf{r}_5)=\{v(\mathbf{r}_i)\}_{i=8}^{n+4}=v(\mathbf{r}_{n+6})=0$, por (A) (i.e., todas esas direcciones son negras). Además, $v(\mathbf{r}_2)=\{v(\mathbf{r}_i)\}_{i=8}^{n+4}=0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_3)\neq v(\mathbf{r}_4)$, por (A) y (B). Supóngase (como en la figura 2. 24) $v(\mathbf{r}_3)=1$; entonces $v(\mathbf{r}_{n+5})=0$, por (A).

Finalmente $\{v(\mathbf{r}_i)\}_{i=8}^{n+6} = 0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{n+7}) = 1$, por (B). La otra posibilidad (no representada en la figura 2. 24) es: $v(\mathbf{r}_3) = 0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_4) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_7) = 0$, por (B) y (A), respectivamente. Por tanto, $v(\mathbf{r}_5) = v(\mathbf{r}_7) = \{v(\mathbf{r}_i)\}_{i=8}^{n+4} = 0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_6) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{n+5}) = 0$, por (B) y (A). De nuevo, $\{v(\mathbf{r}_i)\}_{i=8}^{n+6} = 0 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{n+7}) = 1$, *q.e.d.*

En resumen: usando un conjunto de $n + 7$ direcciones hemos demostrado que si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_f$ $(f \equiv n+7)$ subtienden un ángulo $|\phi| \leq \arctan(1/\sqrt{8})$, entonces $v(\mathbf{r}_1) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_f) = 1$. Este conjunto será el "eslabón" en los siguientes pasos de nuestra construcción.

Construcción de un conjunto parcialmente no-coloreable

Definición: Llamaremos *conjunto parcialmente no-coloreable* (*partially non-colourable set, PNCS*) a un conjunto T de direcciones tales que existe *al menos una elección de valor* para alguna dirección de T que hace imposible asignar valores al resto de las direcciones de T siguiendo las reglas (A) y (B).

Lema 2: En $\mathbf{RP}^n$, con $n \geq 3$, se pueden construir PNCSs "encadenando" adecuadamente varios DPSs.

Demostración: Sea $S_1 = \{\mathbf{r}_{1k}\}_{k=1}^{f}$ el conjunto S de la demostración del lema 1, con la elección particular (como en [Kochen-Specker 67]) $\phi = \pi/10$ (compatible con la restricción (2. 91) para ϕ). Sea S_j, $j = 2, \ldots, 5$, el conjunto que se obtiene a partir de S_{j-1} mediante una rotación de ángulo $\pi/10$ en el plano x-y (por tanto $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{1f}$, $\ldots$, $\mathbf{r}_{51} = \mathbf{r}_{4f}$, $\mathbf{r}_{5f} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$),

$$\mathbf{r}_{jk} = R\,\mathbf{r}_{(j-1)k} \qquad \text{(2. 92. a)}$$

$$= R^{j-1}\,\mathbf{r}_{1k}\,, \qquad \text{(2. 92. b)}$$

donde R es la siguiente matriz $n \times n$

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/10) & -\sin(\pi/10) & 0 & \ldots & 0 \\ \sin(\pi/10) & \cos(\pi/10) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2. 93)}$$

Finalmente, definamos $T = \{\mathbf{r}_{jk}\} = \{S_j\}_{j=1}^{5}$.

Aplicando cinco veces la propiedad del conjunto S, $v(\mathbf{r}_{11}) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{1f})\big(\equiv v(\mathbf{r}_{21})\big) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{2f})\big(\equiv v(\mathbf{r}_{31})\big) = 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v(\mathbf{r}_{5f}) = 1$; pero $\mathbf{r}_{11}$ y $\mathbf{r}_{5f}$ son ortogonales y por tanto $v(\mathbf{r}_{11})$ y $v(\mathbf{r}_{5f})$ no pueden ser 1 simultáneamente, de

acuerdo con (A). Concluimos que T, con la elección inicial $v(\mathbf{r}_{11})=1$, es no-coloreable, *q.e.d.*

Nótese que la otra condición inicial posible, $v(\mathbf{r}_{11})=0$, no determina el resultado final $v(\mathbf{r}_{5f})$ (de ahí que T sea sólo *parcialmente* no-coloreable).

T contiene $n+38$ direcciones diferentes. Esto es así porque al número de direcciones que se obtiene multiplicando 5 (el número de conjuntos S en T) por $n+7$ (el número de direcciones en S), le tenemos que restar: cuatro direcciones, porque $\mathbf{r}_{j(n+7)}=\mathbf{r}_{(j+1)1}$, $j=1,\ldots,4$; otras $4(n-2)$ direcciones, porque $\mathbf{r}_{jk}=\mathbf{r}_{(j+1)k}$, con $j=1,\ldots,4$, y $k=8,\ldots,n+4$ y $n+6$; y otra dirección porque $\mathbf{r}_{11}=\mathbf{r}_{5(n+5)}$ (como se puede comprobar usando 5. b).

Construcción de un conjunto totalmente no coloreable

Definición: Llamaremos *conjunto totalmente no-coloreable* (*totally non-colourable set, TNCS*) a un conjunto finito de direcciones que no se puede colorear *de ninguna manera* siguiendo las reglas (A) y (B).

Lema 3: En $\mathbf{RP}^n$, $n\geq 3$, se pueden construir TNCSs "encadenando" adecuadamente varios PNCSs.

Demostración: Sea $T_1=\{\mathbf{r}_{1jk}\}$ el conjunto T de la demostración del lema 2, que enlaza las direcciones ortogonales $\mathbf{u}_1=(1,0,0,\ldots,0)=\mathbf{r}_{111}$ y $\mathbf{u}_2=(0,1,0,\ldots,0)=\mathbf{r}_{15(n+7)}$; sea T_i un conjunto similar que enlaza $\mathbf{u}_i$ con $\mathbf{u}_{i+1}$, y denotemos por $U=\{\mathbf{r}_{ijk}\}=\{T_i\}_{i=1}^{n}$. Entonces

$$\mathbf{r}_{ijk}=P\,\mathbf{r}_{(i-1)jk} \qquad \text{(2. 94. a)}$$

$$=P^{i-1}\,\mathbf{r}_{1jk}\,, \qquad \text{(2. 94. b)}$$

donde P es la siguiente matriz $n\times n$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2. 95)}$$

Usando (2. 92. b) y (2. 94. b), podemos escribir todas las direcciones del conjunto $U=\{\mathbf{r}_{ijk}\}$ ($i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,5$; $k=1,\ldots,n+7$) como

$$\mathbf{r}_{ijk} = P^{i-1} R^{j-1} \mathbf{r}_{11k} , \tag{2. 96}$$

donde las direcciones $\{\mathbf{r}_{11k}\}_{k=1}^{n+7}$ son las del "eslabón" original $\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{n+7}$ de la demostración del lema 1.

A partir de la demostración del lema 2 y de la identificación $\mathbf{r}_{211} \equiv \mathbf{r}_{15(n+7)}$ vemos que la elección $v(\mathbf{r}_{111})=1$ implica $v(\mathbf{r}_{211})=1$, lo que violaría la regla (A). Sin embargo, si $v(\mathbf{r}_{111})=0$ entonces $v(\mathbf{r}_{211})$ puede ser 1 ó 0. En el primer caso, $v(\mathbf{r}_{211})=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{311})=1$ y esto es, de nuevo, imposible porque violaría (A); de manera que $v(\mathbf{r}_{211})=0$. Aplicando el mismo razonamiento a todas las direcciones $\{\mathbf{r}_{i11}\}_{i=1}^{n}$, concluimos que $v(\mathbf{r}_{i11})=0$ para todo $i=1, \ldots, n$. Pero esto es imposible porque violaría (B); por tanto, U es un TNCS finito, *q.e.d.*

U contiene $39n$ direcciones diferentes. Esto es así porque al número de direcciones que se obtiene multiplicando n (el número de conjuntos T en U) por $n+38$ (el número de direcciones en T), tenemos que restarle $(n-1)n$ direcciones, porque el conjunto de direcciones $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\} \in T_i$, $\forall i$, con $i=1, \ldots, n$. En particular, para $n=3$, U es el conjunto de 117 direcciones considerado por KS.

Si $n \geq 4$, además de las relaciones de ortogonalidad empleadas en nuestra demostración hay otras relaciones de ortogonalidad adicionales entre las direcciones de U. Es fácil ver, que estas relaciones adicionales no invalidan la demostración anterior.

Partiendo de DPSs distintos a los hasta ahora considerados, el mismo procedimiento en tres pasos permite construir otros TNCSs.

d. Otros DPSs, PNCSs y TNCSs en dimensión $n \geq 3$

Las figuras 2. 25 y 2. 26 representan otros dos posibles DPSs en $\mathbf{RP}^n$ del tipo $v(\mathbf{r}_1)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_f)=1$. Los convenios son los mismos que se emplearon en la figura 2. 24. La elección inicial en ambos casos es $v(\mathbf{r}_1)=1$ ("blanco"). La figura. 2. 25 (la figura 2. 26) refleja *una* de las cuatro (cinco) formas posibles de asignar valores (colores) a las restantes direcciones del conjunto.

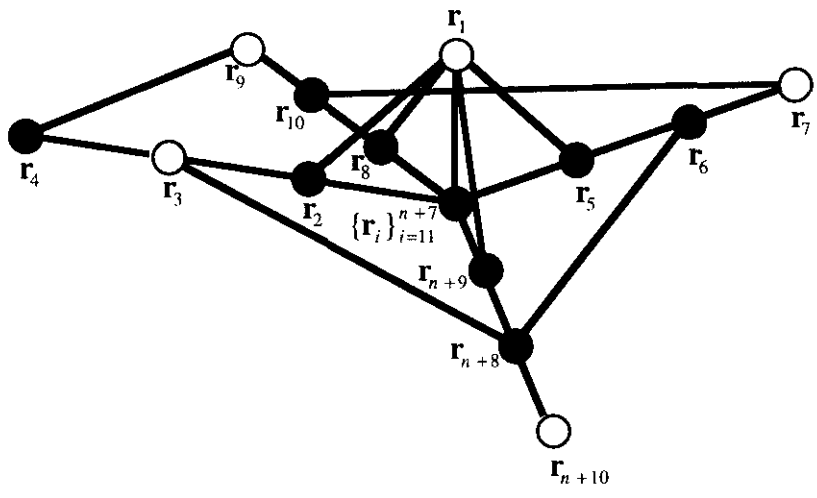


Fig. 2. 25. Una elección particular de colores para el DPS de $n+10$ direcciones.

El DPS de la figura 2. 25 tiene $f = n+10$ direcciones. Las direcciones $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_7$ son las mismas que en la demostración del lema 1; la expresión de las direcciones $\mathbf{r}_{n+8}$ a $\mathbf{r}_{n+10}$ coincide respectivamente con la de $\mathbf{r}_{n+5}$ a $\mathbf{r}_{n+7}$ en la demostración del lema 1. Si $n \geq 4$, las direcciones $\{\mathbf{r}_i\}_{i=11}^{n+7}$ coinciden respectivamente con $\{\mathbf{r}_i\}_{i=8}^{n+4}$ de la demostración del lema 1. Aparecen tres direcciones nuevas, $\mathbf{r}_8 = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{r}_9 = (\sin\alpha\cos\alpha, 0, -\tan\phi, 0, \ldots, 0)$, y $\mathbf{r}_{10}$, que se obtiene a partir de $\mathbf{r}_9$ con el cambio $\alpha \rightarrow \beta$, *donde* $\alpha \neq \beta \neq p\pi/2$, *con* p *entero.*

Para que la dirección $\mathbf{r}_9$ sea ortogonal a $\mathbf{r}_{10}$ (tal y como se representa en la figura 2. 25), es necesario que

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = -\tan^2\phi. \tag{2. 97}$$

Y como el miembro izquierdo de (2. 97) está acotado entre –1/4 y 1, entonces

$$|\phi| \leq \arctan(1/2). \tag{2. 98}$$

Para cualquier elección de ϕ consistente con esta desigualdad, elegiremos α y β de manera que verifiquen (2. 97).

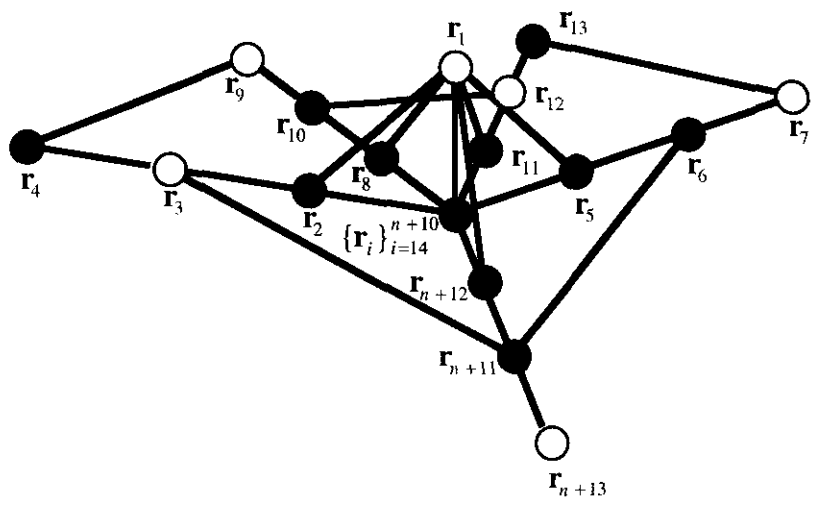


Fig. 2. 26. Una elección particular de colores para el DPS de $n+13$ direcciones.

El DPS de la figura 2. 26 tiene $f = n+13$ direcciones. Las direcciones $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_9$ coinciden con las del párrafo anterior; las direcciones $\mathbf{r}_{n+11}$ a $\mathbf{r}_{n+13}$ con $\mathbf{r}_{n+5}$ a $\mathbf{r}_{n+7}$ en la demostración del lema 1, respectivamente. Si $n \geq 4$, las direcciones $\{\mathbf{r}_i\}_{i=14}^{n+10}$ coinciden con $\{\mathbf{r}_i\}_{i=8}^{n+4}$ de la demostración del lema 1. Las direcciones restantes son
$\mathbf{r}_{10} = (\tan\phi,\ 0,\ \sin\alpha\cos\alpha,\ 0, \ldots,\ 0)$, $\mathbf{r}_{11} = (0,\ \cos\gamma,\ \sin\gamma,\ 0, \ldots,\ 0)$, con
$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq p\pi/2$, con p entero;
$\mathbf{r}_{12} = (\tan\phi \operatorname{cosec}\beta \sec(\beta-\gamma),\ -\sin\gamma,\ \cos\gamma,\ 0, \ldots,\ 0)$, y
$\mathbf{r}_{13} = (\cot\phi \sin\beta \cos(\beta-\gamma),\ \sin\gamma,\ -\cos\gamma,\ 0, \ldots,\ 0)$.

Para que la dirección $\mathbf{r}_{10}$ sea ortogonal a $\mathbf{r}_{12}$ (tal y como se representa en la figura 2. 26), es necesario que

$$\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma\cos(\beta-\gamma) = -\tan^2\phi. \qquad (2.\ 99)$$

Y como el miembro izquierdo de (2. 99) está acotado entre $-3\sqrt{3}/16$ y 1, entonces

$$|\phi| \leq \arctan(3^{3/4}/4). \qquad (2.\ 100)$$

Para cualquier elección de ϕ consistente con esta desigualdad, elegiremos α, β y γ de manera que verifiquen (2. 99).

En el caso $n = 3$, el DPS de la figura 2. 24 es KS-10 (ver la figura 2. 2); el conjunto de la figura 2. 25 es B-13 (ver la figura 2. 5); y el conjunto de la figura 2. 26 es CG-16 (ver la figura 2. 6)[72].

Una propiedad interesante de estos conjuntos es que, con sólo unas pocas direcciones más, el ángulo ϕ entre las direcciones inicial y final, $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_f$, para las que $v(\mathbf{r}_1)=1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_f)=1$, es mayor que en el DPS de la figura 2. 24, a saber $|\phi| \leq \arctan(1/2) = 0.464$ en el conjunto de la figura 2. 25 y $|\phi| \leq \arctan(3^{3/4}/4) = 0.518$ en el conjunto de la figura 2. 26, versus $|\phi| \leq \arctan(1/\sqrt{8}) = 0.340$ en el conjunto de la figura 2. 24. Esto es útil para algunas de las versiones "probabilísticas" del teorema de BKS, ya que conducen a mayores discrepancias con la MC.

Estos DPSs también pueden usarse para construir por el método de los tres pasos otros PNCSs (y a partir de éstos otros TNCSs). Algunos de ellos tienen menos direcciones que los descritos en la sección anterior. Por ejemplo, se pueden encadenar sucesivamente dos conjuntos como los de la figura 2. 25, eligiendo en ambos $\phi = \arctan(1/2)$ (y por tanto $\alpha = -\beta = \pi/4$), y luego otros dos conjuntos como los de la figura 2. 24, el primero con $\phi = (2\pi/5) - 2\arctan(1/2)$, y el segundo con $\phi = \pi/10$, obteniendo un PNCS con $n + 34$ direcciones (en lugar de $n + 38$) y luego un TNCS. Un cálculo explícito muestra que el TNCS así obtenido tiene 96 direcciones si $n = 3$, 136 direcciones si $n = 4$, y $35n$ direcciones si $n \geq 5$ (en lugar de $39n$ para cualquier n, como ocurría con el conjunto U de la sección anterior).

---

[72] Si eliminamos las últimas dos direcciones en los DPSs de las figuras 1-3, tenemos otros DPSs (con $f' = n+5$, $n+8$ y $n+11$, respectivamente) tales que $v(\mathbf{r}_1) = 1 \Rightarrow v(\mathbf{r}_{f'}) = 0$; los ángulos formados por $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_{f'}$ son $\pi/2 - \phi$, donde ϕ son los ángulos previamente discutidos. En $n = 3$ esos DPSs son, respectivamente, KS-8, B-11 y CG-14.

e. Método recursivo para construir TNCSs en dimensión arbitraria

Sea $A := \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{f}$, $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{id})$, un TNCS en dimensión d. Para todo $n := d + m$, $1 \le m \le d$, definamos dos conjuntos de vectores n-dimensionales, $B^* := \{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^{f}$, $C^* := \{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^{f}$, que se obtienen añadiendo a cada vector $\mathbf{a}_i$ m componentes cero *a la derecha* y *a la izquierda*, respectivamente; $\mathbf{b}_i := (a_{i1}, \ldots, a_{id}, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{c}_i := (0, \ldots, 0, a_{i1}, \ldots, a_{id})$. Definamos también los siguientes conjuntos de vectores n-dimensionales: $\overline{B} := \{\mathbf{b}_j\}_{j=f+1}^{f+m}$, $b_{jk} := \delta_{j-f+d,k}$; $\overline{C} := \{\mathbf{c}_j\}_{j=f+1}^{f+m}$, $c_{jk} := \delta_{j-f,k}$; $B := B^* \cup \overline{B} = \{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^{f+m}$, $C := C^* \cup \overline{C} = \{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^{f+m}$.

Lema: B es coloreable si y sólo si

$$\sum_{j=f+1}^{f+m} v(\mathbf{b}_j) = 1. \tag{2. 101}$$

Demostración: Los conjuntos de d vectores mutuamente ortogonales en A se convierten en conjuntos de n vectores mutuamente ortogonales en B, compartiendo los últimos m vectores, $\mathbf{b}_j \in \overline{B}$, $j = f+1, \ldots, f+m$. Si se satisface la condición (2. 101), podemos colorear B simplemente asignando los valores $v(\mathbf{b}_j) = 0$, $j = 1, \ldots, f$; las condiciones (a) y (b) de la Sec. 2. 4. 2. h se satisfacen automáticamente. Por el contrario, si (2. 101) no se verifica, entonces $v(\mathbf{b}_j) = 0$, $j = f+1, \ldots, f+m$; la imposibilidad de colorear el conjunto A en dimensión d siguiendo (a), (b) implica la imposibilidad de colorear B en dimensión n, *q.e.d.*[73]

El mismo razonamiento se puede aplicar al conjunto C: C es coloreable si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{m} v(\mathbf{c}_j) = 1. \tag{2. 102}$$

Teorema: $D := B \cup C$ es un TNCS.

Demostración. Si $d < n \le 2d$, entonces $\overline{B} \cap \overline{C} = \varnothing$; las condiciones (2. 101) y (2. 102), necesarias para colorear B y C, implicarían la existencia de dos vectores mutuamente ortogonales, $\mathbf{b}_k \in \overline{B}$, $\mathbf{c}_l \in \overline{C}$, con valores $v(\mathbf{b}_k) = 1$, $v(\mathbf{c}_l) = 1$; esto impide que $D = B \cup C$ sea coloreable siguiendo (b); por tanto D es un TNCS, *q.e.d.*

El número g de vectores distintos en el conjunto D es $g \le 2(f+m)$; el extremo se alcanza sólo si $B \cap C = \varnothing$. En general, el conjunto D es no-crítico (algunos

---

[73] B es un PNCS: si asignamos el valor $v(\mathbf{b}_i) = 1$ a un vector cualquiera $\mathbf{b}_i \in B^*$, entonces $v(\mathbf{b}_j) = 0$, $j = f+1, \ldots, f+m$, y B es no-coloreable.

subconjuntos de D son también TNCSs). En la sección siguiente, para buscar subconjuntos críticos emplearemos una generalización a dimensión arbitraria del programa de ordenador que aparece en [Peres 93], pp. 209-211 (ver también la sección titulada "Computer program for testing Kochen-Specker colourings" en [Kernaghan 95]).

A continuación presentaremos varios resultados obtenidos este "método $n \leq 2d$", y los compararemos con los que se obtienen con otros métodos.

El método $n \leq 2d$ nos permite construir TNCS en cualquier dimensión $n \geq 4$, partiendo de un TNCS en dimensión 3 (primero nos permite construir un conjunto en dimensiones 4, 5, y 6; luego nos permite llegar hasta dimensión 12 usando los conjuntos generados en el primer paso, etc.): podríamos empezar con CK-31, o con P-33 en dimensión 3; sin embargo, se pueden obtener conjuntos más pequeños en dimensiones $n \geq 5$ empezando por TNCSs en dimensión $n = 4$. En general, empezando con un TNCS de f vectores en dimensión d, este método produce TNCSs con, *como mucho*, $g \leq 2^k(f + kd)$ vectores en dimensión $2^k d$.

Dimensión n	5	6	7	8
Método $n \leq 2d$, empezando de P-24 en $d = 4$.	39 (**29**)	44 (**31**)	47 (**34**)	48 (**36**)
Método $n \leq 2d$, empezando de S_4 (CEG-18) en $d = 4$.	31 (**29**)	35 (32)	37 (**34**)	38 (**36**)
Método de Zimba-Penrose usando CK-31 en $d = 3$ y S_4 en $d = 4$.	...	62	49	**36**

Tabla 2. 3. Número de vectores de algunos TNCSs en dimensiones 5 a 8 que se obtienen por distintos métodos. Entre paréntesis están los cardinales de los subconjuntos críticos más pequeños respectivos obtenidos con ordenador. Los récords en cada dimensión aparecen en negrita (en la siguiente sección se dan ejemplos de tales conjuntos).

La primera fila de la tabla 2. 3 muestra el número de vectores de los TNCSs en dimensiones 5 a 8 que se obtienen partiendo de P-24 en dimensión $n = 4$. Entre paréntesis aparecen los cardinales de sus subconjuntos críticos más pequeños (hallados

mediante una búsqueda con ordenador). Para $n = 5,\ 6,\ 7$ éstos son los actuales récords (escritos en negrita). En dimensión $n = 8$, el TNCS de 48 vectores que se obtiene con este método contiene 256 subconjuntos críticos diferentes con 36 vectores igualando el récord de [Kernaghan-Peres 95]. En la sección siguiente se incluyen ejemplos explícitos de TNCSs récord en dimensiones 4 a 8.

Alternativamente podemos empezar a partir de un conjunto CEG-18 particular en dimensión $n = 4$, al que llamaremos S_4 (que aparece explícitamente en la sección siguiente): entonces el número de vectores de los TNCSs resultantes, que se muestra en la segunda fila de la tabla 2. 3, está razonablemente próximo al récord en cada dimensión; los cardinales de sus subconjuntos críticos más pequeños se muestran entre paréntesis.

El método de Zimba y Penrose (ZP), descrito en la sección 2, necesita, en general, *dos* TNCSs iniciales (uno en dimensión 3 y otro en dimensión 4), y no cubre el caso $n = 5$. Componiendo dos TNCSs con f y g vectores in dimensiones d e m, este método produce un TNCS con $f + g$ en dimensión $d + m$, conjunto que es crítico si los dos TNCSs iniciales eran críticos. El número de vectores de los conjuntos que se obtienen con el método de ZP se incrementa linealmente si la dimensión es un múltiplo de la dimensión inicial; partiendo de un conjunto *crítico* con f vectores en dimensión d, el método de ZP produce conjuntos *críticos* con hf vectores en dimensión hd (nótese que, aunque *estos* conjuntos no contengan ningún subconjunto que sea TNCS, el número hf es sólo un límite superior del tamaño de los TNCSs más pequeños posibles en dimensión hd). En particular, partiendo de un CEG-18 particular, el método de ZP produce 2^n conjuntos críticos diferentes con $9 \times 2^{k+1}$ vectores en dimensión $n = 2^{k+2}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, en comparación con el TNCS no crítico con g vectores siendo $9 \times 2^{k+1} < g \leq (9 + 2k) \times 2^{k+1}$ que se obtiene por el método $n \leq 2d$.

La tercera fila en la tabla 2. 3 representa el número de vectores de los TNCSs que se obtienen con el método de ZP, empezando con los TNCSs más pequeños conocidos en dimensiones 3 y 4 (CK-31 y CEG-18). Los TNCSs en dimensiones 6 y 7 así obtenidos son más grandes que los antes discutidos (y no contienen subconjuntos no-coloreables más pequeños, porque son críticos). En dimensión $n = 8$, empezando por dos conjuntos CEG-18 el método de ZP produce 256 conjuntos críticos diferentes de 36 vectores (que son los mismos 256 conjuntos récord que se obtenían por el método $n \leq 2d$).

Otros métodos producen conjuntos no-coloreables mayores: En la p. 212 de la reedición de 1995 de [Peres 93][74] se construye un TNCS en dimensión $d+1$ a partir de uno en d; sólo es necesario un TNCS inicial para llegar de forma recursiva a cualquier dimensión n, pero el tamaño de los TNCSs obtenidos crece rápidamente en general, y es necesaria una búsqueda con ordenador para evitar conjuntos grandes. Finalmente, el método de las secciones 3 y 4, la generalización a dimensión arbitraria de la construcción en tres pasos original de Kochen y Specker de la sección 3, que mostraba explícitamente la relación en dimensión arbitraria entre los distintos tipos de conjuntos no-coloreables, es, a cambio, muy ineficiente respecto al número de vectores que aparece (96 en dimensión $n=3$, 136 en $n=4$, y $35n$ si $n \geq 5$).

f. Algunos TNCSs críticos récord en dimensiones 4 a 8

En esta sección se presentan ejemplos explícitos de los TNCSs críticos más económicos conocidos en dimensiones 4 a 8. El primero, en dimensión 4, es un ejemplo de CEG-18; los otros tres, en dimensiones 5-8, se han obtenido aplicando el método $n \leq 2d$ a P-24 y luego buscando, con ordenador, sus subconjuntos críticos más pequeños. Para simplificar la notación hemos expresado los conjuntos en dimensiones 5-8 en términos del de dimensión 4.

S_4:={(1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,−1,0,0), (0,1,−1,0), (1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,1,0,−1), (1,0,0,1), (1,−1,1,−1), (1,1,−1,−1), (1, −1,−1,1), (1,1,1,−1), (1,1,−1,1), (−1,1,1,1)}. S_4 es uno de los 16 subconjuntos críticos de 18 vectores de P-24 (uno de los que hemos llamado CEG-18). Se pueden formar 9 tétradas de vectores mutuamente ortogonales en términos de los 18 elementos de S_4; cada vector es ortogonal a otros 7 del conjunto y aparece en 2 tétradas (como se ve en la figura 2. 23). La no-coloreabilidad del conjunto se demuestra mediante un argumento de paridad: la suma de los valores de cada tétrada es 1; por tanto la suma de los valores de las 9 tétradas debe ser 9, pero cada valor aparece dos veces y por tanto la suma es *par*. Hemos elegido un conjunto diferente al que elegimos en la Sec. 2. 4. 2. g porque el TNCS en $n=5$ que se deriva del conjunto de la Sec. 2. 4. 2. g tiene 33 vectores, en lugar de 31 como ocurre empezando con S_4.

S_5:={(**a**,0), (0,**a**): **a** $\in S_4$}−{(0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0)}. Se pueden formar 16 péntadas de vectores mutuamente ortogonales en términos de los 29 elementos de S_5. La no-coloreabilidad de S_5 se puede demostrar mediante un test exhaustivo de ordenador

[74] Peres, en una comunicación del 16 de febrero de 1996, nos hizo notar este añadido a la edición de 1993 de su libro, y nos envió un archivo post-script de esa página.

(no hemos encontrado ninguna demostración analítica de la no-coloreabilidad de éste ni de los siguientes conjuntos S_6 y S_7). Éste es uno de los 120 subconjuntos críticos similares con 29 vectores del TNCS de 39 vectores que se obtiene (por aplicación del método $n \leq 2d$) a partir de P-24.

S_6:={(**a**,0,0), (0,0,**a**) : **a** $\in S_4$}$\cup${(0,1,0,0,0,0), (**1,0,−1,0,0,0**), (**1,1,1,1,0,0**)}−{(0,0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0,0), (1,1,0,0,0,0), (0,0,1,−1,0,0), (1, −1,−1,1,0,0), (0,1,0,1,0,0)}; los dos vectores en negrita son los que aparecen cuando se aplica el método $n \leq 2d$ a P-24, pero no cuando se aplica a S_4. Se pueden formar 16 héxadas de vectores mutuamente ortogonales en términos de los 31 elementos de S_6. La no-coloreabilidad de S_6 se ha demostrado mediante ordenador. Éste es uno de los 128 subconjuntos críticos similares con 31 vectores del TNCS de 44 vectores que se obtiene (por el método $n \leq 2d$) a partir de P-24.

S_7:={(**a**,0,0,0), (0,0,0,**a**): **a** $\in S_4$}−{(0,0,0,1,0,0,0)}. Se pueden formar 28 héptadas de vectores mutuamente ortogonales en términos de los 34 elementos de S_7. La no-coloreabilidad de S_7 se ha demostrado con ordenador. Éste es uno de los 144 subconjuntos críticos similares con 34 vectores del TNCS de 47 vectores que se obtiene (por el método $n \leq 2d$) a partir de P-24.

S_8:={(**a**,0,0,0,0), (0,0,0,0,**a**): **a** $\in S_4$}. Se pueden construir 81 óctadas de vectores mutuamente ortogonales en términos de los 36 elementos de S_8; cada vector es ortogonal a otros 25 del conjunto y pertenece a 18 óctadas. La no-coloreabilidad de S_8 puede demostrarse mediante un argumento de paridad: el número de óctadas es *impar*, pero cada vector aparece un número *par* de veces (además, la no-coloreabilidad de S_8 es una consecuencia de la no-coloreabilidad de S_4 y de la aplicación del método de ZP). S_8 es uno de los 256 subconjuntos críticos similares con 36 vectores del TNCS de 48 vectores que se obtiene (por el método $n \leq 2d$) a partir de P-24.

g. Búsqueda de la demostración mínima

Como hemos visto, muchos autores han ido construyendo conjuntos no-coloreables con cada vez menos direcciones; ¿se puede reducir aún más el número de direcciones? ¿Cuál o cuales son los TNCSs mínimos en cada dimensión?. El interés de este problema es, por lo que sabemos, esencialmente matemático[75]. Este es un problema que estamos

[75] Por ejemplo, Jeffrey Bub [Bub 95], p. 1257, dice: "The problem of how small we can make the set of observables and still generate a Kochen-Specker contradiction is interesting mathematically and important in reveling structural features of Hilbert space, but of no immediate significance for the

estudiando en la actualidad; indicamos a continuación algunas ideas de cómo podía resolverse.

Actualmente con un programa de ordenador se puede comprobar muy rápidamente si un cierto conjunto de direcciones es o no coloreable (es o no un TNCS). De hecho, lo único que comprueban los programas de [Peres 93], pp. 209-211, y [Kernaghan 95] es si el correspondiente conjunto de relaciones de ortogonalidad es o no coloreable; estos programas no trabajan con las direcciones explícitas sino con sus relaciones de ortogonalidad (por ejemplo, no hay que introducir los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0), etc. sino decirle al programa que el primer vector es ortogonal al segundo, etc.). Llamaremos a un programa de este tipo un *test de coloreabilidad.*

Un problema distinto, pero relacionado con el anterior, es el de si cierto conjunto de relaciones de ortogonalidad es o no factible (es decir, si esas relaciones de ortogonalidad son o no implementables por un conjunto de n direcciones en la dimensión correspondiente). Para resolver este segundo problema también es de ayuda el ordenador de la manera siguiente: de los $2^{n(n-1)/2}$ conjuntos de relaciones de ortogonalidad posibles en principio[76] el ordenador puede descartar aquellos conjuntos de relaciones de ortogonalidad que contengan subconjuntos no factibles (por ejemplo, en dimensión 3 no puede haber dos direcciones distintas que sean ortogonales a otras dos que a su vez son ortogonales entre si; ni tampoco puede haber cuatro direcciones distintas mutuamente ortogonales; ni seis direcciones tales que tres A, B, C, sean mutuamente ortogonales, las otras tres a, b, c también sean mutuamente ortogonales, y además A es ortogonal a a, B a b, pero C no es ortogonal a c, etc.); cuanto más exhaustivas sean las reglas de no-factibilidad y cuanto mayores sean los subconjuntos que estudia el ordenador, más cerca estaremos de que los conjuntos que salvan esta

interpretation of quantum mechanical probabilities"; la relación entre el número de direcciones (proposiciones) y el número de observables en otras demostracionesn de BKS se tratará en la Sec. 2. 6 para el caso de ciertos TNCSs en dimensión 4 y en dimensión 8. El problema, en cierto sentido inverso, de cuán grande puede hacerse un conjunto de direcciones siendo todavía coloreable sí ha sido considerado interesante por ciertos autores en relación con interpretaciones alternativas de la MC, en particular en relación con las interpretaciones llamadas modales, ver [Bub 95]; bibliografía sobre las interpretaciones modales se da en la nota 52 del capítulo 3.

[76] Este número se obtiene de la manera siguiente: un conjunto de relaciones de ortogonalidad entre n direcciones se puede representar por una tabla con n entradas horizontales y n verticales; como la ortogonalidad es una propiedad simétrica y no-reflexiva solo tendremos que rellenar $m = n(n-1)/2$ casillas de esa tabla —un ejemplo de este tipo de tabla es el que aparece en la figura 2. 18 para Q-40—; por tanto, el número de conjuntos de relaciones de ortogonalidad está acotado superiormente por el número de variaciones con repetición de dos elementos ("ortogonal" y "no ortogonal") tomados de m en m.

criba sean efectivamente factibles[77]. A un programa que hace esto lo llamaremos un *test de factibilidad.*

Aplicando ambos tests en cada dimensión podríamos (en principio) encontrar los TNCS mínimos[78]. El último paso sería encontrar un ejemplo explícito con direcciones sencillas y ver si su no-coloreabilidad puede probarse por un argumento más elegante (sin recurrir a tests con ordenador).

En resumen, el problema (matemático) de encontrar los TNCSs mínimos es, en principio, abordable, aunque sea "a fuerza bruta" (con ayuda de ordenador). Por supuesto, sería más deseable encontrar un método elegante de resolverlo[79].

---

[77] Una ordenación adecuada de las proposiciones (por ejemplo, según el número de relaciones de ortogonalidad que tengan) puede evitarnos tener comprobar más de una vez conjuntos equivalentes de proposiciones.

[78] En particular así comprobaríamos si se puede bajar de 18 direcciones en dimensión 4. Varios autores han manifestado su interés por esta cuestión: Por ejemplo, Hardy, e-mail del 6 de febrero de 1996: "Do you think that <18 vectors will be possible?"; Clifton, e-mail del 19 de febrero de 1996: "Do you have any intuitions about whether 18 rays is the minimum in 4D (i.e. the minimum with respect to the sum rule applied to orthogonal resolutions of the identity on the whole space only)?".

[79] Los TNCSs construidos por elegantes métodos geométricos (los de KS y Penrose) son elegantes pero no mínimos (a veces ni siquiera económicos). Una de las conclusiones de la tesis doctoral de Kernaghan [Kernaghan 95] es: "One conclusion of this thesis is that the configurations of subspaces of Hilbert space that support the Kochen-Specker theorem are not characterizable as simple polytopes. On the basis of earlier results, it is plausible to suggest a characterization. However, I have shown that the polytope structures of configurations, such as the Coxeter 24-simplex associated with the eigenstates of the EPR [P-24], contain many smaller configurations sufficient to support a Kochen-Specker argument [K-20]. This result reveals that it is not trivial to characterize the sets of rays of Hilbert space that support a Kochen-Specker theorem."

h. Interpretación física de las demostraciones

Hasta este momento hemos centrado nuestra atención en los aspectos matemáticos del problema, evitando deliberadamente dos cuestiones físicamente relevantes:

I. ¿Cuál es la interpretación en términos de proposiciones físicas de los operadores de proyección que se usan en las demostraciones?

II. ¿Cómo se puede medir simultáneamente cualquier conjunto completo de proposiciones compatibles?

El objetivo de esta sección es contestar ambas preguntas. Para ello, primero revisaremos las interpretaciones físicas de algunas de las pruebas publicadas; y después veremos que, aunque en general la respuesta a ambas preguntas no es trivial, existen sistemas físicos descritos por espacios de Hilbert de dimensión finita arbitraria $n \geq 3$ y medidas factibles, en principio, sobre ellos que permiten implementar las proposiciones necesarias para la demostración y medir conjuntamente cualquier conjunto de ellas.

KS [KS 67] señalaban que en $n = 3$ existe una aplicación biyectiva entre el conjunto de direcciones $\mathbf{r}_i$ en $\mathbf{RP}^3$ y el cuadrado de la componente de espín en esa misma dirección de una partícula de espín 1, S_i^2. La relación es $\mathbf{r}_i^t \otimes \mathbf{r}_i = \hat{I} - \hbar^{-2}\hat{S}_i^2$ (2. 23), y tiene la siguiente propiedad: $[\hat{S}_i^2, \hat{S}_j^2] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0$. Podemos medir una S_i^2 individual usando aparatos de Stern-Gerlach ordinarios, y una medida conjunta de un conjunto completo de este tipo de observables (por ejemplo, una medida conjunta de S_x^2, S_y^2 y S_z^2) puede lograrse mediante un campo electromagnético con simetría ortorómbica (ver la nota 26). Por tanto el teorema de KS se puede enunciar físicamente diciendo que no es posible asignar valores de variables ocultas consistentemente a un conjunto finito de observables S_i^2.

En $n = 4$, 20 de los vectores de Q-40 vimos que podían identificarse con proyectores del tipo $\hat{P}_i = |S_i = \hbar/2\rangle\langle S_i = \hbar/2|$, donde S_i representa la componente de espín de una partícula de espín 3/2 en la dirección $\mathbf{r}_i$ (estos proyectores tienen la propiedad: $[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 1/3$) y los otros 20 con proyectores ortogonales a tres mutuamente ortogonales del tipo anterior; ver la Sec. 2. 4. 2. b.

Otros TNCS en $n = 4$ y $n = 8$ se han obtenido a partir de proyectores "multi-dimensionales" (o proyectores de rango mayor que 1, en contraposición a las proposiciones "unidimensionales" consideradas hasta ahora); estos conjuntos son no-coloreables de acuerdo a reglas similares a (A) y (B); ver la Sec. 2. 5. Estos observables se obtienen como producto tensorial de componentes de espín de varias partículas de

espín 1/2 (dos partículas para $n = 4$, tres para $n = 8$). La interpretación física de estos observables es inmediata, pero la cuestión de la medición conjunta de todos los conjuntos compatibles todavía no ha sido resuelta [Peres 92 a]. El teorema de BKS aplicado a sistemas compuestos se tratará en profundidad en el capítulo 4.

Una vez revisados estos resultados previos, vamos a dar una respuesta a las dos cuestiones planteadas al principio de esta sección para el caso de espacios de Hilbert de dimensión arbitraria finita. Esta respuesta se basa en dos resultados.

Primero, un teorema muy conocido de von Neumann [Von Neumann 31] y Varadarajan [Varadarajan 62], afirma que dado un conjunto de observables compatibles $\{O_i\}$, existe un observable O y un conjunto de funciones Borel $\{f_i\}$ tal que $O_i = f_i(O)$. En particular, si $\{O_i\}$ es un conjunto completo de observables compatibles, el observable O es maximal (no-degenerado)[80]. Pero, tal como señala Jauch [Jauch 68], p. 103, "The significance of this theorem is more mathematical than practical. The reason is that it is often easy to describe physical arrangements which measure a set of commuting observables, while it may be practically impossible to describe such an arrangement for the observable O of which they are all functions."

Swift y Wright [Swift-Wright 80] proporcionan el segundo resultado importante para nuestro propósito: "Modulo the ability to create in the laboratory any electromagnetic field consistent with Maxwell's equations, ... using a generalized Stern-Gerlach apparatus, every Hermitian operator acting on the Hilbert space of a spin-s particle can be measured and a beam of particles can be produced in the state corresponding to any given ray in the Hilbert space."

Ambos resultados nos proporcionan una solución a las cuestiones planteadas al inicio de esta sección. Identificando $\mathbf{H}^n$ con el espacio de Hilbert de los estados de espín de una sola partícula de espín $s = (n-1)/2$, obtenemos un ejemplo físico en el cual cualquier conjunto completo de proposiciones que aparezca en las demostraciones del teorema BKS en cualquier dimensión $n \geq 3$ puede expresarse (von Neumann y Varadarajan) en términos de un único observable maximal, y éste a su vez puede medirse, al menos en principio (Swift y Wright), usando un Stern-Gerlach

---

[80] El teorema de von Neumann-Varadarajan no es más que una extensión del teorema de von Neumann-Neumark [Von Neumann 31], [Neumark 54], p. 227, que dice que los observables representados por operadores conmutativos son conmensurables (esto es, se pueden medir conjuntamente sobre un mismo sistema individual). Una demostración del teorema de von Neumann-Neumark para espectro discreto puede encontrarse en [Park-Margenau 68], pp. 231-232.

"generalizado" adecuado. Otra solución a las cuestiones planteadas en esta sección se dará en el capítulo 4, allí con sistemas de varias partículas.

2. 5. Demostraciones multiplicativas

2. 5. 1. Demostraciones aditivas vs. multiplicativas

Las *demostraciones aditivas* del teorema de BKS son aquellas que se basan en resoluciones de la identidad[81] como suma de proyectores ortogonales:

$$\hat{I} = \sum_{j=1}^{d} \hat{P}_j, \tag{2. 103}$$

siendo d es la dimensión del espacio de Hilbert. "Se basan" quiere decir que los valores que las variables ocultas asignan a las correspondientes proposiciones cumplen un caso particular de la condición (BKS4) que se conoce como la *regla de la suma:*

$$1 = \sum_{j=1}^{d} v(P_j).^{82} \tag{2. 104}$$

En tal caso decimos que un conjunto de proposiciones es totalmente no-coloreable si no existe ninguna asignación de valores, que verifique las condiciones (BKS1)-(BKS3) y la regla de la suma.

Las demostraciones *multiplicativas*[83] del teorema de BKS son aquellas que se basan en descomposiciones de la identidad como producto de operadores mutuamente conmutativos:

$$\hat{I} = \prod_{j} \hat{O}_j, \tag{2. 105}$$

---

[81] Del operador identidad de todo el espacio de Hilbert o del operador identidad de subespacios del espacio de Hilbert, como propone Clifton. Ver la Sec. 2. 4. 2. h.

[82] El 1 de la izquierda se justifica porque debe cumplirse (BKS3), y el único valor propio de la matriz identidad es 1.

[83] El nombre es el que se usa en [Peres 96 b]; la distinción entre unas y otras está implícita en la distinción que se hace en [Fine-Teller 78] entre la "*Sum rule:* $v\left(\sum A_i\right) = \sum v(A_i)$, for commuting A_i.", p. 634, y la "*Product rule:* $v(AB) = v(A)\, v(B)$, for all commuting A and B.", p. 635.

Es decir, los valores que las variables ocultas asignan a los correspondientes observables[84] cumplen otro caso particular distinto de la hipótesis (BKS4) que se llama la *regla del producto:*

$$1=\prod_j v(O_j). \qquad (2.\ 106)$$

Un conjunto de observables permite una demostración del teorema de BKS si no es posible asignarles valores de manera que verifiquen (BKS1)-(BKS3) y la regla del producto.

2. 5. 2. La tabla de Peres-Mermin

En [Peres 90] se presenta una demostración del teorema de Bell-EPR con "elementos de realidad recursivos" sobre un sistema de dos partículas de espín 1/2 que veremos en la Sec. 3. 4. 3; al final de ese artículo hay una nota añadida durante las pruebas de imprenta, en la que se comenta una extensión de la demostración propuesta por Mermin; esa misma extensión se presenta en [Mermin 90 d]. La propuesta de Mermin permite convertir la demostración de Peres del teorema de Bell-EPR con elementos de realidad recursivos, en una demostración independiente del estado del teorema de BKS. Esta demostración es el primer ejemplo de una demostración multiplicativa del teorema de BKS[85].

La extensión de Mermin del argumento de Peres, contiene 9 operadores que forman 6 descomposiciones multiplicativas de la identidad distintas. Esos operadores y sus descomposiciones los podemos escribir en la siguiente tabla :

$\hat{\sigma}_x^{(1)}\otimes\hat{I}^{(2)}$	$\hat{I}^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(2)}$	$\hat{\sigma}_x^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(2)}$	$=\hat{I}^{(1+2)}$
$\hat{I}^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(2)}$	$\hat{\sigma}_z^{(1)}\otimes\hat{I}^{(2)}$	$\hat{\sigma}_z^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(2)}$	$=\hat{I}^{(1+2)}$
$\hat{\sigma}_x^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(2)}$	$\hat{\sigma}_z^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(2)}$	$\hat{\sigma}_y^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_y^{(2)}$	$=-\hat{I}^{(1+2)}$
$=\hat{I}^{(1+2)}$	$=\hat{I}^{(1+2)}$	$=\hat{I}^{(1+2)}$	

Tabla. 2. 4. La tabla de Peres-Mermin.

[84] En todos los casos que consideraremos serán observables con dos autovalores distintos, ambos degenerados.

[85] Lo que hace Mermin es añadir a los operadores 6 operadores que considera Peres otros 3: $\hat{\sigma}_x^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(2)}$, $\hat{\sigma}_z^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(2)}$, $\hat{\sigma}_y^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_y^{(2)}$; ver la Sec. 3. 4. 3.

En la tabla 2. 4, cada fila y cada columna está formada por tres operadores mutuamente conmutativos. Además, el producto matricial ordinario de cada fila y de cada columna da la matriz identidad 4×4 (que hemos denotado por $\hat{I}^{(1+2)}$), salvo en la última fila en la que da *menos* la matriz identidad. Si suponemos las hipótesis (BKS1)-(BKS3) y la regla del producto, es decir, si dados tres operadores conmutativos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ tales que su producto es la identidad,

$$\hat{A}\hat{B}\hat{C}=\hat{I}, \tag{2. 107}$$

entonces el producto de los valores de variables ocultas asociados deben satisfacer,

$$v(A)\times v(B)\times v(C)=1, \tag{2. 108}$$

o, análogamente, -1, si el producto de los tres operadores es menos la identidad. Con estas hipótesis, y leyendo de izquierda a derecha las columnas de la tabla 1 y de arriba a abajo sus filas, se obtienen las siguientes 6 ecuaciones:

$$v(\sigma_x^{(1)})\times v(\sigma_x^{(2)})\times v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)})=1, \tag{2. 109}$$

$$v(\sigma_z^{(1)})\times v(\sigma_z^{(2)})\times v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)})=1, \tag{2. 110}$$

$$v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)})\times v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)})\times v(\sigma_y^{(1)}\otimes\sigma_y^{(2)})=1, \tag{2. 111}$$

$$v(\sigma_x^{(1)})\times v(\sigma_z^{(2)})\times v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)})=1, \tag{2. 112}$$

$$v(\sigma_z^{(1)})\times v(\sigma_x^{(2)})\times v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)})=1, \tag{2. 113}$$

$$v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)})\times v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)})\times v(\sigma_y^{(1)}\otimes\sigma_y^{(2)})=-1. \tag{2. 114}$$

Las ecs. (2. 109)-(2. 114) son incompatibles como prueba el siguiente argumento: Cada valor (+1 ó −1, por BKS3) aparece dos veces, luego el producto de todos los lados izquierdos debe ser +1, sin embargo el producto de los lados derechos es −1.

2. 5. 3. La estrella de Mermin

En [Mermin 90 d] se hace una extensión de la demostración del teorema de Bell-EPR de GHZ-Mermin que veremos en la Sec. 3. 4. 2, de manera que se convierte en una demostración multiplicativa independiente del estado del teorema de BKS[86].

Las hipótesis son completamente similares a las de la sección anterior. La extensión de Mermin se basa en 5 descomposiciones multiplicativas de la identidad, que representaremos en la figura 2. 27.

Como antes, leyendo la figura obtenemos las siguientes 5 ecuaciones:

$$v(\sigma_z^{(1)})\times v(\sigma_x^{(2)})\times v(\sigma_x^{(3)})\times v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)}\otimes\sigma_x^{(3)})=1, \qquad (2.\ 115)$$

$$v(\sigma_x^{(1)})\times v(\sigma_z^{(2)})\times v(\sigma_z^{(3)})\times v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)}\otimes\sigma_z^{(3)})=1, \qquad (2.\ 116)$$

$$v(\sigma_x^{(1)})\times v(\sigma_z^{(2)})\times v(\sigma_x^{(3)})\times v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)}\otimes\sigma_x^{(3)})=1, \qquad (2.\ 117)$$

$$v(\sigma_z^{(1)})\times v(\sigma_z^{(2)})\times v(\sigma_z^{(3)})\times v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)}\otimes\sigma_z^{(3)})=1, \qquad (2.\ 118)$$

$$v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)}\otimes\sigma_x^{(3)})\times v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)}\otimes\sigma_z^{(3)}) \times v(\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)}\otimes\sigma_x^{(3)})\times v(\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)}\otimes\sigma_z^{(3)})=-1 \qquad (2.\ 119)$$

Las ecs. (2. 115)-(2. 119) son incompatibles, el argumento es el de la sección anterior: Cada valor (+1 ó −1) aparece dos veces, luego el producto de todos los lados izquierdos debe ser +1, sin embargo el producto de los lados derechos es −1.

Desde este punto de vista la demostración de GHZ-Mermin admite una lectura adicional como una demostración multiplicativa dependiente del estado del teorema de BKS[87].

---

[86] Al principio de [Mermin 90 d] se hace la siguiente atribución de méritos: "The discussion that follows is inspired by a new version of Bell's [Bell-EPR] theorem due to Greenberger, Horne, and Zeilinger (GHZ), by the observation of [Allen] Stairs [private communication] that GHZ can also be made the basis for a KS theorem, and by a further simplification of GHZ version of the KS theorem due to Peres" La tabla de Peres-Mermin y la estrella de Mermin se recogen también en [Bohm-Hiley 93], pp. 118-123. Para una explicación de por qué la teoría de Bohm elude éste tipo de demostraciones véase [Dewdney 92, 93], [Pagonis-Clifton 95].

[87] Para comparar la estrella de Mermin con la demostración del teorema de Bell-EPR de GHZ-Mermin de la Sec. 3. 4. 2, téngase en cuenta que en la Sec. 2. 5. 3 hemos hecho una elección de base distinta a la que se hace allí. La elección de base de la Sec. 2. 5. 3 es la adecuada para que aparezcan sólo las componentes σ_x, σ_z (reales en la representación habitual); la elección de base de la Sec. 3. 4. 2 es la

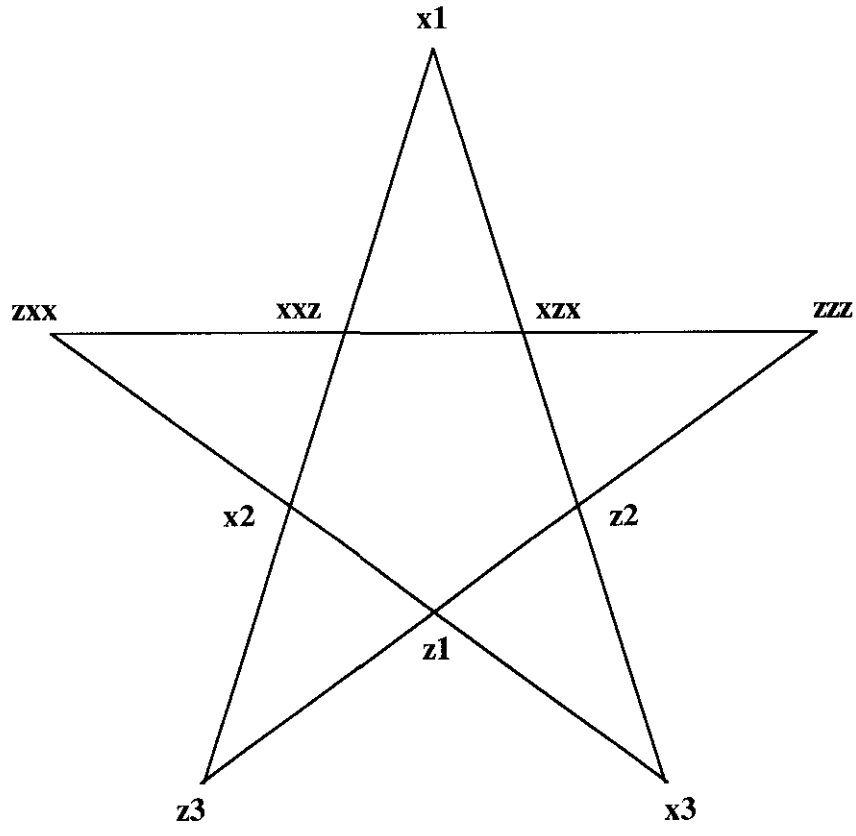


Fig. 2. 27. La estrella de Mermin es una estrella de cinco puntas con un operador en cada intersección de dos rectas. Los cuatro operadores que están en una misma recta son mutuamente conmutativos, y el producto matricial de los cuatro es la matriz identidad 8×8, salvo en la recta horizontal (la que contiene los cuatro operadores no-locales) en la que el producto es *menos* la matriz identidad. La notación es:

x1: $\hat{\sigma}_x^{(1)}\otimes\hat{I}^{(2)}\otimes\hat{I}^{(3)}$ **zxx**: $\hat{\sigma}_z^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(2)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(3)}$

z1: $\hat{\sigma}_z^{(1)}\otimes\hat{I}^{(2)}\otimes\hat{I}^{(3)}$ **xzx**: $\hat{\sigma}_x^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(2)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(3)}$

x2: $\hat{I}^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(2)}\otimes\hat{I}^{(3)}$ **xxz**: $\hat{\sigma}_x^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(2)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(3)}$

z2: $\hat{I}^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(2)}\otimes\hat{I}^{(3)}$ **zzz**: $\hat{\sigma}_z^{(1)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(2)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(3)}$

x3: $\hat{I}^{(1)}\otimes\hat{I}^{(2)}\otimes\hat{\sigma}_x^{(3)}$

z3: $\hat{I}^{(1)}\otimes\hat{I}^{(2)}\otimes\hat{\sigma}_z^{(3)}$

---

adecuada para conservar la forma habitual del estado de GHZ-Mermin. La relación entre ambas bases es (Sec. 3. 4. 2 → Sec. 2. 5. 3): $x\to z$, $y\to x$, $z\to y$. De esta manera, el estado de GHZ-Mermin explícitamente considerado en 3. 4. 2 se obtiene deshaciendo el cambio en uno de los 8 vectores propios comunes a los cuatro operadores no-locales de esta sección; ver la ec. (4. 43).

Nótese que, a diferencia de en la tabla de Peres-Mermin, en la estrella de Mermin todos los operadores no-locales (los operadores *zxx*, *xxz*, *xzx*, *zzz*) son mutuamente conmutativos (con lo cual existe una base de vectores propios comunes a ellos; por el contrario, no existe ningún vector propio común a los 5 operadores no-locales, *xz*, *zx*, *yy*, *zz*, *xx*, de la tabla de Peres-Mermin).

2. 5. 4. Generalización a *n* partículas de espín 1/2

En [Pagonis-Redhead-Clifton 91] se presenta una generalización de la estrella de Mermin a *n* partículas de espín 1/2[88].

Notación:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline z & x & x \\ x & z & x \\ x & x & z \\ z & z & z \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(3)} \\ \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(3)} \\ \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(3)} \\ \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (2.\ 120)$$

Pagonis, Redhead, y Clifton ven que una tabla formada por los operadores no-locales de (2. 120) y los correspondientes operadores locales (por ejemplo, para la primera fila de (2. 120), $\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)} \otimes \hat{I}^{(3)}$, $\hat{I}^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{I}^{(3)}$, $\hat{I}^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(3)}$) da lugar a una contradicción si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) La diferencia entre el número de *z*'s entre dos filas cualquiera es un número par (esto asegura que los operadores sean conmutativos dos a dos).

(ii) Cada columna tiene un número par de *x*'s y *z*'s (esto asegura que el producto de los operadores no-locales por los correspondientes operadores locales sea la identidad).

(iii) El producto de las componentes de espín de cada columna es menos la identidad en un número impar de columnas (esto asegura que el producto de los operadores no-locales es menos la identidad).

Llaman *contradicción global* a aquella en la que al quitar de una sola partícula ya no resulta una contradicción (de manera que en una contradicción global todas las partículas involucradas lo están de una forma necesaria).

Consideran cuatro ejemplos de contradicción global:

---

[88] En el mismo artículo se estudia el límite $n \to \infty$. Un tratamiento similar se hace en [Cereceda 95].

(a) Para $n = 3, 7, 11, \ldots$ la tabla (2. 121) de $n+1$ operadores no-locales (y sus correspondientes operadores locales) proporciona una contradicción global.

$$\begin{array}{|ccccc|}\hline z & x & x & \ldots & x \\ x & z & x & & x \\ x & x & z & & x \\ \vdots & & & \ddots & \\ x & x & x & & z \\ z & z & z & & z \\ \hline\end{array} \qquad (2.\ 121)$$

(b) Para n impar, $n \geq 3$, la tabla (2. 122) de cuatro operadores no-locales (y sus correspondientes operadores locales) proporciona una contradicción global.

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline z & x & x & x & \ldots & x \\ x & z & x & x & & x \\ x & x & z & z & & z \\ z & z & z & z & & z \\ \hline\end{array} \qquad (2.\ 122)$$

Nótese que en los ejemplos (a) y (b), en el caso $n = 3$ se recuperan los resultados de la sección anterior.

(c) Para n par, $n \geq 4$, la tabla (2. 123) de 6 operadores no-locales (y sus correspondientes operadores locales) proporciona una contradicción global.

$$\begin{array}{|ccccccc|}\hline z & x & x & x & x & \ldots & x \\ z & x & x & x & x & & x \\ x & z & x & x & x & & x \\ x & x & z & x & x & & x \\ x & x & x & z & z & & z \\ x & z & z & z & z & & z \\ \hline\end{array} \qquad (2.\ 123)$$

(d) Para cualquier $n \geq 3$ la tabla (2. 124) de 6 operadores no-locales (y sus correspondientes operadores locales) proporciona una contradicción global.

$$\begin{array}{|ccccccccccc|}\hline z & x & x & z & x & x & \ldots & z & x & x \\ z & x & x & x & z & x & & x & z & x \\ z & x & x & x & x & z & & x & x & z \\ x & z & x & z & x & x & & z & x & x \\ x & x & z & x & z & x & & x & z & x \\ z & z & z & x & x & z & & x & x & z \\ \hline\end{array} \qquad (2.\ 124)$$

En cada una de esas tablas al multiplicar cada operador no-local por sus correspondientes operadores locales se obtiene la identidad, y el producto de todos los operadores no-locales da *menos* la identidad. Un argumento de paridad como el de las secciones anteriores revela, en cada caso, la contradicción.

2. 6. Relación entre las demostraciones aditivas y las multiplicativas

2. 6. 1. P-24 a partir de la tabla de Peres-Mermin

Vamos a ilustrar la relación entre las demostraciones aditivas y las demostraciones multiplicativas en un caso concreto; veremos cómo Peres obtuvo el conjunto de 24 proyectores unidimensionales que nosotros llamamos P-24 [Peres 91], a partir de la tabla de Peres-Mermin de 9 operadores en dimensión 4 [Peres 90], [Mermin 90 d]. En la tabla de Peres-Mermin hay 6 conjuntos completos de operadores conmutativos; para cada uno de ellos existe una base formada por cuatro vectores propios comunes (o equivalentemente, por cuatro proyectores unidimensionales); la idea es sencilla: puesto que las hipótesis del teorema de BKS impiden asignar valores definidos a los operadores, también impedirán asignar valores a los proyectores en que podemos descomponer cualquier conjunto completo de los operadores. Es sencillo comprobar que la elección explícita de vectores que usamos para implementar P-24 en la Sec. 2. 4. 3 está formada precisamente por los vectores propios comunes a cada conjunto completo de operadores de la tabla de Peres-Mermin de la Sec. 2. 5. 1. Por ejemplo, los vectores comunes al conjunto de operadores conmutativos $\{\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)},\ \hat{I}^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)},\ \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}\}$ son los vectores de la base canónica $\{|++\rangle = (1, 0, 0, 0),\ |+-\rangle = (0, 1, 0, 0),\ |-+\rangle = (0, 0, 1, 0),\ |--\rangle = (0, 0, 0, 1)$. En particular, los vectores propios comunes a uno de los dos conjuntos completos de operadores que contienen operadores no locales están formados por vectores entangled; por ejemplo, los vectores propios del conjunto $\{\hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)},\ \hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)},\ \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}\}$ son $\{|++\rangle \pm |--\rangle = (1, 0, 0, \pm 1),\ |+-\rangle \pm |-+\rangle = (0, 1, \pm 1, 0)\}$. Por eso en P-24 hay 16 vectores factorizables y 8 vectores entangled[89].

[89] Cada uno de los vectores entangled representa un estado sobre el que se puede hacer una demostración del teorema de Bell-EPR con una definición recursiva de elementos de realidad como la que veremos en la Sec. 4. 3. 3. Nótese que uno de ellos, el (0, 1, –1, 0), es el singlete.

2. 6. 2. KP-36 a partir de la estrella de Mermin

Aplicando el mismo procedimiento de la sección anterior (para pasar de la tabla de Peres-Mermin a P-24) a la estrella de Mermin, Kernaghan y Peres [Kernaghan-Peres 95] obtuvieron una demostración aditiva con 40 direcciones en dimensión 8 (puesto que la estrella de Mermin se refiere a estados de espín de un sistema de 3 partículas de espín 1/2). El argumento es igual al anterior: en la estrella de Mermin hay cinco conjuntos completos de operadores, por tanto cada uno de ellos tendrá una base formada por 8 vectores propios comunes, lo que hacen un total de 40 direcciones. Las 40 direcciones explícitas de ese conjunto, al que llamaremos *KP-40*, así como sus relaciones de ortogonalidad completas se ilustran en la figura 2. 28.

A diferencia de la tabla de Peres-Mermin, la Estrella de Mermin sólo tiene un conjunto completo de operadores compatibles que contenga más de un operador no-local, luego de los 40 vectores sólo 8 serán entangled[90]. Kernaghan y Peres demuestran además que existe un subconjunto de KP-40 con 36 direcciones, al que llamaremos *KP-36*, que también es no-coloreable. De hecho, hemos comprobado por ordenador que existen 320 subconjuntos críticos no-coloreables de KP-40 con 36 direcciones.

Nótese que los subconjuntos críticos no-coloreables de 36 vectores de KP-40 son distintos que los conjuntos críticos de 36 vectores de la Sec. 2. 4. 3 g. Los KP-36 tienen 11 óctadas ortogonales y cada dirección pertenece a 2 ó 4 de ellas (con lo que se puede demostrar la no-coloreabilidad mediante un argumento de paridad), los de la Sec. 2. 4. 3 tenían 81 óctadas y cada dirección pertenece a 18 de ellas (por lo que también funciona el argumento de paridad).

[90] Cada uno de ellos 8 vectores representa un estado de GHZ sobre el que se puede hacer una demostración del teorema de Bell-EPR como la que veremos en la Sec. 3. 4. 2. De hecho, el estado que se emplea en esa sección es uno de estos con el cambio de variables adecuado.

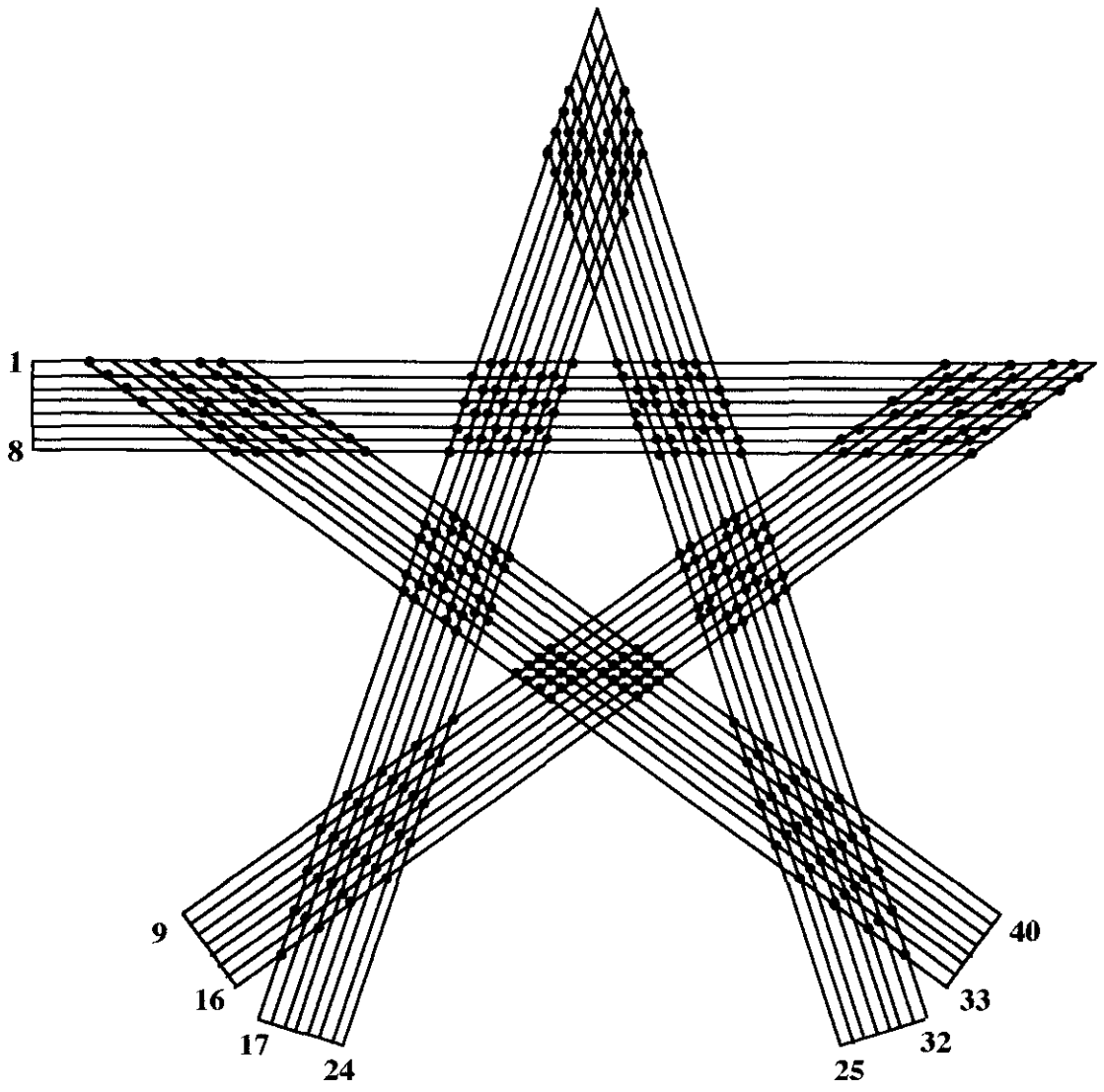


Fig. 2. 28. Relaciones de ortogonalidad entre las 40 direcciones de KP-40. Las direcciones explícitas están en la página siguiente. Por ejemplo, la dirección 1 es ortogonal a las direcciones 2-8, 33, 36, 38, 39, 18, 19, 21, 24, etc. Cada conjunto de 8 direcciones (las direcciones 1-8, 9-16, etc.) está formado por vectores propios comunes a uno de los cinco conjuntos de operadores conmutativos de la estrella de Mermin. Por ejemplo, los vectores 1-8 son propios de los operadores zxx, xxz, xzx, zzz; la notación para los operadores es la de la figura 2. 27. K-40 contiene 25 óctadas ortogonales. Hay 320 subconjuntos críticos no-coloreables de 36 direcciones (por ejemplo, uno se obtiene prescindiendo de las direcciones 9, 29, 36 y 4, y otro eliminando 9, 29, 36 y 24 —estos son los dos únicos que se obtienen eliminando 9, 29 y 36—). Cada uno de ellos contiene 11 óctadas ortogonales y cada dirección aparece en dos ó cuatro de ellas, por lo que se puede demostrar la no-coloreabilidad mediante un argumento de paridad.

zxx, xxz, xzx, zzz:

1: (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0,–1)
2: (1, 0, 0, 1, 0, 1,–1, 0)
3: (1, 0, 0, 1, 0,–1, 1, 0)
4: (0, 1, 1, 0,–1, 0, 0, 1)
5: (1, 0, 0,–1, 0, 1, 1, 0)
6: (0, 1,–1, 0, 1, 0, 0, 1)
7: (0,–1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)
8: (–1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)

x1, z2, x3, xzx:

25: (0, 0, 1,–1, 0, 0,–1, 1)
26: (0, 0, 1, 1, 0, 0,–1,–1)
27: (1,–1, 0, 0,–1, 1, 0, 0)
28: (1, 1, 0, 0,–1,–1, 0, 0)
29: (0, 0, 1,–1, 0, 0, 1,–1)
30: (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)
31: (1,–1, 0, 0, 1,–1, 0, 0)
32: (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)

z1, z2, z3, zzz:

9: (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
10: (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
11: (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)
12: (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)
13: (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)
14: (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)
15: (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)
16: (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)

z1, x2, x3, zxx:

33: (0, 0, 0, 0, 1,–1,–1, 1)
34: (0, 0, 0, 0, 1, 1,–1,–1)
35: (0, 0, 0, 0, 1,–1, 1,–1)
36: (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)
37: (1,–1,–1, 1, 0, 0, 0, 0)
38: (1, 1,–1,–1, 0, 0, 0, 0)
39: (1,–1, 1,–1, 0, 0, 0, 0)
40: (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)

x1, z2, z3, xzz:

17: (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)
18: (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)
19: (1, 0,–1, 0, 1, 0,–1, 0)
20: (0, 1, 0,–1, 0, 1, 0,–1)
21: (1, 0, 1, 0,–1, 0,–1, 0)
22: (0, 1, 0, 1, 0,–1, 0,–1)
23: (1, 0,–1, 0,–1, 0, 1, 0)
24: (0, 1, 0,–1, 0,–1, 0, 1)

2. 6. 3. Clasificación de las demostraciones de BKS

En la tabla 2. 5 figuran, ordenadas alfabéticamente por autores, algunas demostraciones del teorema de BKS propuestas en la literatura. Cada una está clasificada de acuerdo a los siguientes criterios:

(1) Dimensionalidad del espacio de Hilbert.

(2) Finita (f) o continua (c). Ver la Sec. 2. 3. 5.

(3) Aditiva (a) o multiplicativa (m). Ver la Sec. 2. 5. 1.

(4) Basada en descomposiciones de la identidad del espacio de Hilbert total del sistema o en descomposiciones de la identidad de subespacios del espacio de Hilbert total; añadiremos (s) en las del segundo tipo. Ver la Sec. 2. 4. 2. h.

(5) Independiente del estado (i) o dependiente del estado. En el segundo caso la demostración puede ser no-probabilística (d) o probabilística (p) (Ver la Sec. 2. 3. 6).

(6) Número de operadores. En el caso (i) escribiremos sólo el número de operadores necesarios para la demostración; en el caso (d) escribiremos el número de proposiciones de partida con valor definido y a continuación el número de operadores (entre ellos pondremos un "+"); en el caso (p) escribiremos el número de proposiciones de partida con valor definido, el número de operadores, y el número de proposiciones que tienen que tener valor bien definido en la postselección (y entre ellos sendos "+").

(7) Con (sólo) proyectores de rango uno o con operadores más generales; en el segundo caso añadiremos entre corchetes el rango de los proyectores.

(8) Si se propone una interpretación física explícita en términos del estado de espín de un sistema de n partículas de espín s añadiremos ($n \times s$).

Por ejemplo, [Cabello 94]: 3, f, a, d, 1+37, 1×1, es una demostración en dimensión 3, (f)inita, (a)ditiva, (d)ependiente del estado, con 38 proyectores unidimensionales (en la que la contradicción se alcanza asignando un valor particular a uno de ellos; ver la Sec. 2. 3. 4) y que se puede interpretar en términos de los estados de espín de una partícula de espín 1.

	(1)	(2)	(3-4)	(5)	(6-7)	(8)
[Bechmann Johansen 94]	3	f	a	p	1+9+1	1×1
[Belinfante 73], p. 17	3	c	a			1×1
[Bell 66]	3	c	a			
[Cabello 94]	3	f	a	d	1+37	1×1
[CG 95 b]	3	f	a	p	1+12+1	1×1
[CEG 96 a]	4	f	a	i	18	2×1/2
	4	f	a	d	1+10	2×1/2
	4	f	a	p	1+7+1	2×1/2
[CEG 96 b]	4	f	a (s)	i	14	
	4	f	a	d	1+5	2×1/2
[CEG 96 c]	5	f	a	i	29	
	6	f	a	i	31	
	7	f	a	i	34	
	8	f	a	i	36	
CK, ver [Peres 93], p. 198	3	f	a	i	31	
[Clifton 93]	3	f	a	p	1+11+1	1×1
Friedberg, ver [Jammer 74], p. 324	3	f	a	d	1+?	1×1
[Galindo 75]	3	c	a			
[Gill-Keane 96]	3	c	a			
[Gleason 57]	3	c	a			
[Hultgren-Shimony 77]	3	c	a			
[Kernaghan 94]	4	f	a	i	20	2×1/2
[Kernaghan-Peres 95]	8	f	a	i	36	3×1/2
	8	f	a	d	1+13	3×1/2
	8	f	a	i	14[2]+16	3×1/2
[KS 67]	3	f	a	i	117	1×1
[Mermin 90 d]	8	f	m	d	1+6[2]	3×1/2
	8	f	m	i	10[2]	3×1/2
[de Obaldia-Shimony-Wittel 88]	3	f	a	i	138	1×1
[Penrose 92]	3	f	a	i	33	1×1
	4	f	a	i	40	1×3/2
[Peres-Ron 88]	3	f	a	d	40 (71)	1×1
[Peres 90 a]	4	f	m	d	1+6[2]	2×1/2
	4	f	m	i	9[2]	2×1/2
[Peres 91]	3	f	a	i	33	1×1
	3	f	a	i	24	2×1/2
[Peres 96 b]	4	f	a	i	9[2]	2×1/2
[Stairs 83], pp. 588-589	3	f	a	p	1+6+1	1×1
[Vermaas 94]	3	f	a	p	2+5+1	1×1
[Zimba-Penrose 93]	4	f	a	i	28	1×3/2

Tabla 2. 5. Clasificación de demostraciones de BKS.

Capítulo 3. El teorema de Bell-EPR

"Once upon a time everybody knew why measurements in quantum mechanics don't reveal preexisting properties. It was because the act of acquiring knowledge unavoidably messes up the object being studied (...). In 1935 this state of happy innocence was forever dispelled by Einstein, who with Boris Podolsky and Nathan Rosen discovered how to learn about an object by messing up only some stuff it left behind in a faraway place."

[Mermin 94 a], p. 9.

"What *can* they [EPR] mean? Do *you* understand it?"

Bohr a Rosenfeld, 1935, [Wheeler-Zurek 83], p. 142.

"Bell's theorem is the most profound discovery of science."

[Stapp 75], p. 271.

"We believe this proof [GHZ] makes the case against local realism the strongest it has been since John Bell's ground-breaking work over 25 years ago."

[Clifton-Redhead-Butterfield 91 a], p. 181.

"The work of Greenberger, Horne and Zeilinger (GHZ) has opened a new chapter of the over 60 years old discussion on the hidden variables problem."

[Zukowski 91 a], p. 198.

"How did something this simple and powerful [la demostración de Hardy] go undiscovered during the 30 years since John Bell proved his theorem?"

[Mermin 95 a], p. 618.

"Many commentators have been troubled by gaps in the EPR argument. The most significant lacuna is encountered at the place where the *simultaneous* reality of two conjugate parameters of the first system is inferred from the possibility of measuring *either* of the corresponding parameters of the second system. In general, the relevant parameters of the second system are themselves conjugate and so cannot be measured simultaneously."

[Howard 85], p. 174.

"Es curiosa (...) la demostración que hacéis de que puede haber tres observables no compatibles que, sin embargo dan lugar a elementos de realidad fuertes simultáneos. En mi opinión eso refuerza notablemente el argumento de EPR de que la mecánica cuántica es incompleta, porque libra al argumento de la crítica más importante."

Emilio Santos, e-mail del 25 de mayo de 1995.

Capítulo 3
El teorema de Bell-EPR

3. 1. Introducción

Este capítulo esta dividido esencialmente en cuatro partes. En la primera se reexamina el argumento de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) sobre la "incompletitud" de la MC. El objetivo es presentar una formulación fiel y completa del argumento y al mismo tiempo señalar aquellos puntos de la propuesta original que han sido considerados poco claros o problemáticos: ello es pertinente ya que las contribuciones originales de este capítulo tienen que ver con estos aspectos. En la segunda parte se enuncia el teorema de Bell-EPR sobre imposibilidad de variables ocultas locales que da título al capítulo; como demostración del mismo se presentan tres de las formas más habituales de las desigualdades de Bell, así como una demostración simplificada (sin desigualdades, pero que exhibe el mismo tipo de contradicción que las demostraciones anteriores) del teorema de Bell-EPR debida a Mermin: esta parte se justifica esencialmente por motivos de completitud. En la tercera parte, la más larga del capítulo, se introducen las demostraciones algebraicas (también llamadas "sin desigualdades") más características del teorema de Bell-EPR: la versión de Mermin, usando tres partículas de espín 1/2, de la demostración original de Greenberger, Horne y Zeilinger (GHZ), una simplificación con solo dos partículas (y una definición recursiva de elementos de realidad) propuesta por Peres, y la versión con dos partículas de espín 1/2 de la demostración de Hardy; la relación entre las demostraciones algebraicas del teorema de Bell-EPR y las demostraciones del teorema de BKS se verá en el capítulo 4. La última parte del capítulo está dedicada a comprobar que es posible reformular el argumento de EPR en términos de elementos de realidad inferidos a partir de medidas

efectivamente realizadas en el mismo sistema individual (elementos de realidad fuertes); además, también es posible demostrar que la MC y los elementos de realidad fuertes son incompatibles (teorema de Bell-EPR con elementos de realidad fuertes).

Salvo la última parte, las otras tres son esencialmente de revisión más o menos detallada de resultados conocidos (la revisión del argumento de EPR es particularmente detallada, dada su importancia para la última parte del capítulo).

3. 2. El argumento de EPR

3. 2. 1. Introducción

En las siguientes secciones se resume y comenta aquellos pasajes del artículo de EPR [EPR 35] que son esenciales para comprender el argumento. Las sucesivas secciones tratan de: la hipótesis de validez de la MC (Sec. 3. 2. 2), la condición necesaria de completitud de una teoría física (Sec. 3. 2. 3.), la condición suficiente de existencia de elementos de realidad (Sec. 3. 2. 4), la diferencia entre separabilidad y localidad (Sec. 3. 2. 5), la diferencia entre la interpretación en sentido fuerte y la interpretación en sentido débil de la condición de elemento de realidad (Sec. 3. 2. 6), la objeción lógica más importante al argumento de EPR (Sec. 3. 2. 7), el ejemplo original de EPR y su modificación por Bohm (Sec. 3. 2. 8), y, por último, la conclusión de incompletitud de la MC (Sec. 3. 2. 9). Las Secs. 3. 2. 6 y 3. 2. 7 preparan el camino para la reformulación del argumento de EPR con elementos de realidad fuertes que se hará en la Sec. 3. 5. 3[1].

---

[1] Sobre la concepción del artículo de EPR hay bastantes oscuridades: por ejemplo Jammer escribe, [Jammer 74], p. 185: "We do not known precisely what part of the paper is due to each of the three authors or whether it was written by all three without "division of labor." Professor Rosen, when asked about this point, did not remember the detail but had the impression that the latter was the case. There seems, however, to be no doubt that the main idea was due to Einstein. For in the letter to Epstein [de 1945], it will be recalled, Einstein wrote explicitly: "I myself arrived at the ideas starting from a simple thought-experiment." ["Ich selber bin auf die Uberlegungen gekommen, ausgehend von einem einfachen Gedankenexperiment."] What was needed to produce the paper was to translate these ideas into the language of quantum mechanics and to illustrate them in terms of a fully calculated example." Sin embargo, en [Fine 89], p. 454, se dice que: "The EPR paper was actually written by Podolsky, following several discussions among the three collaborators (see [Fine 86]). We do not know what Einstein's own relation was to the published version, for, unlike other manuscripts in this period, no drafts or typescripts of the original exist in the Einstein Archives [el de EPR fue el segundo artículo publicado por Einstein en los Estados Unidos]. We do know that immediately after its publication Einstein expressed serious reservations about the paper, complaining to Schrödinger that Podolsky had

3. 2. 2. Hipótesis de validez de la MC

No es una hipótesis que aparezca explícitamente en el artículo de EPR[2], pero que sí hay que tenerla en cuenta en cualquier presentación del argumento que pretenda ser completa. Así, siguiendo a Jammer, [Jammer 74], p. 185, supondremos que:

> "The statistical predictions of quantum mechanics—at least to the extent they are relevant to the argument itself—are confirmed by experience."

"smothered" [vershüttet] the central ideas (see [Fine 86]). The two items of Podolsky's text that are more often cited in connection with hidden variables never occur subsequently in any of Einstein's numerous publications relating to the topics of EPR. He never uses the "criterion of reality" (which posits nondisturbance of a probability-one prediction as a sufficient condition for an observable to have a value), nor does he makes use of strict correlations between the coupled systems to assign simultaneous positions and momenta." La carta de Einstein a Schrödinger (del 19 de junio de 1935), puede encontrarse en [Howard 85], p. 175, en ella se dice: "I was very pleased with your detailed letter, which speaks about the little essay [EPR]. For reasons of language, this was written by Podolsky after many discussions. But still it has not come out as well as I really wanted; on the contrary, the main point was, so to speak, buried by erudition." ["Ich habe mich seher gefreut mit Deinem ausführlichen Briefe, der über die kleine Abhandlung handelt. Diese ist aus Sprachgründen von Podolsky geschrieben nach vielen Diskussionen. Es ist aber doch nicht so gut herausgekommen, was ich eigentlich wollte; sondern die Hauptsache ist sozusagen durch Gelehrsamkeit verschüttet."]En una carta a Popper (del 2 de septiembre de 1935), reproducida en [Combourieu 92] (en las pp. 1319-1322 está la carta manuscrita en alemán, y en las pp. 1316-1318 la traducción inglesa), Einstein sí usa el criterio de realidad "de Podolsky". Ver también, [Hájek-Bub 92]. Argumentos posteriores de Einstein para probar la incompletitud de la MC pueden encontrarse en [Einstein 36], [Einstein 48]. Otras referencias sobre aspectos históricos del artículo EPR son: [Jammer 66] (Apéndice B), [Jammer 74] (Cap. 6), [Fine 86] (todo un libro sobre Einstein y el realismo), [Selleri 88], [Deltete-Guy 91] (Einstein sobre EPR). En [Jammer 80] pueden encontrarse fotos de EPR (de 1935) y la reproducción de un artículo del New York Times del 4 de mayo de 1935 en el que se avanza su artículo. Sobre la postura de Einstein hacia la MC, véase: [Ballentine 72], [Deltete-Guy 90], [Guy-Deltete 90], [Fine 91]. Muchas de las sentencias más explícitas sobre la postura de Einstein ante la MC pueden encontrarse en [Born-Einstein 69]. Nathan Rosen, el último de los autores del artículo EPR con vida, murió el 18 de diciembre de 1995; ver [Peres 96 a], [Rosen 94].

[2] Como se desprende de la siguiente cita, EPR no cuestionan la *validez* de la MC: "It is the second question ["Is the description given by the theory complete?", y no la primera: "Is the theory correct?"] that we wish to consider here, as applied to quantum mechanics." [EPR 35], p. 777.

3. 2. 3. Condición necesaria de completitud

El argumento de EPR es un argumento para probar la "incompletitud" de la MC; necesitan pues un criterio para decidir cuando una teoría es "completa". Según EPR, "Whatever the meaning assigned to the term *complete*, the following requirement for a complete theory seems to be a necessary one:

> *Every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory.*

We shall call this the condition of completeness." [EPR 35], p. 777[3].

3. 2. 4. Condición suficiente de elementos de realidad

Ésta es la parte clave del artículo. Según EPR, [EPR 35], p. 777, "The elements of the physical reality cannot be determined by *a priori* philosophical considerations, but must be found by an appeal to results of experiments and measurements. A comprehensive definition of reality is, however, unnecessary for our purpose. We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable.

> *If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.*

It seems to us that this criterion, while far from exhausting all possible ways of recognizing a physical reality, at least provides us with one such way, whenever the conditions set down in it occur. Regarded not as a necessary, but merely as a sufficient, condition of reality, this criterion is in agreement with classical as well as quantum-mechanical ideas of reality."

---

[3] A algunos autores no les parece suficientemente explícita esta condición. Por ejemplo, para Hooker, "This argument [el de EPR] is actually invalid as it stands. To render it valid, we would need, for example, to strengthen [la condición de completitud] so that it reads: If a theory is complete, then every element of the physical reality must have a *precisely defined* counterpart in the physical theory." [Hooker 70], p. 857, nota 4. La de EPR y otras dos condiciones de completitud de una teoría física se estudian en [Elby-Brown-Foster 93].

Nótese la diferencia entre el concepto general de "variables ocultas" y la caracterización concreta de "elementos de realidad" que proponen EPR. Las variables ocultas en su versión "determinista" más habitual se postulan: "a physical quantity has a pre-existing *definite* value before a measurement", [Czachor 94], p. 2231; y detrás de este postulado está la pretensión de rescatar la idea clásica de realidad. Sin embargo, la MC es mucho más severa con la "realidad" que la física clásica; es por eso que EPR se ven en la obligación de ser más finos, y se conforman con un criterio *suficiente*[4].

En las Secs. 3. 2. 5 y 3. 2. 6 se deshacen algunas ambigüedades y se desvelan algunas sutilezas escondidas en el enunciado de EPR de la condición suficiente de elementos de realidad.

[4] Redhead señala lo siguiente: "Notice that we are not claiming that all elements of reality have predictable values—a thesis of determinism—only that, if it is predictable, then there must exist an element of reality to explain this possibility." [Redhead 87], p. 72.

3. 2. 5. Separabilidad y localidad

¿Qué significa "sin perturbar en modo alguno el sistema"?. Para asegurarse que el sistema no es perturbado de ninguna manera, se suele suponer que no existe posibilidad de conexión causal entre "el sistema" y las posibles fuentes de "perturbación". Para eso lo habitual es considerar que el sistema está separado de las posibles fuentes de perturbación (que suelen ser otros sistemas sobre los que se hacen mediciones) por intervalos de género-espacio[5]. Es común también en la literatura advertir que detrás de esta explicación de lo que significa "sin perturbar..." hay dos hipótesis diferentes: separabilidad y localidad, por ejemplo Howard, [Howard 85], p. 173, define:

Separabilidad: "spatially separated systems possess separate real states."

Localidad: "the state of a system can be changed only by local effects, effects propagated with finite, subluminal velocities."

El que EPR mezclen la localidad, y la separabilidad, con el criterio de realidad, oscurece la estructura lógica del argumento de incompletitud[6]. Sobre esto se sigue hablando en la próxima sección.

---

[5] Esto es lo que entenderemos cuando digamos que dos sistemas están "espacialmente separados". Esta condición *suficiente* (también) para asegurar que se cumple el requisito de "sin perturbar en modo alguno al sistema" está de acuerdo con la observación de EPR de que si "since at the time of measurement the two systems no longer interact, no real change can take place in the second system in consequence of anything that may be done to the first system." [EPR 35], p. 779, y también con una observación posterior de Einstein según la cual, al considerar dos sistemas S_1 y S_2, "... the real factual situation of the system S_2 is independent of what is done with the system S_1, which is spatially separated from the former." ["... Der reale Sachverhalt (Zustand) des Systems S_2 ist unabhängig davon, was mit dem von ihm räumlich getrennten System S_1 vorgenommen wird."] [Einstein 49], Vol. 1, p. 85 [84].

[6] Howard, [Howard 85], p. 173, dice que "There is no necessary connection between the two principles [separabilidad y localidad], though they are frequently stated as if they were one. Some theories conform to both principles, general relativity being an example of such a separable, local theory. Other theories conform to just one or the other. Quantum mechanics is, on my interpretation, a non-separable, local theory [véase la misma conclusión en [García Alcaine-Álvarez 87]]. Examples of the opposite sort, namely, of separable, non-local theories, are to be found among the non-local hidden-variable theories [en mi opinión la teoría de Bohm es de este tipo]." Sobre si Einstein distinguía o no entre separabilidad y localidad hay diversas opiniones, por ejemplo, [Paty 95], p. 202, nota 51: "... I

3. 2. 6. Elementos de realidad en sentido fuerte y débil

¿Qué significa "podemos predecir"?. Como se señala con frecuencia en la literatura la expresión "podemos predecir" en el criterio de elemento de realidad es ambigua, porque se puede entender en dos sentidos, por ejemplo, siguiendo a Greenberger, Horne, Shimony y Zeilinger (GHSZ), [GHSZ 90], p. 1142, nota 10[7]:

Sentido fuerte (strong sense): "podemos predecir" quiere decir "that data are at hand for making the prediction".

maintain that a sharp distinction like Howard's cannot be found in Einstein's writings, even in [Einstein 48], which gives the clearest definition of his understanding of these concepts. Clearly, in my opinion, Einstein considers that nonseparability and nonlocality are one and the same concept." Otra discusión paralela es la de qué entendía Einstein por localidad y cuantos tipos de "localidades" hay, por ejemplo [Fine 89], p. 455: "... the locality condition proposed by Einstein requires that influences on the hypothetical "real states" be local. It does not require local influences on the outcomes of measurement of the quantum observables. That is Bell's condition of locality. Hence if that condition were implicated in the violation of the Bell inequalities, it would not necessarily invalidate Einstein's locality, which stands or falls only with the new physics of which it was to be an ingredient." Esta distinción (un tanto filosófica) entre la localidad "de Bell" y la localidad "de Einstein" (con definiciones no siempre coincidentes) es común en la literatura. Como ejemplo de lo fino que se puede llegar a ser en estas discusiones, en [Redhead 87] se distinguen hasta 8 acepciones diferentes del término "localidad".

[7] Las cuatro opiniones siguientes: (i) Hay una ambigüedad en la expresión "podemos predecir", (ii) Hay dos posibles interpretaciones: la fuerte (a veces llamada restringida) y la débil (a veces llamada amplia), (iii) EPR emplean la débil, (iv) Si no empleasen la interpretación débil su argumento no funcionaría; se presentan explícitamente en: [Clauser-Shimony 78], p. 1885 (también reproducida en [Stapp 91], p. 12); [GHSZ 90], p. 1142, nota 10; [d'Espagnat 93], pp. 142-143; [Shimony 93], p. 187. En [Clauser-Shimony 78] y [Stapp 91] se habla de "broad" frente a "narrow", mientras que en [Hájek-Bub 92], [GHSZ 90], [d'Espagnat 93] y [Shimony 93], se habla de "weak" frente a "strong": hemos elegido esta segunda notación. Hay muy pocas dudas sobre cuál era la salida que *Einstein* (no EPR) hubiese dado a la ambigüedad, como queda claro, en el siguiente extracto de [Einstein 48] (tomado de la versión en inglés de [Born-Einstein 69], p. 172): "the complete measurement on S_1 represents a physical operation which only affects part R_1 of space. Such an operation, however, can have no direct influence on the physical reality in a remote part R_2 of space. It follows that every statement about S_2 which we arrive at as a result of a complete measurement of S_1 has to be valid for the system S_2, even if no measurement whatsoever is carried out on S_1. This would mean that all statements which can be deduced from the settlement of ψ_2 or $\underline{\psi_2}$ [dos funciones de onda diferentes adscribibles a S_2 dependiendo de qué se elija medir sobre S_1] must simultaneously be valid for S_2."

Sentido débil (weak sense): "podemos predecir" quiere decir "that a measurement could be made to provide data for the prediction".

Hay acuerdo en que "EPR assume the weak sense, and indeed unless they did so they could not argue that an element of physical reality exists for all components of spin [en la variante de Bohm del argumento de EPR[8]], those *which could have been measured as well as the one that actually was measured.*"[GHSZ 90]. También hay unanimidad en que "The EPR argument goes through only if "can predict" is understood in the weak sense." [Shimony 93], "If the narrow sense [el sentido fuerte] is accepted, then the argument of EPR clearly does not go through, since the experimental arrangements for measuring the position and momentum of a particle are incompatible." [Clauser-Shimony 78]. Hay pues una clara coincidencia sobre en qué sentido ha de deshacerse la ambigüedad. Por ejemplo, d'Espagnat [d'Espagnat 93] dice: "... if we want to be quite explicit on this point and remove the above said ambiguity we must replace the standard EPR formulation by the following one:

[Condición suficiente de existencia de elementos de realidad débiles] If the situation is such that, without in any way disturbing a system, a measurement could *be made, the outcome of which would enable us to predict with certainty the value of a physical quantity [what value would be obtained if a measurement of this quantity were made] pertaining to this system, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity."*

De hecho, los propios EPR al final de su artículo dicen: "One could object this conclusion [la incompletitud de la MC, ver la Sec. 3. 2. 9] on the grounds that our criterion of reality is not sufficiently restrictive. Indeed, one would not arrive at our conclusion if one insisted that two or more physical quantities can be regarded as simultaneous elements of reality *only when they can be simultaneously measured or predicted.* On this point of view, since either one or the other, but not both simultaneously, of the quantities P and Q can be predicted, they are not simultaneously real. This makes the reality of P and Q depend upon the process of measurement carried

[8] Esta cita hace referencia al ejemplo de Bohm para ilustrar el argumento de EPR (dos partículas de espín 1/2 preparadas en el estado singlete), la siguiente cita se refiere al ejemplo original del artículo de EPR (dos partículas en un estado en el que la posición relativa y el momento total tienen valores definidos); ambos ejemplos los veremos en la Sec. 3. 2. 8.

out on the first system, which does not disturb the second system in any way. No reasonable definition of reality could be expected to permit this." [EPR 35], p. 780[9].

En la próxima sección nos ocuparemos con mayor profundidad en las consecuencias que tiene el adoptar la versión débil de elemento de realidad[10].

3. 2. 7. La laguna más significativa

Esta sección se ocupa de consignar la objeción lógica más importante del argumento de EPR; veremos de dónde sale y cómo se podría eludir.

A menudo se ha señalado que en el argumento de EPR existe un "problema": "There is the problem that one cannot make both measurements [la de la posición y la del momento de una de las partículas], and hence both predictions [la posición o el momento de la otra partícula], simultaneously." [Hájek-Bub 92], p. 318. Dicho de otra manera el "problema" es que EPR no tienen reparo en suponer la existencia conjunta ("simultánea") en el mismo sistema individual de elementos de realidad que corresponden a dos observables incompatibles A y B basándose sólo de la *posibilidad* de, después de medir A' *o* B' (siendo A' y B' también observables mutuamente incompatibles) sobre otro sistema espacialmente separado, inferir (respectivamente) los

---

[9] Para Pais, [Pais 82], p. 456 (p. 457 en la edición en castellano), "The only part of this article that will ultimately survive (...) is this last phrase ["No reasonable definition of reality could be expected to permit this"], which so poignantly summarizes Einstein's views on quantum mechanics."

[10] Hay muchos otras matizaciones posibles (pero de menos relevancia para este trabajo) en la condición suficiente de EPR para caracterizar elementos de realidad. Por ejemplo: ¿Qué significa "predecir con certeza"?. Una predicción "con certeza (i.e. con probabilidad igual a la unidad)" sólo es posible después de *infinitas* repeticiones del mismo experimento. Como el número de repeticiones posibles en un experimento real es necesariamente finito, se debe entender "con certeza" como "con probabilidad tan próxima a la unidad como se desee"; como se hace, por ejemplo, en [Redhead 87], p. 72. En [Eberhard-Rosselet 95], p. 101, se propone modificar el criterio para que cubra cantidades que pueden ser predichas con *casi* certeza. Sobre las diversas interpretaciones del término "probabilidad" en relación con la MC, véase [Ballentine 90], Sec. 1. 5. Una definición adecuada para nuestros propósitos del término "predicción" es la que se da en [Pitowsky 91], p. 137: "A prediction is a statement of the form: "If a future experiment E is conducted on a system S the result will be *a*". What makes the prediction valid is the fact that if E is conducted (without intervening or interfering measurements) the result will indeed be *a*. Note, however, that E may never be conducted, or that some other experiment E' may be performed instead. *This does not render the prediction invalid. It simply makes it untestable."* Otra fuente de posibles matizaciones tiene que ver con la pregunta ¿En qué momento podemos asegurar que existe un elemento de realidad y desde cuando existía?; como señala [Redhead 87], p. 78, el criterio de EPR tampoco es explícito sobre este punto.

valores concretos de A y B. Ésta ha sido la objeción por excelencia al argumento de EPR, como queda particularmente claro en la siguiente cita, [Howard 85], pp. 174-175:

"Many commentators have been troubled by gaps in the EPR argument. The most significant lacuna is encountered at the place where the *simultaneous* reality of two conjugate parameters of the first system is inferred from the possibility of measuring *either* of the corresponding parameters of the second system. In general, the relevant parameters of the second system are themselves conjugate and so cannot be measured simultaneously. Additional assumptions are therefore required to license the inference from the possibility of measuring either parameter of the second system, to the actual simultaneous reality of both conjugate parameters of the first.

One way to repair the defect is just to assume that all physical systems at all times possess definite, observer-independent properties which are revealed to us by observation, including the kind of indirect observations which lie at the heart of the EPR *Gedankenexperiment* [Essentially the same prosthesis is recommended in [Clauser-Shimony 78]]. But this common maneuver is objectionable on two counts. First, it reduces the EPR argument to a *petitio principii*. The aim of the EPR argument is to *prove*, via the reality criterion, the existence of elements of physical reality not represented in quantum mechanics, and thereby to prove quantum mechanics incomplete. However, the suggestion under consideration is that we simply *assume* the existence of these (and many other) elements of physical reality. Second, and more importantly, this proposal naively and tacitly presupposes that we know what counts as a physical system, and that we know what is meant by talk of the "independence" of a system's properties."

Concretamente, estas "suposiciones adicionales" de las que habla Howard, toman en la literatura el nombre de "definitud contrafactual". Por tal entenderemos, siguiendo a Ballentine, [Ballentine 90], p. 453:

"Counterfactual definiteness. This term (abbreviated CFD) is used to describe the character of statements about "what would have occurred" in a measurement that we could have performed, but did not actually perform. CFD occurs in the EPR argument when they assert that if we had measured the position of particle 1 we could have learned the positions x_2 of particle 2, and if we had measured the momentum of particle 1 we could have learned the momentum p_2 of particle 2. Although only one of these measurements can actually be carried out in a single case, the conclusion that both values x_2 and p_2 are well defined in nature is an instance of CFD."[11]

[11] Ballentine y otros autores discrepan de la opinión previamente citada de Howard acerca del carácter *adicional* de esta hipótesis. [Ballentine 90], p. 453: "EPR do not assume CFD; rather they

En nuestra opinión, esta (necesaria) hipótesis de definitud contrafactual traiciona el propósito expresado por EPR al principio de su artículo de que: "The elements of the physical reality cannot be determined by *a priori* philosophical considerations, but must be found by an appeal to results of experiments and measurements.", y cuestiona también la aparente inocencia del criterio de elemento de realidad[12].

¿Cómo se pueden minimizar esos aspectos controvertibles?. Bastaría tomar el criterio de EPR en sentido fuerte o restringido[13] (cosa que, según algunos autores, incluso Bohr había aceptado[14]). Pero entonces, como antes se ha señalado, ni el ejemplo explícito que usan EPR en su artículo, ni la versión de Bohm del mismo, permiten rehacer un argumento de incompletitud. De hecho, incluso EPR parecen ser de la opinión de que la conclusión de su argumento depende esencialmente de la adopción de la versión débil elementos de realidad ("One could object to this conclusion on the

---

deduce it from *locality* and some results taken from quantum mechanics." Otra cita en el mismo sentido, [Stapp 91], p. 12: "The key move in the EPR argument is precisely the resolution of the ambiguity in the phrase "can predict." It is, in fact, the narrow sense [el sentido fuerte, definido en la Sec. 3. 2. 6] that must be used initially, since it is only if one can *actually* predict the value with certainty that the claim that this value has physical reality carries any conviction. However, the key move of EPR is then to point out that since the choice made in *A* cannot disturb in any way whether or not something is real in *B*, the two realities must both exist simultaneously. Thus EPR *deduce from locality* the applicability of the broad sense of "can predict"."

[12] Una lectura aislada del criterio de elemento de realidad pudiera sugerir que el sentido fuerte del enunciado era el pretendido por EPR. La forma en que [EPR 35] lo aplican revela que esto no es así. Dada la ambiguedad en el enunciado, hay que ser especialmente cauto ante afirmaciones como la de que el argumento de EPR es tan "sorprendente" *debido a* la propia "inocencia" de la condición suficiente; por ejemplo, [Mermin 90 e], p. 177.

[13] También puede haber un cierto tipo de contrafactualidad en los elementos de realidad en sentido fuerte, cuando en un sistema individual asignamos un elemento de realidad a una propiedad predecible con certeza, *sin verificarla*. Pero en este caso, la contrafactualidad se referiría a la falta de *comprobación*, y no a la ausencia de datos necesarios para predecir el valor concreto del elemento de realidad, como en la definición previamente citada de Ballentine, para la que reservaremos el nombre de CFD. Véase en la nota 10 el comentario de Pitowsky sobre cómo la no comprobación de una predicción no invalida ésta.

[14] Hay autores que piensan que Bohr habría aceptado la interpretación fuerte del criterio de EPR. La cita más explícita en este sentido es [GHSZ 90], p. 1142, nota 10: "Bohr's famous answer to EPR [Bohr 35] can be read as a challenge to EPR on this point, maintaining that the reality assumption [el criterio de existencia de elementos de realidad] is correct only if the strong sense of "can predict" is used." Esto es difícil de decidir, en parte porque, como se señala en [Stapp 85], p. 307: "Most of Bohr's reply was not directed at the EPR argument itself." Para un análisis más amplio sobre la postura de Bohr véase [Stapp 85], pp. 307-308, [Stapp 91], p. 8, [Bohm-Hiley 93], pp. 136-137. Un análisis crítico de la respuesta de Bohr a EPR es [Koç 81] (ver también [Koç 80, 82]).

grounds that our criterion of reality is not sufficiently restrictive. Indeed, one would not arrive at our conclusion if one insisted that... ", citada en la Sec. 3. 2. 6). En la Sec. 3. 5. 2, veremos que se puede rehacer un argumento de incompletitud completamente similar al de EPR pero usando la versión fuerte del criterio de elementos de realidad.

3. 2. 8. Ejemplos: EPR y Bohm

Terminemos el razonamiento. EPR basan su argumento en un ejemplo concreto; un resumen del mismo, adecuadamente conciso y fiel para nuestros propósitos, es el de [Ballentine 90], p. 438:

"EPR then considered a system of two particles prepared in a state in which the relative position $x_1 - x_2$ and the total momentum $p_1 + p_2$ have definite values. (We can readily verify that the operators for $x_1 - x_2$ and $p_1 + p_2$ commute, and so such an eigenstate exist[15].) After the state preparation has been completed, there is to be no interaction between the two particles. By measuring the position of particle 1, we can predict with certainty the position of particle 2. Since the second particle is spatially separated from the first and there is no interaction between them, the measurement on particle 1 does not disturb particle 2. Therefore, according to the criterion above, the position of particle 2 must be an element of reality. Alternatively, we could measure the momentum of particle 1 and predict with certainty the value of the momentum of particle 2. We therefore infer that the momentum of particle 2 is an element of reality. By hypothesis, there is no interaction between the two particles, so any measurement on particle 1 should have no physical effect on the condition of particle 2. It would be most unreasonable for the reality of the attributes of particle 2 to depend on operations that do not disturb it in any way. Therefore EPR conclude that, in this situation, the values of both the position x_2 and the momentum p_2 are [simultáneamente] elements of reality. Since the corresponding operators have no common eigenvectors that could describe sharp values for both of these elements of reality, it follows that the description of physical reality that is provided by the quantum-mechanical state vector is not *complete*, in the sense defined above."[16]

---

[15] En [EPR 35] se propone un ejemplo de un estado con estas características, ver también [Jammer 74], pp. 182-184, pero que es no-normalizable; recientemente se ha hecho un cálculo explícito, en términos de operadores de creación y destrucción, de una base de vectores propios comunes (normalizados) de los operadores posición relativa $\hat{Q}_1 - \hat{Q}_2$ y momento total $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ de un sistema de dos partículas, [Hong-yi-Klauder 94]. En [Hong-yi-Xiong 95] se calculan los vectores propios comunes de los operadores posición del centro de masa $\mu_1\hat{Q}_1 + \mu_2\hat{Q}_2$ y momento relativo $\mu_2\hat{P}_1 - \mu_1\hat{P}_2$, siendo $\mu_i = m_i/(m_1 + m_2)$ la masa reducida de la partícula *i*.

[16] En [De la Torre 94] se presenta un ejemplo particularmente simétrico al ejemplo original de EPR, pero usando una sola partícula que se mueve en el plano *x*-*y*. El argumento se basa en que los operadores correspondientes a $q_x - q_y$ y $p_x + p_y$ conmutan. A cambio de usar una sola partícula, la versión de de la Torre necesita un criterio para caracterizar elementos de realidad construido sobre la hipótesis de no-contextualidad en lugar de uno construido sobre las hipótesis de separabilidad y localidad.

Nótese que el razonamiento de EPR *no es* que puesto que sobre la partícula 2 podemos *predecir* con certeza p_2 y simultáneamente podemos *medir* x_2, ambos son elementos de realidad. En su razonamiento se es elemento de realidad si se es predecible con certeza: el hecho de que al medir la posción de la partícula 2 se encuentre un valor x_2 no confiere a dicho resultado x_2 el carácter de elemento de realidad; sí se lo confiere en cambio, el hecho de que se pueda predecir su valor tras una medida de x_1. En particular, en el argumento de EPR no es necesario suponer que el valor obtenido en una medición "revela" un elemento de realidad preexistente[17].

El ejemplo de EPR, con variables continuas (posición y momento), presenta dificultades teóricas (ver la nota 15) y experimentales[18]. En [Bohm 51], p. 614 y siguientes, se propone una versión "considerably easier to treat mathematically" del ejemplo de EPR. El ejemplo de Bohm usa dos partículas de espín 1/2 preparadas inicialmente en el estado singlete de espín[19]

---

[17] De todas formas, EPR no son absolutamente claros sobre este punto, ya que en la frase "... one would not arrive at our conclusion if one insisted that two or more physical quantities can be regarded as simultaneous elements of reality *only when they can be simultaneously measured or predicted*", aparentemente ponen en pie de igualdad "medir" y "predecir". Pese a esta frase, creemos que la interpretación correcta del criterio es la que se obtiene usando sólo las predicciones. El motivo fundamental es que en una medición sobre un sistema individual no se puede saber si el valor obtenido es el único que era posible, o solamente uno entre varios posibles, seleccionado qizás por una interacción entre el sistema y el aparato de medida. Suponer que la medición "revela" un valor preexistente en el sistema individual es una petición de principio (acorde con la idea de variables ocultas deterministas) de las que el argumento de EPR intenta precisamente evitar.

[18] Las primeras discusiones sobre posibles tests experimentales del argumento de EPR usando fotones correlacionados en polarizaciones son [Bohm-Aharonov 57, 60], [Peres-Singer 60]. Una de las cosas que se querían comprobar es la hipótesis de [Furry 36 a, b] de que las correlaciones se perderían al estar las partículas espacialmente separadas; [Bohm-Aharonov 57], p. 1071, "In fact, Einstein has (in a private communication) actually proposed such an idea; namely, that the current formulation of the many-body problem in quantum mechanics may break down when particles are far enough apart." Ver también [Schrödinger 35 a, b, 36].

[19] Un singlete de dos partículas de espín 1/2 puede obtenerse en la desintegración espontánea de un sistema con $J = 0$ en dos partículas de espín 1/2 con momento angular relativo nulo. Ejemplos de este tipo de desintegraciones son la desintegración del pión cero en un par electrón-positrón.

$$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-, \tag{3. a}$$

o la desintegración del mesón η en un par de muones

$$\eta \rightarrow \mu^+ + \mu^-. \tag{3. b}$$

$$|\psi\rangle=(|+-\rangle-|-+\rangle)/\sqrt{2}, \qquad (3.\ 1)$$

sobre las que se pueden medir, en regiones espacialmente separadas, sendas componentes de espín que, en el estado (3. 1), están correlacionadas en cualquier dirección. El argumento es paralelo al de EPR pero usando componentes del espín de cada partícula, en lugar de posición y momento.

3. 2. 9. La conclusión de EPR

Las alternativas a las que se enfrentan EPR al principio de su artículo son: "(1) *the quantum mechanical description of reality given by the wave function is not complete* or (2) *when the operators corresponding to two physical quantities do not commute the two quantities cannot have simultaneous reality.*" [EPR 35], p. 778. Al final del artículo dicen: "Starting then with the assumption that the wave function does give a complete description of the physical reality, we arrived at the conclusion that two physical quantities, with noncommuting operators, can have simultaneous reality. Thus the negation of (1) leads to the negation of the only other alternative (2)[20].

> We are thus forced to conclude that the quantum-mechanical description of physical reality given by wave functions is not complete."

Y concluyen diciendo: "we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such theory is possible." [EPR 35], p. 780.

Desafortunadamente estas desintegraciones son muy raras (la primera tiene un "branching ratio" de $(7,5\pm2,0)\times10^{-8}$, [Particle Data Group 94], p. 1449, y la segunda de $(5,7\pm0,8)\times10^{-6}$, [Particle Data Group 94], p. 1451). Según [Sakurai 94], p. 224, en un contexto más realista se pueden obtener singletes en el scattering de protones a bajas energías cinéticas. En ese caso, el principio de exclusión de Pauli [Pauli 26] hace que los protones que interaccionan estén en el estado ${}^1S_0$ (momento angular orbital 0, estado singlete de espín); además los estados de espín de los protones tras el scattering se mantienen correlacionados incluso cuando se encuentran separados por una distancia macroscópica.

[20] (1) y (2) son *alternativas* por la condición necesaria de completitud de una teoría física (Sec. 3. 2. 3) y por la condición suficiente de elementos de realidad (Sec. 3. 2. 4); la negación de (1) es la hipótesis de partida: suponer que "la descripción mecanocuántica... es completa". La negación de (2) es el resultado del argumento: "dos cantidades físicas con operadores no-conmutativos pueden tener simultáneamente realidad física".

Es habitual la opinión de que el interés del artículo de EPR estriba no sólo en señalar un conflicto entre la MC y ciertas concepciones absolutamente "razonables" sobre la realidad, sino en sugerir además un programa para completar la MC. En ese sentido, el teorema de Bell-EPR, que veremos a continuación, muestra la incompatibilidad entre ese programa y la MC[21].

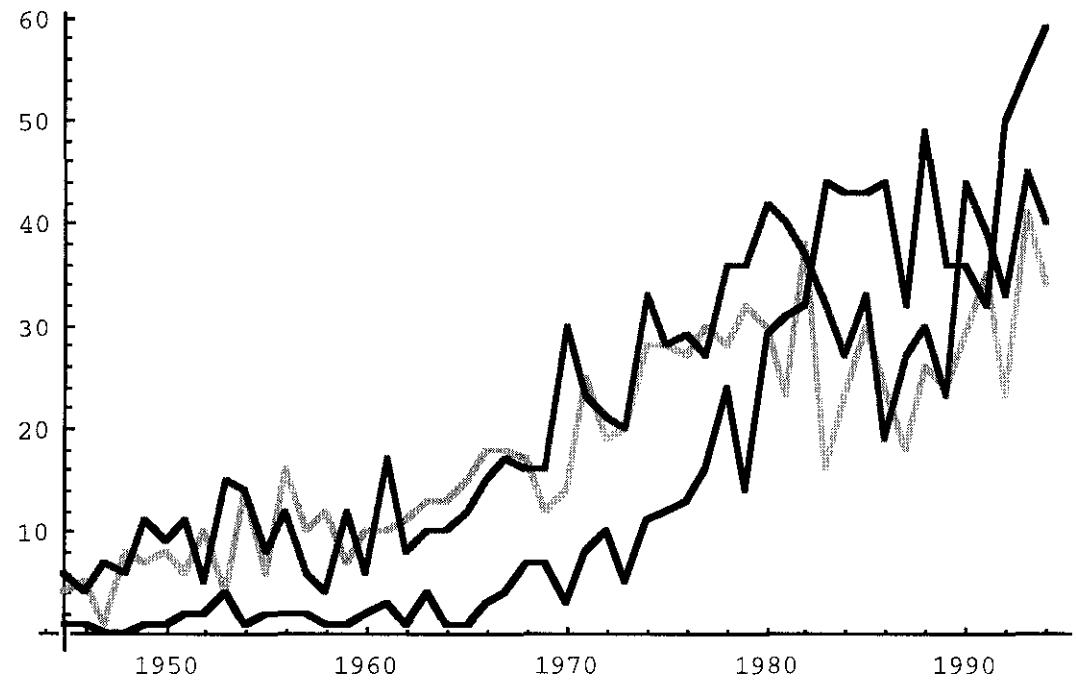


Fig. 3. 1. Evolución entre 1945 y 1994 del número de menciones anuales en el *Science Citation Index* a las tres publicaciones más citadas de Einstein: en negro, las citas a [EPR 35], en gris oscuro las citas a [Einstein 06]: la tesis doctoral de Einstein, en la que describía un nuevo método teórico para determinar radios moleculares y el número de Avogadro (ver [Pais 82], Sec. 5c), y en gris claro las citas a [Einstein 05]: el primer artículo de Einstein sobre el movimiento browniano (ver [Pais 82], Sec. 5d).

[21] Para, Pais, autor de la quizá mejor biografía científica de Einstein [Pais 82], "The conclusion [del artículo de EPR] has not affected subsequents developments in physics and it is doubtful that it ever will." [Pais 82], p. 456 (p. 457 de la edición en castellano). Sin embargo, es indudable que este artículo ha sido el detonante de cientos de trabajos teóricos y experimentales en física en los últimos 60 años; de hecho, en los últimos años es la publicación más citada de Einstein (ver la figura 3. 1).

3. 3. El teorema de Bell-EPR

3. 3. 1. Enunciado del teorema

John Bell[22] dio la vuelta al argumento de EPR y demostró en [Bell 64] que: "In a theory in which parameters are added to quantum mechanics to determine the results of individual measurements, without changing the statistical predictions, there must be a mechanism whereby the setting of one measuring device can influence the reading of another instrument, however remote. Moreover, the signal involved must propagate instantaneously, so that such a theory could not be Lorentz invariant.", [Bell 64], p. 199.

Dicho de otra manera, Bell descubrió que, en ciertos casos, las predicciones estadísticas de la MC y las de una teoría de variables ocultas *locales* son inconsistentes. Llamaremos "teorema de Bell-EPR" a aquél que señala la imposibilidad de construir una teoría de variables ocultas locales compatible con todas las predicciones de la MC. Entenderemos por localidad la definición de la Sec. 3. 2. 5. El significado preciso del enunciado del teorema de Bell dependerá en cada caso de a qué tipo de variables ocultas locales nos estemos refiriendo. En general, en este trabajo sólo consideraremos variables ocultas deterministas (aquellas en las que el resultado concreto de un experimento en un sistema individual está predeterminado), en la creencia de que la mayor parte de los resultados pueden extenderse a tipos más generales de variables ocultas.

La demostración de Bell procede de la siguiente manera: (i) Sobre el ejemplo de Bohm del argumento EPR, considera una teoría de variables ocultas que satisface los requisitos de EPR. (ii) Para una teoría de este tipo, deriva unas desigualdades entre las funciones de correlación de experimentos alternativos (realizados sobre distintos subconjuntos de sistemas preparados en el mismo estado cuántico). (iii) Hace la hipótesis de que esas funciones de correlación se corresponden con los valores medios calculados con la MC. (iv) Muestra que al sustituir esos valores esperados cuánticos en la desigualdad obtenida en (ii), la correspondiente desigualdad, en ciertos casos, se viola.

---

[22] La mayor parte de los artículos de Bell sobre fundamentos de MC se recogen en [Bell 87] (y los mismos y dos más en [Bell 95]). Sobre aspectos históricos que rodearon la génesis de las desigualdades de Bell, véase [Jammer 74] (p. 302 y siguientes); ver también [Jammer 90, 93]. Una entrevista con Bell pueden encontrarse en [Davies-Brown 86]; en [Bernstein 89] hay un capítulo basado en entrevistas con Bell.

La demostración de [Bell 64] es la primera de una larga cadena de desigualdades propuestas en la literatura, y conocidas bajo el nombre genérico de *desigualdades de Bell*. Estas desigualdades han venido desempeñando un doble papel en física:

(a) Inicialmente surgieron como un estudio teórico de las consecuencias que tendrían las hipótesis de EPR y, durante años, fueron la forma más habitual de hacer una *demostración teórica* del teorema de Bell-EPR[23].

(b) A diferencia del argumento de EPR (que se basa en el supuesto teórico de que se puede predecir con certeza un resultado, y que se puede formular para un sistema individual), las desigualdades de Bell involucran magnitudes estadísticas, lo cual hace más factible su traducción a experimentos reales (en los que difícilmente se logra esa condición de predictibilidad con certeza). Así, en desarrollos posteriores, las desigualdades de Bell se fueron adaptando al propósito de hacer una *verificación experimental* del teorema de Bell-EPR.

Nuevas demostraciones simplificadas han desplazado a las desigualdades de Bell de su papel (a). Veremos algunas de ellas en las Secs. 3. 3. 5 y 3. 4. Sin embargo ninguna de estas demostraciones alternativas ha conseguido todavía desplazar a las desigualdades de Bell de su papel (b). Por esto, y aunque no hemos realizado aportaciones originales en este tema, en las Secs. 3. 3. 2 a 3. 3. 4 empezaremos mostrando algunas de las desigualdades de Bell más características[24].

3. 3. 2. Las desigualdades originales de Bell

Considérese la versión de Bohm del ejemplo de EPR: un par de partículas de espín 1/2 creadas de algún modo en el estado singlete de espín (3. 1). Supongamos que las dos partículas se mueven libremente en direcciones diferentes, hacia sendos aparatos de Stern-Gerlach situados en regiones separadas por un intervalo de género-espacio. En todo momento supondremos que la parte espacial del estado no afecta al argumento[25].

---

[23] Porque, como recuerda Santos, "[El teorema de Bell-EPR] is a mathematical statement which, as such, does not require any real experiment to be proved or disproved" [Santos 95], p. 1.

[24] Dada la ingente literatura sobre este tema, nuestra selección de referencias no pretende ser exhaustiva. Como fuentes de bibliografía adicional pueden consultarse: [Jammer 74], [Pipkin 78], [Clauser-Shimony 78], [Selleri-Tarozzi 81], [Wheeler-Zurek 83], [Ballentine 87], [Selleri 88, 90], [Home-Selleri 91].

[25] Un estudio detallado de la parte espacial de la función de onda para el ejemplo de Bohm puede encontrarse en [Santos 95]. En este trabajo se afirma que: "(1) the standard proofs of Bell's theorem are incomplete because no care is taken of the space part of the wave function, (2) according to non-

Los Stern-Gerlach miden una componente del espín de cada partícula. Denotaremos por $\sigma_a^{(1)}$ la componente según el vector unitario **a** del espín de la primera partícula (multiplicada por $2/\hbar$), y por $\sigma_b^{(2)}$ la componente según el vector unitario **b** del espín de la segunda partícula. Los resultados de esas medidas son siempre +1 ó −1.

Si se mide $\sigma_a^{(1)}$ sobre el estado singlete y se obtiene el resultado +1 (−1), entonces, según la MC, la medida de $\sigma_a^{(2)}$ debe dar el valor −1 (+1). Como es posible predecir con certeza el resultado de $\sigma_a^{(2)}$ a partir del resultado de la medición de $\sigma_a^{(1)}$ (y viceversa), y como además las partículas están espacialmente separadas, concluimos que el valor de $\sigma_a^{(2)}$ (de $\sigma_a^{(1)}$) es un elemento de realidad (en sentido débil) de acuerdo con el criterio de EPR. En el singlete esto ocurre cualquiera que sea **a**; por tanto, todas las componentes de espín de cada una de las dos partículas son elementos de realidad (débiles).

Introduzcamos la siguiente notación: $v(\sigma_a^{(1)}, \lambda)$ indica el valor (+1 ó −1) que tendría el resultado de la medición de $\sigma_a^{(1)}$ sobre la partícula 1; análogamente, $v(\sigma_b^{(2)}, \lambda)$ indica el valor del resultado de medir $\sigma_b^{(2)}$ sobre la partícula 2. Supondremos que para cada componente de espín, esos valores están determinados por las variables ocultas del sistema, a las que denotaremos colectivamente por λ. La localidad requiere que $v(\sigma_a^{(1)}, \lambda)$ no dependa de qué se mida sobre la segunda partícula, ni que $v(\sigma_b^{(2)}, \lambda)$ dependa de qué se mida sobre la primera partícula.

Supondremos que las variables ocultas tienen una distribución de probabilidad $\rho(\lambda)$ que satisface la siguiente condición de normalización:

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1. \tag{3. 2}$$

En todo lo que sigue, nos fijaremos sólo en las funciones de correlación entre los resultados de mediciones sobre las dos partículas. Para elecciones fijas de $\sigma_a^{(1)}$ y $\sigma_b^{(2)}$ la *función de correlación* se define como

$$C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) := \int v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(2)}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \tag{3. 3}$$

---

relativistic quantum mechanics some spin singlet states are able to violate a Bell inequality, but not all such states do so, (3) EPRB [EPR-Bohm] experiments are extremely difficult due to several constraints [p. 2] (...) but no fundamental difficulty exists [p. 6]." En [Ben-Aryeh 93], p. 317, se dice: "Locality is not violated for the singlet state. (...) Due to superselection rules the singlet spin state is entangled with spatial spherical wave functions. Bell inequalities are violated only for subensembles which are not pure states." La mayoría de los autores supone, sin embargo, que la parte espacial de la función de ondas no afecta esencialmente al argumento.

Sea $\sigma_B^{(2)}$ una medición alternativa sobre la partícula 2. En general, las medidas $\sigma_b^{(2)}$ y $\sigma_B^{(2)}$ no pueden hacerse simultáneamente sobre un mismo sistema individual, pero sí se puede hacer cada una de ellas sobre un subconjunto distinto de sistemas idénticamente preparados. En ese contexto tiene sentido considerar la diferencia entre dos funciones de correlación,

$$\begin{aligned} &C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) \\ &= \int \left[v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(2)}, \lambda) - v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(2)}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{3. 4}$$

Como hemos dicho, en el estado singlete al medir la misma componente en ambas partículas se obtienen siempre resultados opuestos, por tanto,

$$v(\sigma_b^{(2)}, \lambda) = -v(\sigma_b^{(1)}, \lambda), \qquad v(\sigma_B^{(2)}, \lambda) = -v(\sigma_B^{(1)}, \lambda), \tag{3. 5}$$

lo que permite escribir (3. 4) como

$$\begin{aligned} &C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) \\ &= -\int \left[v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(1)}, \lambda) - v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(1)}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{3. 6}$$

Teniendo en cuenta que $v(\sigma_b^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(1)}, \lambda) = 1$, entonces también podemos escribir (3. 6) como

$$\begin{aligned} &C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) \\ &= -\int v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(1)}, \lambda) \left[1 - v(\sigma_b^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(1)}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{3. 7}$$

Teniendo en cuenta que $v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(1)}, \lambda)$ es +1 ó –1, luego tiene valor absoluto 1, y que $\left[1 - v(\sigma_b^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(1)}, \lambda) \right]$ es no negativo, y por lo tanto igual a su valor absoluto; tomando los valores absolutos de ambos lados de la ec. (3. 7) se llega a que

$$\left| C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) \right| \leq \int \left[1 - v(\sigma_b^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(1)}, \lambda) \right] \rho(\lambda) d\lambda . \tag{3. 8}$$

En (3. 8), el segundo término de la derecha es, $C(\sigma_b^{(1)}, \sigma_B^{(2)})$, con lo que, teniendo en cuenta la condición de normalización (3. 2), llegamos a

$$\left| C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) \right| \leq 1 + C(\sigma_b^{(1)}, \sigma_B^{(2)}). \tag{3. 9}$$

Ésta es la desigualdad de Bell de 1964. A partir de esta desigualdad vamos a demostrar que las variables ocultas deterministas y la MC son incompatibles. Por reducción al absurdo: Supongamos que el valor medio del producto $v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(2)}, \lambda)$ que en una

teoría de variables ocultas viene dado por la función de correlación (3. 3), coincide con el correspondiente valor medio cuántico,

$$\left\langle \sigma_a^{(1)} \otimes \sigma_b^{(2)} \right\rangle_\psi = -\cos\theta_{ab}, \tag{3. 10}$$

Sustituyendo (3. 10) en la desigualdad (3. 9) resulta

$$\left|\cos\theta_{aB} - \cos\theta_{ab}\right| \leq 1 - \cos\theta_{bB}, \tag{3. 11}$$

desigualdad que no siempre se verifica (tómese por ejemplo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{B}=0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{B}=1/\sqrt{2}$), *q.e.d.*

3. 3. 3. Las desigualdades de CHSH

Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH) proponen en [CHSH 69] una versión más general de las desigualdades de Bell.

Considerando (además de las mediciones de $\sigma_a^{(1)}$, $\sigma_b^{(2)}$, $\sigma_B^{(2)}$ consideradas en la sección anterior) una nueva medición alternativa sobre a primera partícula, $\sigma_A^{(1)}$, la ec. (3. 4) se puede escribir como

$$\begin{aligned} &C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) \\ &= \int \left[v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(2)}, \lambda) \left(1 \pm v(\sigma_A^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(2)}, \lambda)\right)\right] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad - \int \left[v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(2)}, \lambda) \left(1 \pm v(\sigma_A^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(2)}, \lambda)\right)\right] \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{3. 12}$$

En lugar de suponer, como hasta ahora, que $v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) \in \{+1, -1\}$, por motivos de conveniencia posterior, supondremos que

$$\left| v(\sigma_a^{(1)}, \lambda) \right| \leq 1. \tag{3. 13}$$

Lo que nos permite, tomando valores absolutos en (3. 12), escribir

$$\begin{aligned} \left| C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) \right| \leq &\int \left[1 \pm v(\sigma_A^{(1)}, \lambda) v(\sigma_B^{(2)}, \lambda)\right] \rho(\lambda) d\lambda \\ &+ \int \left[1 \pm v(\sigma_A^{(1)}, \lambda) v(\sigma_b^{(2)}, \lambda)\right] \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{3. 14}$$

pero el lado de la derecha de (3. 14) no es más que $2 \pm \left[C(\sigma_A^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) + C(\sigma_A^{(1)}, \sigma_b^{(2)})\right]$, por tanto, podemos escribir (3. 14) como

$$\left|C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - C(\sigma_a^{(1)}, \sigma_B^{(2)})\right| + \left|C(\sigma_A^{(1)}, \sigma_B^{(2)}) + C(\sigma_A^{(1)}, \sigma_b^{(2)})\right| \leq 2. \quad (3.\ 15)$$

Éstas son las desigualdades de CHSH de 1969[26]. Nótese que la desigualdad (3. 15) se ha derivado sin hacer ninguna alusión a la MC, en particular sin ni siquiera usar (3. 5).

Sustituyendo en (3. 15) las funciones de correlación por los correspondientes valores medios que la MC predice para el singlete (3. 10), y eligiendo cuatro vectores **a**, **A**, **b**, **B** coplanares, tales que **b** = **A**, y **a** y **B** formen un mismo ángulo θ con **A** y **b**, se obtiene la desigualdad

$$2\cos\theta - \cos(2\theta) \leq 1, \quad (3.\ 16)$$

que se viola máximamente para $\theta = \pi/3$, para el que el miembro de la izquierda de (3. 16) es 3/2.

La limitación más importante para traducir a un experimento real las desigualdades de Bell tiene que ver con la ineficiencia de los detectores: la mayoría de las partículas no son detectadas. Para modelizar esto, representaremos por $v(\sigma_a^{(1)}) = 0$ los casos en los que la primera partícula no fue detectada cuando se midió $\sigma_a^{(1)}$ (es decir, supondremos que $v(\sigma_a^{(1)}) \in \{0, +1, -1\}$); es por ello que resulta útil la generalización introducida por CHSH en (3. 13).

En experimentos *con eficiencias perfectas en los detectores*, y siendo $N_{++}(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)})$ el número de sucesos en los que las mediciones de $\sigma_a^{(1)}$ y $\sigma_b^{(2)}$ han dado ambas el resultado +1, etc.; el valor experimental de la función de correlación se calcula como

$$C_{\exp}(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) := \frac{N_{++}(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) + N_{--}(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - N_{+-}(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) - N_{-+}(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)})}{N(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)})} \quad (3.\ 17)$$

En experimentos *sin eficiencias perfectas en los detectores*, siendo (para cada par $(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)})$) $N = N_{++} + N_{--} + N_{+-} + N_{-+} + N_{+0} + N_{0+} + N_{-0} + N_{0-} + N_{00}$, (donde

---

[26] Cuando en la literatura se habla de "desigualdades de Bell" sin especificar cuáles, se suelen referir a éstas, que son las que utiliza Bell a partir de [Bell 71] (por ejemplo, en los capítulos 7, 10, 13 y 16 de [Bell 87]). Una comparación entre las hipótesis de [Bell 64] y las de [CHSH 69] puede encontrarse en [d'Espagnat 93]. El lado izquierdo de (3. 15) es lo que se llama el "operador de Bell" asociado a las desigualdades de CHSH [Braunstein-Mann-Revzen 92], p. 3259.

el subíndice 0 indica que la correspondiente partícula no se ha detectado), y haciendo la hipótesis de que *las partículas detectadas son una muestra estadísticamente representativa del conjunto*[27], el valor experimental de la función de correlación se convierte en

$$C_{\exp}(\sigma_a^{(1)}, \sigma_b^{(2)}) \approx \frac{N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+}}{N_{++} + N_{--} + N_{+-} + N_{-+}}. \qquad (3.\ 18)$$

En los experimentos reales esta cantidad (o su análoga en experimentos con fotones) se ha encontrado que coincide con la MC y viola la desigualdad de Bell-CHSH[28]. Sin

---

[27] Lo que en la literatura se llama hipótesis de "fair sampling". Puede enunciarse de la siguiente manera, [Home-Selleri 91], p. 31: "given that a pair of photons emerge from two regions of space where two polarizers can be located, the probability of their joint detection from two photomultipliers is independent of the presence and the orientation of the polarizers." Esta hipótesis es dispensable si la eficiencia de los detectores está por encima de un cierto umbral [Garg 83], [Mermin 86 b], [Garg-Mermin 87] (estos autores llegan a la conclusión de que "For the conventional experiment with particles in the singlet state (or its photon analogue), the data predicted by the quantum theory do not violate [the necessary *and sufficient* condition for compatibility with local realism] unless the quantum efficiency of the detectors exceeds 83%." [Garg-Mermin 87], p. 3831).

[28] Casi todos los experimentos realizados hasta la fecha están en buen acuerdo con las predicciones de la MC y violan las desigualdades de Bell. Todos ellos necesitan hipótesis adicionales; basándose en la necesidad o no de hipótesis adicionales, en la literatura se distingue entre desigualdades fuertes y débiles, por ejemplo, [Home-Selleri 91], p. 33: "*Weak inequality*: An inequality exclusively deduced from local realism and violated by quantum mechanics in the case of nearly perfect instruments. *Strong inequality*: An inequality deduced from local realism and from certain additional assumptions, such as the CHSH (...), and violated by quantum mechanics in the case of actual instruments." Las siguientes referencias tratan de propuestas experimentales ideales y experimentos realizados sobre desigualdades de Bell. Hemos clasificado la referencias en tres grupos (en cada grupo las referencias están dispuestas en orden cronológico):

(a) Experimentos reales: [Kocher-Commins 67], [Papaliolios 67], [Freedman-Clauser 72] (con fotones correlacionados en polarizaciones emitidos en el decaimiento $J = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ de átomos de Ca; ver también [Freedman 72], [Clauser 92]), [Holt-Pipkin 72] (id. con átomos de Hg; uno de los pocos experimentos que mostró acuerdo con las desigualdades de Bell), [Clauser 76 a], [Clauser 76 b] (Hg), [Fry-Thompson 76] (Hg), [Lamehi Rachti-Mittig 76] (scattering protón-protón a baja energía), [Aspect-Grangier-Roger 81] (con fotones de Ca y polarizadores de un solo canal; ver también [Aspect 76]), [Aspect-Grangier-Roger 82] (Ca y polarizadores de dos canales), [Aspect-Dalibard-Roger 82] (con dispositivos ópticos que cambian la orientación de los polarizadores, durante el vuelo de los fotones; ver también [Aspect 83]), [Perrie-Duncan-Beyer-Kleinpoppen 85] (con fotones correlacionados emitidos simultáneamente por deuterio atómico metaestable), [Rarity-Tapster 90] (con fase y momento), [Kwiat-Vareka-Hong-Nathel-Chiao 90] (con fotones emitidos por un cristal no lineal y correlacionados en un doble interferómetro; siguiendo la propuesta de [Franson 89]), [Ou-Zou-Wang-Mandel 90] (id.), [Ou-

embargo, es posible construir modelos de variables ocultas locales en los que las partículas detectadas no son una muestra representativa del conjunto y en las que (3. 18) viola las desigualdades de Bell-CHSH pero (3. 17) no[29].

3. 3. 4. Las desigualdades de CH

Clauser y Horne (CH) [Causer-Horne 74] hacen dos mejoras respecto a las desigualdades de CHSH: (i) Derivan unas desigualdades en las que no es necesario suponer que las variables ocultas determinan cada resultado *concreto* de una medida, sino sólo las *probabilidades* de cada resultado[30]. (ii) Las desigualdades de CH permiten una traducción experimental en la que sólo hacen falta los resultados *detectados*.

(i) La situación experimental considerada por CH es ligeramente distinta de la de Bohm: Una fuente emite pares de fotones correlacionados en polarización, cada uno de ellos atraviesa un polarizador que puede tener dos orientaciones: $\mathbf{a}^{(1)}$ y $\mathbf{A}^{(1)}$ para el primer fotón y $\mathbf{b}^{(2)}$ y $\mathbf{B}^{(2)}$ para el segundo. Introduzcamos la siguiente notación:

Pereira-Kimble-Peng 92] (con fotones correlacionados en amplitud), [Tapster-Rarity-Owens 94] (con fotones en fibra óptica).

(b) Experimentos ideales: [Lo-Shimony 81] (disociación de una molécula metaestable), [Horne-Zeilinger 85, 86, 88] (interferómetros de partículas), [Horne-Shimony-Zeilinger 89, 90] (id.) (ver también [GHZ 93], [Wu-Xie-Huang-Hsia 96]), [Franson 89] (con posición y tiempo), o en los que intervienen simultáneamente observables de espectro discreto y de espectro continuo [Zukowski-Zeilinger 91] (polarizaciones y momentos), (propuestas experimentales sobre desigualdades de Bell sin hipótesis adicionales:) [Fry-Li 92], [Fry 93, 94], [Fry-Walther-Li 95], [Kwiat-Eberhard-Steinberger-Chiao 94], [Pittman-Shih-Sergienko-Rubin 95], [Fernández Huelga-Ferrero-Santos 94, 95] (propuesta de un experimento con pares de fotones con detección del átomo en retroceso), [Freyberger-Aravind-Horne-Shimony 96].

(c) Artículos de revisión: [Clauser-Shimony 78], [Pipkin 78], [Duncan-Kleinpoppen 88], [Chiao-Kwiat-Steinberg 95] (revisión de los experimentos propuestos por estos autores con fotones emitidos por un cristal no-lineal en un proceso de parametric down conversion).

[29] Algunos ejemplos de referencias críticas: [Marshall-Santos-Selleri 83] ("el realismo local no ha sido refutado por los experimentos de cascada átomica"), [Marshall-Santos 89], [Santos 91], [Santos 92 c] (modelo de variables ocultas locales que está de acuerdo con las predicciones ideales de la MC en los experimentos con fotones emitidos en una cascada atómica, como los de Aspect), (crítica a los experimentos con fotones generados en un proceso de parametric down conversion:) [Garuccio 95 a], [Santos 96].

[30] Esta es una de las dos únicas incursiones que se hacen en esta tesis sobre variables ocultas no-deterministas o estocásticas (la otra se hará en la Sec. 5. 4. 2); en el resto de la tesis supondremos que las variables ocultas son de tipo determinista.

$p(\mathbf{a}^{(1)}, \lambda)$ es la probabilidad de detectar el primer fotón cuando el correspondiente polarizador está orientado según $\mathbf{a}^{(1)}$; ésta es la *probabilidad* que las variables ocultas asignan al primer fotón[31]; análogamente $p(\mathbf{b}^{(2)}, \lambda)$ indica la probabilidad de detectar el segundo fotón cuando el correspondiente polarizador está orientado según $\mathbf{b}^{(2)}$, y $p(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \lambda)$ es la probabilidad de detectar ambos fotones cuando los polarizadores están orientados según $\mathbf{a}^{(1)}$ el del primer fotón y según $\mathbf{b}^{(2)}$ el del segundo.

La probabilidad de detectar el primer fotón con el polarizador en la situación $\mathbf{a}^{(1)}$ se obtiene promediando sobre las variables ocultas

$$P(\mathbf{a}^{(1)}) = \int p(\mathbf{a}^{(1)}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \tag{3. 19}$$

Análogamente,

$$P(\mathbf{b}^{(2)}) = \int p(\mathbf{b}^{(2)}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \tag{3. 20}$$

$$P(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) = \int p(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \tag{3. 21}$$

Suponiendo que $p(\mathbf{a}^{(1)}, \lambda)$ no depende de qué orientación tenga el polarizador del segundo fotón y que $p(\mathbf{b}^{(2)}, \lambda)$ no depende de qué orientación tenga el polarizador del primer fotón,

$$p(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \lambda) = p(\mathbf{a}^{(1)}, \lambda)p(\mathbf{b}^{(2)}, \lambda). \tag{3. 22}$$

Para deducir las desigualdades, CH consideran el siguiente lema.

Lema: Dados 6 números reales $a, A, \alpha, b, B, \beta$, tales que

$$0 \le a, A \le \alpha; \qquad 0 \le b, B \le \beta, \tag{3. 23}$$

siempre se verifican las siguientes desigualdades:

$$-\alpha\beta \le ab - aB + Ab + AB - A\beta - \alpha b \le 0. \tag{3. 24}$$

Justificación: La expresión del medio en (3. 24) es lineal en cada una de las cuatro variables a, A, b, B, luego sus extremos deben estar entre los de esas variables por la propia definición de ínfimo y supremo [Gleason 66]. La demostración de la desigualdad

---

[31] En una teoría de variables ocultas deterministas el que el fotón atraviese o no el polarizador está *predeterminado*; en cambio, en una teoría de variables ocultas probabilísticas, en un experimento individual sólo está definida la probabilidad de atravesar el polarizador.

derecha (la relevante para el argumento posterior) puede verse en [Ballentine 90], p. 446.

Haciendo el cambio de variables: $a = p(\mathbf{a}^{(1)}, \lambda)$, $A = p(\mathbf{A}^{(1)}, \lambda)$, $b = p(\mathbf{b}^{(2)}, \lambda)$, $B = p(\mathbf{B}^{(2)}, \lambda)$, $\alpha = \beta = 1$ en (3. 24), multiplicando por $\rho(\lambda)$, e integrando sobre λ, obtenemos

$$-1 \leq P(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) - P(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}) + P(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) + P(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}) - P(\mathbf{A}^{(1)}) - P(\mathbf{b}^{(2)}) \leq 0 \qquad (3.\ 25)$$

que son las desigualdades de CH[32].

(ii) Los datos de un experimento son el número de detecciones que ha registrado cada detector $N(\mathbf{a}^{(1)})$, $N(\mathbf{b}^{(2)})$, y el número de detecciones conjuntas (o coincidencias) $N(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)})$, para varias orientaciones de los polarizadores: En un experimento real, $N(\mathbf{a}^{(1)})/N$, $N(\mathbf{b}^{(2)})/N$, y $N(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)})/N$, hacen, respectivamente, los papeles de $P(\mathbf{a}^{(1)})$, $P(\mathbf{b}^{(2)})$, y $P(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)})$. El número N es el número total de pares de partículas emitidos por la fuente, número que es desconocido (puesto que es el número de partículas no detectadas es desconocido), pero N no aparece en el equivalente experimental de la desigualdad

$$\frac{P(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) - P(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}) + P(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) + P(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)})}{P(\mathbf{A}^{(1)}) + P(\mathbf{b}^{(2)})} \leq 1, \qquad (3.\ 26)$$

que se obtiene a partir de la segunda desigualdad de (3. 25)[33], y que también es violada en ciertos casos por las correspondientes predicciones cuánticas.

Dada su importancia, las desigualdades de Bell han dado lugar a muchos trabajos de tipo teórico de los que no podemos ocuparnos aquí[34].

---

[32] [Home-Selleri 91], p. 34: "Inequalities like the previous (...) are sometimes also called "inhomogeneous inequalities" since they are based both on double and single probabilities. "Homogeneous inequalities" (...) are based on double detection probabilities only."

[33] También un test experimental de las desigualdades de CH requiere hipótesis adicionales, en particular lo que se llama en la literatura hipótesis de "no-enhancement", que se puede enunciar de la siguiente manera, [Home-Selleri 91], p. 34: "for every photon in the state λ the probability of detection with a polarizer placed on his trajectory is less than or equal to the detection probability with the polarizer removed." Una crítica a las desigualdades de CH es [Angelidis 83].

[34] Sin ánimo de ser exhaustivos, damos a continuación una lista de referencias a artículos de investigación entorno a las desigualdades de Bell. Hemos clasificado las referencias en 5 grupos:

3. 3. 5. La demostración estadística de Mermin

La demostración que vamos a ver a continuación encierra el mismo tipo de contradicción entre MC y variables ocultas locales que hay detrás de la violación de las desigualdades de Bell: una contradicción *estadística*; esto es, una contradicción entre las distribuciones de probabilidad de los hipotéticos resultados de mediciones sobre un *conjunto* de sistemas preparados idénticamente. Por otra parte, por su simplicidad se asemeja más a las demostraciones algebraicas (en las que las contradicciones se dan entre los hipotéticos resultados de un sistema *individual*) que trataremos en las secciones siguientes.

Consideremos dos partículas de espín 1/2 preparadas en el estado singlete (3. 1). Sobre cada partícula i ($i = 1, 2$) consideremos tres observables incompatibles: tres componentes de espín según tres vectores coplanares que forman entre si ángulos de 120°; por ejemplo,

$$A^{(i)} = \sigma_z^{(i)}, \qquad (3.\ 27\ a)$$

(a) Desigualdades de Bell para dos partículas de espín s: [Mermin 80, 86 a], [Garg-Mermin 82, 83, 84], [Mermin-Schwarz 82] (espín 1 y espín 3/2), [Ögren 83], [Sanz-Sánchez Gómez 90], [Sanz 90] (Cap. 4), [Ardehali 91], [Gisin-Peres 92], [Geng 92] (para dos espines diferentes), [Peres 92 d], [Wódkiewicz 92].

(b) Desigualdades de Bell para n partículas: [Mermin 90 c], [Belinsky-Klyshko 93], [Belinsky 94]. Ver más referencias en la Sec. 5. 5. 2.

(c) Para qué estados se violan las desigualdades: (Las desigualdades de Bell-CHSH se violan para todos los estados puros entangled:) [Capasso-Fortunato-Selleri 73], [Gisin 91 a] (correcciones a este último en [Barnett-Phoenix 92]), (máxima violación para estados puros:) [Popescu-Rohrlich 92], (la violación es máxima para estados máximamente entangled:) [Kar 95], [Cereceda 96 b]. Para estados mezcla: [Braunstein-Mann-Revzen 92] (máxima violación para estados mezcla), [Mann-Nakamura-Revzen 92], [Beltrametti-Maczynski 93], [Horodecki-Horodecki-Horodecki 95] (condición necesaria y suficiente para que un estado mezcla viole las desigualdadaes de CHSH), [Aravind 95].

(d) Otras desigualdades: [Baracca-Bergia-Livi-Restignoli 76] (desigualdades de Bell para observables no dicotómicos), [Cirel'son 80] (mientras que las desigualdades de Bell dan límites a las correlaciones en una teoría de variables ocultas, la desigualdad Cirel'son da el límite superior a las correlaciones *cuánticas* y por tanto la mayor violación posible de las desigualdades de Bell según la MC; en particular Cirel'son prueba que el valor absoluto de la combinación de las funciones de correlación en las desigualdades de CHSH (3. 15) está acotado por $2\sqrt{2}$ en MC y por 2 en una teoría de variables ocultas locales; ver también [Chefles-Barnett 96]), [Braunstein-Caves 88, 89, 90] (desigualdades de Bell encadenadas, con más de dos observables alternativos). [Ou-Pereira-Kimble-Peng 92], p. 3666, dicen que "there is no generalizaion of the Bell inequalities for continuous variables". Ver más referencias en la Sec. 5. 5. 3.

$$B^{(i)} = (\sqrt{3}\,\sigma_x^{(i)} - \sigma_z^{(i)})/2, \tag{3. 27 b}$$

$$C^{(i)} = -(\sqrt{3}\,\sigma_x^{(i)} + \sigma_z^{(i)})/2. \tag{3. 27 c}$$

En una teoría de variables ocultas locales deterministas (basada en la interpretación débil del criterio de EPR), cada partícula debe poseer un resultado definido (+1 ó −1) para esos tres observables. Siguiendo la terminología de Mermin, cada par de partículas debe tener asociado un "conjunto de instrucciones" que le indica cómo responder a los distintos experimentos posibles. Por ejemplo, un conjunto de instrucciones definidas podría ser[35]

$$\begin{Bmatrix} A^{(1)} & B^{(1)} & C^{(1)} \\ A^{(2)} & B^{(2)} & C^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} + & + & - \\ - & - & + \end{Bmatrix}, \tag{3. 28}$$

que indica que si se midiese sobre la partícula 1 el observable $A^{(1)}$ se obtendría el resultado +1, si (en lugar de $A^{(1)}$) se midiese $B^{(1)}$ se obtendría +1, y si (en lugar de $A^{(1)}$ ó $B^{(1)}$) se midiese $C^{(1)}$ se obtendría −1; si se midiese sobre la partícula 2 el observable $A^{(1)}$ se obtendría el resultado −1, si (en lugar de $A^{(2)}$) se midiese $B^{(2)}$ se obtendría −1, y si (en lugar de $A^{(2)}$ ó $B^{(2)}$) se midiese $C^{(2)}$ se obtendría +1.

Vamos a considerar dos tipos de experimentos: los experimentos en los que se miden los mismos observables para las dos partículas, experimentos a los que llamaremos $X^{(1)}X^{(2)}$, y los experimentos en los que se miden observables distintos, experimentos a los que llamaremos $X^{(1)}Y^{(2)}$ (donde $X,\ Y = A,\ B,\ C;\ X \neq Y$).

En el singlete, los experimentos $X^{(1)}X^{(2)}$ siempre dan resultados opuestos,

$$P_\psi(X^{(1)} = -X^{(2)}) = 1, \tag{3. 29}$$

lo cual reduce el número de conjuntos de instrucciones admisibles a los 8 siguientes:

$$\begin{Bmatrix} + & + & + \\ - & - & - \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} - & - & - \\ + & + & + \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} + & + & - \\ - & - & + \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} - & - & + \\ + & + & - \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} - & + & - \\ + & - & + \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} - & + & + \\ + & - & - \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} + & - & - \\ - & + & + \end{Bmatrix} \tag{3. 30}$$

(i) Es fácil ver que todos los experimentos $X^{(1)}Y^{(2)}$ que se hagan sobre uno de los dos primeros conjuntos de instrucciones darán resultados opuestos.

---

[35] Como toda la información relevante se puede almacenar en una matriz (2×3 en este caso), estas teorías reciben a veces el nombre de teorías de variables ocultas "matriciales"; véase, por ejemplo [Hnilo 93].

(ii) En los experimentos $X^{(1)}Y^{(2)}$ que se hagan sobre uno de los otros 6 conjuntos de instrucciones se deberían obtener resultados opuestos en 1/3 de las veces.

Demostración. Consideremos los posibles experimentos sobre el conjunto de instrucciones $\{\pm\pm\mp\}$ (tercer conjunto en (3. 30)): se obtendrán resultados opuestos siempre que se hagan experimentos $A^{(1)}B^{(2)}$, ó $B^{(1)}A^{(2)}$, y resultados iguales en los experimentos $A^{(1)}C^{(2)}$, $B^{(1)}C^{(2)}$, $C^{(1)}A^{(2)}$, ó $C^{(1)}B^{(2)}$. Si suponemos que los 6 experimentos de tipo $X^{(1)}Y^{(2)}$ se dan con la misma frecuencia, para este conjunto de instrucciones se deberían obtener resultados opuestos 1/3 de las veces; un razonamiento análogo se puede hacer para el cuarto, quinto, ..., y octavo conjunto de instrucciones, *q.e.d.*

Luego, considerando todos los conjuntos admisibles de instrucciones, de (i) y (ii) concluimos que, independientemente de la frecuencia con que aparezcan los distintos conjuntos de instrucciones, en los experimentos de tipo $X^{(1)}Y^{(2)}$ deberían obtenerse resultados opuestos *al menos* 1/3 de las veces[36]. Sin embargo, la MC predice una probabilidad menor:

$$P_{\psi}(X^{(1)} = -Y^{(2)}) = \cos^2(\pi/3) = 1/4 . \qquad (3.\ 31)$$

Por tanto, la MC no es compatible con la existencia de conjuntos de instrucciones definidas[37].

---

[36] De hecho, si hacemos la hipótesis adicional de que los 8 conjuntos posibles de instrucciones se dan con la misma frecuencia, en los experimentos $X^{(1)}Y^{(2)}$ se obtendrían resultados opuestos 1/2 de las veces.

[37] Esta demostración apareció originalmente en [Mermin 81 a]. Cuenta Mermin en [Mermin 90 e], p. xv: "That paper (...) did bring me the finest reward of my entire career in physics —a letter from Richard Feynman (coincidentally sent on my birthday) that begins "One of the most beautiful papers in physics that I know of is yours in the *American Journal of Physics*... ." But the *AJP* article turned out to be only the first step in a chain of papers." La misma demostración (o variantes de ella) puede encontrarse en [Mermin 81 b, 85], [Penrose 89] (pp. 358-360 de la edición en castellano), [Mermin 90 e] (Caps. 10-12). En [Cabello-García Alcaine 95 a] se compara esta demostración (estadística, con elementos de realidad débiles) de Mermin con otra demostración distinta (algebraica, con elementos de realidad fuertes) que veremos en la Sec. 3. 5. 4. En [Kunstatter-Trainor 84] se trata la demostración de Mermin en el contexto de la interpretación estadística de la MC. En [Yurke-Stoler 92 b] hay una propuesta experimental para implementarla con dos fuentes separadas de partículas. Comentarios a [Mermin 85] son: [Aspect 85], [Marshall-Santos 85], [Rohrlich 85], [Feingold-Peres 85], [Mirman 85], [Gardner 85], [Ekstrand 85]. Otros artículos críticos son: [Vogt 89], [Allen 92], [Marmet 93]. Otra demostración (estadística pero sin desigualdades) sencilla es la de Wigner, [Wigner 70] (ver también [Jammer 74], pp. 309-310). Una desigualdad cuya derivación es breve es la de Herbert, [Herbert 75], que

3. 4. Demostraciones algebraicas

3. 4. 1. Introducción

En las siguientes secciones se trata lo siguiente: En la Sec. 3. 4. 2 se reproduce la versión de Mermin con tres partículas de espín 1/2 de la demostración de Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ). En la Sec. 3. 4. 3 se discute una simplificación debida a Peres con dos partículas de espín 1/2 que requiere una definición "recursiva" de elementos de realidad. En la Sec. 3. 4. 4 se trata la versión con dos partículas de espín 1/2 del argumento de Hardy.

En estas secciones consideraremos sistemas de dos, tres o más partículas de espín 1/2 que supondremos se encuentran mutuamente separadas por intervalos de género espacio; asimismo, denotaremos por $v(A)$ el valor predeterminado (en una teoría determinista de variables ocultas locales) del resultado de una medición del observable A. En todos los casos tratados, los observables son observables de espín representados por matrices de Pauli o productos tensoriales de matrices de Pauli, y por tanto esos valores sólo serán +1 ó −1.

3. 4. 2. La versión de Mermin de la demostración de GHZ

En 1989, Daniel Greenberger, Michael Horne y Anton Zeilinger (GHZ), propusieron una demostración del teorema de Bell-EPR "sin desigualdades" sobre sistemas individuales [GHZ 89] (ver también [GHSZ 90]). En esta sección veremos una versión simplificada debida a Mermin [Mermin 90 a, b] de la demostración original[38].

también puede encontrarse en: [Stapp 85], [Mermin 89], [Penrose 89] (pp. 573-574 de la edición en castellano), [Ballentine 90], p. 440.

[38] La demostración original de GHZ, sobre un sistema de cuatro partículas, la veremos en la Sec. 5. 2. 1. La bibliografía sobre el argumento de GHZ (y variantes del mismo) es especialmente amplia; además de las referencias citadas en esta sección y la siguiente y en 5. 2, véanse: [Clifton-Redhead-Butterfield 91 a, b] (generalización de la demostración original de GHZ a "factorable stochastic theories, theories in which apparatus hidden variables are causally relevant to measurement results, and theories in which the hidden variables evolve indeterministically prior to the particle-apparatus interactions"), [Pitowsky 91, 92], [Herbut 92], [Clifton-Pagonis-Pitowsky 92], [Stapp 93 a].

Consideremos un sistema de tres partículas de espín 1/2 preparadas inicialmente en el estado de espín

$$|\mu\rangle = (|+++\rangle - |---\rangle)/\sqrt{2}. \tag{3. 32}$$

El estado (3. 32) es propio de cuatro operadores no-locales mutuamente conmutativos:

$$\hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(3)} |\mu\rangle = |\mu\rangle, \tag{3. 33}$$

$$\hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(3)} |\mu\rangle = |\mu\rangle, \tag{3. 34}$$

$$\hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(3)} |\mu\rangle = |\mu\rangle, \tag{3. 35}$$

$$\hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(3)} |\mu\rangle = -|\mu\rangle. \tag{3. 36}$$

De (3. 33)-(3. 36) se deduce que, midiendo un observable local ($\sigma_x^{(i)}$ ó $\sigma_y^{(i)}$) sobre dos de las partículas (es decir, midiendo $\sigma_x^{(i)}$ ó $\sigma_y^{(i)}$, y $\sigma_x^{(j)}$ ó $\sigma_y^{(j)}$, con $i \neq j$), se podría "predecir con certeza" el valor de un observable local de la tercera partícula ($\sigma_x^{(k)}$ ó $\sigma_y^{(k)}$). Por tanto atendiendo al criterio de elemento de realidad (en sentido débil) de EPR, debe haber un elemento de realidad (débil[39]) asociado a cada uno de los 6 observables $\sigma_x^{(i)}$, $\sigma_y^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Dicho de otra manera, los resultados de las mediciones de esos observables *debe estar predefinidos en una teoría de variables ocultas locales*. Llamaremos a estos resultados $v(\sigma_x^{(i)})$, $v(\sigma_y^{(i)})$. De acuerdo con (3. 33)-(3. 36), esos resultados deben verificar respectivamente que

$$v(\sigma_x^{(1)}) \times v(\sigma_y^{(2)}) \times v(\sigma_y^{(3)}) = 1, \tag{3. 37}$$

$$v(\sigma_y^{(1)}) \times v(\sigma_x^{(2)}) \times v(\sigma_y^{(3)}) = 1, \tag{3. 38}$$

$$v(\sigma_y^{(1)}) \times v(\sigma_y^{(2)}) \times v(\sigma_x^{(3)}) = 1, \tag{3. 39}$$

$$v(\sigma_x^{(1)}) \times v(\sigma_x^{(2)}) \times v(\sigma_x^{(3)}) = -1. \tag{3. 40}$$

La demostración "algebraica" del teorema de Bell-EPR concluye viendo que las ecuaciones (3. 37)-(3. 40) son incompatibles. Esto se demuestra mediante un sencillo argumento: cada valor (+1 ó −1) aparece dos veces en los lados izquierdos de las

[39] Son elementos de realidad débiles porque no hay ningún experimento que permita inferir los 6 conjuntamente sobre un sistema individual.

ecuaciones; por tanto el producto de todos los lados izquierdos es 1; sin embargo, el producto de los lados derechos es –1, *q.e.d.*

En la Sec. 3. 5. 4 veremos cómo es posible obtener la misma conclusión (la incompatibilidad entre MC y elementos de realidad) sin necesidad de inferir alternativamente elementos de realidad (para observables incompatibles), utilizando únicamente elementos de realidad (para observables compatibles) inferidos mediante medidas conjuntas en el mismo sistema físico individual (elementos de realidad en sentido fuerte, con la notación de Sec. 3. 2. 6).

3. 4. 3. La demostración de Peres con ERs recursivos

Peres [Peres 90 a], propone una simplificación con sólo dos partículas del argumento anterior. Consideremos dos partículas de espín 1/2 en estado singlete (3. 1). Es ese estado,

$$P_{\psi}(\sigma_x^{(1)} = -\sigma_x^{(2)}) = 1, \tag{3. 41}$$

es decir, al medir $\sigma_x^{(1)}$ y $\sigma_x^{(2)}$ sobre cualquier sistema individual preparado en estado singlete siempre se obtienen resultados opuestos (+1 y –1, ó –1 y +1), por tanto suponiendo que tales resultados están predeterminados (en una teoría de variables ocultas), debe ocurrir que

$$v(\sigma_x^{(1)}) = -v(\sigma_x^{(2)}). \tag{3. 42}$$

Análogamente, como

$$P_{\psi}(\sigma_z^{(1)} = -\sigma_z^{(2)}) = 1, \tag{3. 43}$$

también debe ocurrir que

$$v(\sigma_z^{(1)}) = -v(\sigma_z^{(2)}). \tag{3. 44}$$

Por otro lado, como los operadores $\hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}$ y $\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}$ son conmutativos, supondremos, como en MC, que los observables $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ y $\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ se pueden medir conjuntamente sobre un sistema individual[40]. Además el estado (3. 1) verifica

---

[40] No está claro cómo puede hacerse una medición conjunta de $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ y $\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ (evidentemente *no* se puede hacer midiendo los observables $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_z^{(2)}$, $\sigma_z^{(1)}$, $\sigma_x^{(2)}$ y multiplicando entre sí los dos primeros y los dos segundos, ya que $\sigma_x^{(1)}$ y $\sigma_z^{(1)}$ son incompatibles y también lo son $\sigma_z^{(2)}$ y $\sigma_x^{(2)}$. Esto ha dado lugar a ciertas confusiones; véase [Nogueira-dos Aidos-Caldeira-Domingos 92]). Un

$$(\hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)})\left|\psi\right\rangle = 0, \tag{3. 45}$$

y por tanto,

$$v(\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}) = -v(\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}). \tag{3. 46}$$

En este punto Peres introduce una extensión del criterio de elemento de realidad de EPR[41]. La idea consiste en suponer que "elements of reality which correspond to *commuting* operators can be combined algebraically, and thereby generate new elements of reality, in a recursive manner[42] (...) Therefore, if commuting operators $\hat{A}$ and $\hat{B}$ correspond to elements of reality with numerical values $v(A)$ y $v(B)$, respectively (...), any algebraic $f(\hat{A}, \hat{B})$ also corresponds to an element of reality, with numerical value $f(v(A), v(B))$. This is the spirit, if not the letter, of the EPR criterion. One may distinguish *primary* elements of reality (obtained by observations performed on distant systems) from *secondary* ones (obtained recursively), but both kinds are considered equivalent in the present argument." [Peres 92] y [Peres 93], p. 151. En particular supondremos que

$$v(\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}) = v(\sigma_x^{(1)}) \times v(\sigma_z^{(2)}), \tag{3. 47}$$

$$v(\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}) = v(\sigma_z^{(1)}) \times v(\sigma_x^{(2)}). \tag{3. 48}$$

Pero las cinco ecs. (3. 42), (3. 44), (3. 46)-(3. 48) son incompatibles, como se ve mediante un argumento de paridad: cada valor (+1 ó −1) aparece dos veces, bien en el mismo lado de la igualdad, bien en lados opuestos; al multiplicar las ecuaciones, en el primer caso el producto de los dos valores es 1, en el segundo caso los valores se cancelan; de manera que en el lado izquierdo de la igualdad resultante queda un 1 mientras que en el lado derecho queda un −1 que viene de la ec. (3. 46), *q.e.d.*

---

intento (fallido) de resolver el problema de esa medición conjunta puede encontrarse en [García Alcaine 92].

[41] Esta extensión no se hace explícitamente en [Peres 90 a] pero sí en [Peres 92] y [Peres 93], p. 151.

[42] La razón para hacer esta suposición es que si los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan, la MC nos permite en principio medir simultáneamente los correspondientes observables A y B, junto con cualquier función univaluada $f(A, B)$, y entonces los resultados numéricos de estas tres medidas están relacionadas funcionalmente como lo están los operadores. Nótese que si dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ tienen un estado propio común ψ, con valores propios a y b respectivamente; entonces ψ es automáticamente propio del operador $f(\hat{A}, \hat{B})$ con autovalor $f(a, b)$, independientemente de que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sean o no conmutativos (es decir, basta que ψ sea estado propio de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ para que $f(\hat{A}, \hat{B})\psi = f(a, b)\psi$).

Para Peres esta contradicción muestra que "the result of a measurement of A cannot depend only on A and on the state of the system (unless the wave function is an eigenstate of A). It also depends, in a way not yet understood, on the choice of other quantum measurements that may possibly be performed." [Peres 90 a]. O también muestra que "our recursive definition of elements of reality, which appeared almost obvious, is incompatible with quantum theory." [Peres 93], p. 151.

Como admite Peres, la definición recursiva de elementos de realidad está en "el espíritu [pero no en la letra] del criterio de EPR". En particular, es imposible medir $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ sin interaccionar con ambas partículas y con ello inferir un elemento de realidad "primario" para $\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ "sin perturbar el sistema". Por lo cual, estrictamente hablando, no consideremos que la de Peres sea una demostración del teorema de Bell-EPR sino, más bien, una nueva demostración del teorema de BKS[43]: una demostración dependiente del estado con observables tetradimensionales doblemente degenerados en lugar de con proposiciones.

3. 4. 4. La demostración de Hardy

a. Introducción

En estas secciones nos ocuparemos de la versión con estados de espín de la demostración algebraica del teorema de Bell-EPR propuesta por Lucien Hardy[44].

---

[43] Esta es la opinión de Mermin [Mermin 90 d, 93 a, b]. Mermin ha convencido también a Peres de que su argumento no es una demostración del teorema de Bell-EPR; véase la nota 42 del capítulo 2, y los agradecimientos de [Peres 96 b].

[44] El argumento inicial de Hardy [Hardy 92 a] era un argumento contra la existencia de elementos de realidad invariantes Lorentz y empleaba, en lugar de estados de espín, un par electrón-positrón que atravesaban dos interferómetros de Mach-Zehnder solapados. En este trabajo eludiremos la interpretación del argumento de Hardy como argumento contra los elementos de realidad invariantes Lorentz (interpretación criticada en [Clifton-Niemann 92], [Vaidman 93], [Berndl-Goldstein 94]; ver también [Schauer 94 a]); en lugar de esto, consideraremos la propuesta de Hardy simplemente como una demostración del teorema de Bell-EPR de imposibilidad de variables ocultas locales (de hecho, la de Hardy es "The best version of Bell's theorem", como dice el título de [Mermin 95 a]). En el capítulo 5 veremos el experimento ideal en el que Hardy basó su primer argumento. La primera versión con espines del argumento de Hardy es la propuesta en [Clifton-Niemann 92], posteriormente también Hardy reescribió su argumento para sistemas de dos partículas con dos niveles (en particular para estados de espín de dos partículas de espín 1/2), [Hardy 93], y éste fue generalizado en [Goldstein 94]. Otras presentaciones del argumento son: [Hardy-Squires 92], [Stapp 92] (Sec. VII), [Stapp 93 b] (pp. 5-9), [Stapp 94], [Mermin 94 a, b, 95 a]. Más referencias relacionadas con el argumento de Hardy se dan a lo largo de estas secciones y en el capítulo 5.

Primero definiremos lo que son estados de Hardy en el caso de estados de espín de dos partículas de espín 1/2, enunciaremos el argumento de Hardy en esa situación (lo que su autor llama "No-localidad sin desigualdades para casi todos los estados [puros] entangled de dos partículas de espín 1/2", [Hardy 93]), y veremos cuál es la forma explícita de los estados de Hardy. Luego estudiaremos cuáles son los estados de Hardy que violan máximamente el realismo local. A continuación, introduciremos la descomposición de Schmidt y veremos cómo ésta permite clasificar los estados puros "entangled" en dos tipos: "máximamente entangled" y "estados de Hardy". Finalmente resumiremos las condiciones necesarias para generalizar el argumento al caso de dos partículas de espín *s* y al caso de *n* partículas de espín 1/2.

b. La demostración

Supongamos un sistema formado dos partículas de espín 1/2 cuya función de onda espacial está localizada en sendas regiones separadas por un intervalo de género-espacio. Sobre la primera partícula se puede medir la componente del espín según el vector **a** ($\sigma_a^{(1)}$) o, alternativamente, la componente según el vector **A** ($\sigma_A^{(1)}$); sobre la segunda se puede medir la componente según el vector **b** ($\sigma_b^{(2)}$) o, alternativamente, la componente según el vector **B** ($\sigma_B^{(2)}$). Supongamos que la parte de espín del estado del sistema ha sido preparada previamente en un estado η (que no cambia en la evolución temporal) que tiene las siguientes propiedades:

$$P_\eta(\sigma_B^{(2)} = -1 \mid \sigma_a^{(1)} = +1) = 1, \tag{3. 49}$$

$$P_\eta(\sigma_A^{(1)} = -1 \mid \sigma_b^{(2)} = +1) = 1, \tag{3. 50}$$

$$P_\eta(\sigma_A^{(1)} = -1, \sigma_B^{(2)} = -1) = 0, \tag{3. 51}$$

$$P_\eta(\sigma_a^{(1)} = +1, \sigma_b^{(2)} = +1) > 0. \tag{3. 52}$$

Un estado de espín de dos partículas de espín 1/2 que verifica a la vez estas cuatro propiedades diremos que es un *estado de Hardy*[45].

[45] Esta forma de caracterizar los estados de Hardy es esencialmente la misma que se propone en [Clifton-Niemann 92]. La expresión de las cuatro condiciones de Hardy en términos de probabilidades y probabilidades condicionadas es la habitual en las revisiones de Mermin del argumento de Hardy: [Mermin 94 a, b, 95 a].

El argumento de Hardy es el siguiente: Sólo nos vamos a fijar en uno de aquellos casos en los que se mide $\sigma_a^{(1)}$ y $\sigma_b^{(2)}$ y se obtiene el resultado +1 para ambas partículas; resultado que tiene una probabilidad no nula de suceder, por (3. 52). Si, en ese mismo disparo del experimento, hubiésemos elegido medir $\sigma_a^{(1)}$ y $\sigma_B^{(2)}$ (en lugar de $\sigma_b^{(2)}$), es de suponer que habríamos obtenido $\sigma_a^{(1)}=+1$ como en el caso anterior (ya que, por la hipótesis de localidad, el resultado de la medida de $\sigma_a^{(1)}$ no puede depender de qué se elija medir en la región 2 que está separada por un intervalo de género-espacio de la región 1), y, por la propiedad (3. 49), el otro resultado habría sido $\sigma_B^{(2)}=-1$. Alternativamente, si en el mismo disparo hubiésemos elegido medir $\sigma_A^{(1)}$ (en lugar de $\sigma_a^{(1)}$) y $\sigma_b^{(2)}$, es de suponer que habríamos encontrado $\sigma_b^{(2)}=+1$ (por localidad) y, por (3. 50), $\sigma_A^{(1)}=-1$. Por tanto, teniendo en cuenta los dos razonamientos anteriores y la hipótesis de localidad, si en ese mismo disparo hubiésemos elegido medir $\sigma_A^{(1)}$ y $\sigma_B^{(2)}$ (en lugar de $\sigma_a^{(1)}$ y $\sigma_b^{(2)}$), deberíamos de haber obtenido $\sigma_A^{(1)}=\sigma_B^{(2)}=-1$. Pero, de acuerdo con la propiedad (3. 51), ese resultado jamás se obtiene en una medida sobre el estado η. Conclusión: ninguna teoría de variables ocultas locales en la que los resultados de $\sigma_a^{(1)}$, $\sigma_A^{(1)}$, $\sigma_b^{(2)}$, $\sigma_B^{(2)}$ estén predeterminados (y con ello queremos decir que, por ejemplo, el resultado de $\sigma_a^{(1)}$ dependa sólo del estado de la partícula 1 y del estado del aparato de Stern-Gerlach que se utiliza para medirla), es compatible con la MC en el caso descrito.

La clave para que el argumento de Hardy funcione es que la MC permita estados con las propiedades (3. 49)-(3. 52). Vamos a ver cuál es la forma explícita más general de tales estados; en el capítulo 5 veremos cómo se pueden producir estados con propiedades similares en diversos contextos físicos.

En la base de estados propios de $\sigma_A^{(1)}$ y $\sigma_B^{(2)}$, el estado puro de espín de dos partículas de espín 1/2 más general puede escribirse como

$$\begin{aligned}|\psi\rangle = c_{++}\left|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle\otimes\left|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle + c_{+-}\left|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle\otimes\left|\sigma_B^{(2)}=-1\right\rangle \\ + c_{-+}\left|\sigma_A^{(1)}=-1\right\rangle\otimes\left|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle + c_{--}\left|\sigma_A^{(1)}=-1\right\rangle\otimes\left|\sigma_B^{(2)}=-1\right\rangle\end{aligned} \qquad (3.\ 53)$$

donde los coeficientes deben verificar la condición de normalización

$$\sum_{m,\,n=+,\,-}\left|c_{mn}\right|^2=1. \qquad (3.\ 54)$$

Para que un estado de la forma (3. 53) cumpla (3. 49) debe ocurrir

$$c_{++}\left\langle\sigma_a^{(1)}=+1\middle|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle=-c_{-+}\left\langle\sigma_a^{(1)}=+1\middle|\sigma_A^{(1)}=-1\right\rangle. \qquad (3.\ 55)$$

Para que cumpla (3. 50), debe ocurrir

$$c_{++}\left\langle \sigma_b^{(2)}=+1\middle|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle=-c_{+-}\left\langle \sigma_b^{(2)}=+1\middle|\sigma_B^{(2)}=-1\right\rangle. \tag{3. 56}$$

Para que cumpla (3. 51),

$$c_{--}=0. \tag{3. 57}$$

Y para que cumpla (3. 52),

$$\begin{aligned} &c_{++}\left\langle \sigma_a^{(1)}=+1\middle|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle\left\langle \sigma_b^{(2)}=+1\middle|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle+\\ &c_{+-}\left\langle \sigma_a^{(1)}=+1\middle|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle\left\langle \sigma_b^{(2)}=+1\middle|\sigma_B^{(2)}=-1\right\rangle+\\ &c_{-+}\left\langle \sigma_a^{(1)}=+1\middle|\sigma_A^{(1)}=-1\right\rangle\left\langle \sigma_b^{(2)}=+1\middle|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle+\\ &c_{--}\left\langle \sigma_a^{(1)}=+1\middle|\sigma_A^{(1)}=-1\right\rangle\left\langle \sigma_b^{(2)}=+1\middle|\sigma_B^{(2)}=-1\right\rangle\neq 0 \end{aligned} \tag{3. 58}$$

Sustituyendo (3. 55), (3. 56) y (3. 57) en (3. 58), se llega a

$$-c_{++}\left\langle \sigma_a^{(1)}=+1\middle|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle\left\langle \sigma_b^{(2)}=+1\middle|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle\neq 0, \tag{3. 59}$$

por lo tanto

$$c_{++}\neq 0. \tag{3. 60}$$

Teniendo en cuenta (3. 60), para que se verifique (3. 55) debe ocurrir

$$c_{-+}\neq 0. \tag{3. 61}$$

Análogamente, para que se verifique (3. 56)

$$c_{+-}\neq 0. \tag{3. 62}$$

Resumiendo: los estados de Hardy son los de tipo (3. 53) con uno de los coeficientes cero y los otros tres distintos de cero[46]. Como los vectores **A** y **B** son arbitrarios siempre podemos escribir los estados de Hardy como

$$\begin{aligned} |\eta\rangle=&c_{++}\left|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle\otimes\left|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle+c_{+-}\left|\sigma_A^{(1)}=+1\right\rangle\otimes\left|\sigma_B^{(2)}=-1\right\rangle\\ &+c_{-+}\left|\sigma_A^{(1)}=-1\right\rangle\otimes\left|\sigma_B^{(2)}=+1\right\rangle \end{aligned} \tag{3. 63}$$

con $c_{++}c_{+-}c_{-+}\neq 0$

[46] La forma explícita de los estados propuesta en [Hardy 93] no es todo lo general posible; esta expresión más general fue obtenida en [Goldstein 94].

En general, el estado (3. 63) no es ni simétrico ni antisimétrico bajo el intercambio de partículas[47].

Vamos a ver cómo se puede fabricar, al menos idealmente, un estado de Hardy de espín con dos partículas de espín 1/2. Cójase una partícula de espín 1, hágase pasar por un Stern-Gerlach orientado según el eje z positivo, deséchese el canal asociado al autovalor −1, y reúnanse coherentemente[48] los canales asociados a los autovalores +1 y 0; a continuación, la partícula de espín 1 saliente se desintegra en onda *S* en dos partículas distintas de espín 1/2. Se obtiene así un estado de Hardy de tipo $|\eta\rangle = m|+\,+\rangle + n(|+\,-\rangle + |-\,+\rangle)$. En el capítulo 5 trataremos con más extensión otras situaciones físicas que dan lugar a estados de Hardy.

c. Máxima violación

Ninguna teoría de variables ocultas locales (del tipo descrito antes) puede explicar los resultados de aquellos disparos del experimento en los que se miden $\sigma_a^{(1)}$ y $\sigma_b^{(2)}$ y se obtiene $\sigma_a^{(1)} = \sigma_b^{(2)} = +1$. Sin embargo, esos sucesos son sólo un subconjunto de los sucesos posibles cuando se miden esas componentes (los sucesos en los que $\sigma_a^{(1)} = \sigma_b^{(2)} = -1$, $\sigma_a^{(1)} = -\sigma_b^{(2)} = \pm 1$ no dan lugar a contradicción). En esta sección vamos a ver para qué estados de Hardy la probabilidad de obtener sucesos inexplicables mediante variables ocultas es máxima, y cuál es esta máxima probabilidad. La probabilidad que queremos maximizar es la que aparece en la ec. (3. 52),

$$P_\eta := \left|\langle \sigma_a^{(1)} = +1,\ \sigma_b^{(2)} = +1 | \eta \rangle\right|^2, \tag{3. 64}$$

que, por (3. 52), debe ser estrictamente mayor que cero. Llamando

---

[47] El postulado de simetrización de la MC dice que todos los estados puros de un sistema de partículas idénticas deben ser totalmente simétricos o antisimétricos bajo el intercambio de dos cualesquiera de ellas; en particular el teorema de conexión espín-estadística (ver [Streater-Wightman 64]) dice que en un sistema formado por fermiones/bosones idénticos sólo los vectores de estado antisimétricos/simétricos respecto a la permutación de esas partículas, pueden describir estados físicos. Hay varias formas de que un estado de Hardy "escape" al postulado de simetrización: (a) las partículas son distinguibles (por ejemplo un protón y un muón), (b) las partículas son idénticas (por ejemplo, dos electrones) pero están muy separadas. En la Sec. 5. 2. 2 veremos brevemente un procedimiento que utiliza el principio de exclusión de Pauli [Pauli 26] para fabricar estados (con propiedades que permiten hacer un argumento análogo al) de Hardy con fermiones idénticos.

[48] El problema de la recuperación de la coherencia en un interferómetro de Stern-Gerlach (esto es, un aparato de Stern-Gerlach seguido de imanes para reconstituir coherentemente el haz inicial) se trata en [Englert-Schwinger-Scully 88], [Schwinger-Scully-Englert 88], [Scully-Englert-Schwinger 89].

$$x := \left|\langle \sigma_a^{(1)} = +1 | \sigma_A^{(1)} = +1 \rangle\right|^2, \tag{3. 65 a}$$

$$y := \left|\langle \sigma_b^{(2)} = +1 | \sigma_B^{(2)} = +1 \rangle\right|^2, \tag{3. 65 b}$$

la ec. (3. 59) se convierte en

$$P_\eta = \left|c_{++}\right|^2 xy. \tag{3. 66}$$

$\left|c_{++}\right|^2$ se puede expresar como función de x e y. Para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecs. (3. 53)-(3. 57) teniendo en cuenta que

$$\left|\langle \sigma_A^{(1)} = -1 | \sigma_a^{(1)} = +1 \rangle\right|^2 = 1 - x, \tag{3. 67 a}$$

$$\left|\langle \sigma_B = -1 | \sigma_b = +1 \rangle\right|^2 = 1 - y. \tag{3. 67 b}$$

Entonces (3. 66) se puede escribir como

$$P_\eta(x, y) = \frac{(1-x)(1-y)xy}{1-xy}, \tag{3. 68}$$

que es máxima cuando

$$x = y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{3. 69}$$

que no es otra cosa que el inverso de la *razón áurea*[49]. La probabilidad P_η máxima es

---

[49] La razón áurea o número áureo, representado frecuentemente con τ o ϕ, mide la antigua *sección áurea* griega. La sección áurea de un segmento AB se define con ayuda de un punto M tal que $AB/AM = AM/MB$; cada uno de estos cocientes es entonces igual al número áureo, y vale $(1+\sqrt{5})/2$, es decir 1.61803398... (para algunos autores, el número áureo es el inverso de este número, es decir: $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.61803398...$). Se trata de un número irracional, pero algebraico, solución positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, y que aparece en muchos contextos. Por ejemplo, se puede demostrar que el cociente entre dos elementos consecutivos de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... en la que cada término es la suma de los dos precedentes, tiende hacia la razón áurea cuando n tiende a infinito (la sucesión de Fibonacci aparece en el estudio de la disposición de las hojas alrededor del tallo en las plantas o filotaxia). Históricamente, la razón áurea ha desempeñado un papel importante en la estética clásica (donde se conoce también como la divina proporción); también se le atribuyen interpretaciones místicas y simbólicas. Datos tomados de [Mashaal 95]. También es el cociente entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. La relación entre la razón áurea y el argumento de Hardy fue advertida por primera vez por Mermin, [Mermin 94 a, b] (aunque los cálculos ya estaban hechos en [Hardy 93]).

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 \approx 0.09017. \tag{3. 70}$$

Como

$$x = \cos^2(\hat{aA}/2), \tag{3. 71}$$

de (3. 69)

$$\hat{aA} = \hat{bB} = 76^\circ\ 34'. \tag{3. 72}$$

Los estados para los que se obtiene la máxima P_η son aquellos tales que

$$|c_{++}|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 \approx 0.23607, \tag{3. 73}$$

$$|c_{+-}|^2 = |c_{-+}|^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.38197. \tag{3. 74}$$

d. La descomposición de Schmidt

En esta sección veremos que los estados puros entangled de dos partículas de espín 1/2 sólo pueden ser de dos tipos: o máximamente entangled o estados de Hardy. Para ello introduciremos la descomposición de Schmidt.

Cualquier estado puro de un sistema compuesto por dos subsistemas, descrito por un espacio de Hilbert $H^{(1)} \otimes H^{(2)}$, puede, para una cierta elección de base, expresarse en la forma

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |A_i^{(1)}\rangle \otimes |B_i^{(2)}\rangle, \tag{3. 75}$$

donde $\{|A_i^{(1)}\rangle\}$ es una base ortonormal de vectores de $H^{(1)}$, y $\{|B_i^{(2)}\rangle\}$ es un conjunto ortonormal de vectores de $H^{(2)}$ (suponiendo $\dim H^{(1)} \leq \dim H^{(2)}$). Esto es lo que se llama la descomposición de Schmidt (o también descomposición biortogonal, polar, etc.)[50]. Nótese que, al contrario que la descomposición habitual

[50] Referencias sobre estados de sistemas compuestos y en particular sobre la descomposición de Schmidt son: [Schmidt 07 a, b], [Von Neumann 32] (Sec. VI. 2), [Furry 36 a], [Jauch 68] (Sec. 11. 8), [Ballentine 90] (Sec. 8. 3), [Albrecht 92] (Secs. II, III y apéndice; sobre la descomposición de Schmidt), [Barnett-Phoenix 92], [Albrecht 93] (Sec. II y apéndice; sobre la descomposición de Schmidt), [Peres 93] (Cap. 5), [Elby-Bub 94] (unicidad de la descomposición triortogonal de estados puros), [Albrecht 94]

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} d_{ij} |E_i^{(1)}\rangle \otimes |F_i^{(2)}\rangle, \qquad (3.\ 76)$$

en la descomposición de Schmidt (3. 75) sólo hay un índice[51]. Los vectores $\{|A_i^{(1)}\rangle\}$ y $\{|B_i^{(2)}\rangle\}$ permiten definir sendos operadores autoadjuntos $\hat{A}^{(1)} = \sum_i a_i |A_i^{(1)}\rangle\langle A_i^{(1)}|$, $\hat{B}^{(2)} = \sum_i b_i |B_i^{(2)}\rangle\langle B_i^{(2)}|$ (con autovalores a_i, b_i arbitrarios) que representan sendos observables, $A^{(1)}$, $B^{(2)}$ sobre los subsistemas 1 y 2. $A^{(1)}$ y $B^{(2)}$ se llaman *observables de Schmidt*. Cuando se mide $A^{(1)}$ sobre el subsistema 1 y se encuentra el resultado a_k, entonces cualquier medida de $B^{(2)}$ dará *con certeza* el resultado b_k de modo que se dice que en un estado con descomposición biortogonal (3. 75) los observables de Schmidt están *correlacionados*.

La descomposición biortogonal (de Schmidt) siempre existe, pero es única sólo en el caso en el que todos los $|c_i|$'s distintos de cero sean diferentes [Elby-Bub 94]. Cuando $|c_1| = |c_2|$, el estado ψ se puede descomponer biortogonalmente en un número infinito de bases[52]. Ello resulta particularmente útil para clasificar los estados puros de sistemas con dos partes. Según sea su descomposición biortogonal, un estado puro de un sistema compuesto por dos partes puede ser.

(Apéndice sobre la descomposición de Schmidt), [Mann-Sanders-Munro 95] (sobre la descomposición de Schmidt), [Ekert-Knight 95] (id.), [Peres 95 b] (sobre la descomposición de Schmidt de orden superior).

[51] El (único) índice, *i*, va de 1 hasta la menor de las dimensiones de $H^{(1)}$ y $H^{(2)}$. Por ejemplo, la descomposición de Schmidt de un sistema compuesto por un subsistema de dos niveles (por ejemplo, los estados de espín de una partícula de espín 1/2) y un subsistema de tres niveles (por ejemplo, los estados de espín de una partícula de espín 1) tiene sólo dos términos. Sin embargo, la descomposición de Schmidt de dos espines 1, tiene tres términos.

[52] En cambio, si consideramos sistemas compuestos por *n* subsistemas, descritos por un espacio de Hilbert $H^{(1)} \otimes H^{(2)} \otimes \ldots \otimes H^{(n)}$, *con* $n \geq 3$, la descomposición *n*-ortogonal,

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |A_i^{(1)}\rangle \otimes |A_i^{(2)}\rangle \otimes \ldots \otimes |A_i^{(n)}\rangle, \qquad (3.\ c)$$

no siempre existe, pero cuando existe es única [Elby-Bub 94]. Esto se considera de gran importancia para algunas interpretaciones de la MC (como la de los muchos universos, las interpretaciones basadas en la decoherencia, o las interpretaciones modales); véase [Elby-Bub 94]. De hecho en las interpretaciones modales, la descomposición de Schmidt juega un papel central. Bibliografía sobre las interpretaciones modales: [Van Fraassen 79, 91], [Kochen 85], [Healey 89], [Dieks 89, 94, 95], [Lahti 90] (la descomposición de Schmidt y la medida), [Albert-Loewer 90], [Arntzenius 90], [Elby 93 a], [Bub 93], [Elby-Bub 94], [Clifton 95 a, b, c], [Vermaas-Dieks 95] (generalización de la interpretación modal a estados representados por operadores densidad arbitrarios), [Bub 95], [Cassinelli-Lahti 95], [Bacciagaluppi 95].

a) *Estado factorizable* (o *estado producto*). Si su descomposición biortogonal es única y tiene un solo término; es decir, si se puede escribir como

$$|\psi\rangle = |A^{(1)}\rangle \otimes |B^{(2)}\rangle, \tag{3. 77}$$

donde $|A^{(1)}\rangle$ es un estado del subsistema 1, y $|B^{(2)}\rangle$ es un estado del subsistema 2.

b) *Estado entangled*[53]. Son aquellos que pueden escribirse de la forma (3. 75) con al menos dos coeficientes no nulos. Atendiendo a su descomposición biortogonal, los estados entangled pueden, a su vez, clasificarse en:

b1) *Estado de Hardy* (la razón para este nombre quedará clara enseguida). Son los estados entangled cuya descomposición biortogonal es única (y, recuérdese, la descomposición (3. 75) es única sólo en el caso en el que todos los $|c_i|$'s distintos de cero sean diferentes). Es fácil comprobar, [Hardy 93], que los estados de Hardy tal como fueron definidos anteriormente son de este tipo, y recíprocamente: todos los estados entangled en cuya descomposición de Schmidt los $|c_i|$'s distintos de cero sean todos diferentes, admiten un argumento de Hardy[54].

---

[53] En esta memoria hablaremos de estados "entangled", conservando la traducción inglesa de los términos alemanes que usa Schrödinger ("Verschränkung", traducido como "entanglement" y "verwickelten", traducido por "entangled"), [Schrödinger 35 a]. En castellano, el adjetivo entangled recibe, por lo menos, dos traducciones: "enredado", por ejemplo en [Gonzalo 91] , y "embrollado", en [García Alcaine 92]. La importancia de los estados entangled fue advertida por Schrödinger en [Schrödinger 35 a], para él "[entanglement is] not (...) *one* but rather *the* characteristic trait of quantum mechanics." [Schrödinger 35 b].

[54] Sea $\hat{\rho}$ la matriz densidad que describe el estado de un sistema compuesto de dos subsistemas, cada uno de ellos con dos niveles (por ejemplo, el estado de espín de dos partículas de espín 1/2); se definen las matrices reducidas asociadas a cada subsistema como:

$$\hat{\rho}^{(1)} := \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{22} & \rho_{13}+\rho_{24} \\ \rho_{13}^{*}+\rho_{24}^{*} & \rho_{33}+\rho_{44} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho}^{(2)} := \begin{pmatrix} \rho_{11}+\rho_{33} & \rho_{12}+\rho_{34} \\ \rho_{12}^{*}+\rho_{34}^{*} & \rho_{22}+\rho_{44} \end{pmatrix}. \tag{3. d}$$

Dado un estado puro de la forma (3. 76), su descomposición de Schmidt (3. 75) se obtiene con la siguiente receta: $c_i = \sqrt{\lambda_i}$, donde los $\{\lambda_i\}$ son los valores propios de la matriz reducida $\hat{\rho}^{(1)}$ (y también de $\hat{\rho}^{(2)}$). Los $\{|A_i^{(1)}\rangle\}$ son los vectores propios (normalizados) de $\hat{\rho}^{(1)}$, los $\{|B_i^{(2)}\rangle\}$ son los vectores propios (normalizados) de $\hat{\rho}^{(2)}$ y verifican $|B_i^{(2)}\rangle = \lambda_i^{-1/2} \sum_j f_{ij} |F_j^{(2)}\rangle$, donde los $\{f_{ij}\}$ son los coeficientes de $|\psi\rangle = \sum_{i,j} f_{ij} |A_i^{(1)}\rangle \otimes |F_j^{(2)}\rangle$; véase [Albrecht 94]. Por ejemplo, la descomposición de Schmidt del estado de Hardy

$$|\eta\rangle = (|+^{(1)}\rangle \otimes |+^{(2)}\rangle - |+^{(1)}\rangle \otimes |-^{(2)}\rangle - |-^{(1)}\rangle \otimes |+^{(2)}\rangle)/\sqrt{3} \tag{3. e}$$

b2) *Estado máximamente entangled.* Son los estados cuya descomposición biortogonal no es única (de hecho siempre existen *infinitas* descomposiciones de Schmidt[55]). El ejemplo típico de estado máximamente entangled es el estado singlete[56] de dos partículas de espín 1/2

$$|\mathbf{S}^2 = 0, S_z = 0\rangle = (|\sigma_z^{(1)} = +1\rangle \otimes |\sigma_z^{(2)} = -1\rangle - |\sigma_z^{(1)} = -1\rangle \otimes |\sigma_z^{(2)} = +1\rangle)/\sqrt{2}, \quad (3.\ 78)$$

en el que se ven las infinitas descomposiciones de Schmidt ya que el singlete tiene la propiedad de que cualquiera que sea n

$$|\mathbf{S}^2 = 0, S_z = 0\rangle = (|\sigma_n^{(1)} = +1\rangle \otimes |\sigma_n^{(2)} = -1\rangle - |\sigma_n^{(1)} = -1\rangle \otimes |\sigma_n^{(2)} = +1\rangle)/\sqrt{2}. \quad (3.\ 79)$$

Ningún estado máximamente entangled admite un argumento de Hardy [Hardy 93], [Cereceda 96 c], [Kar 96]; lo cual no deja de ser curioso ya que son estos estados los que violan máximamente las desigualdades de Bell-CHSH [Kar 95].

---

es

$$|\eta\rangle = c_1 |A_1^{(1)}\rangle \otimes |B_1^{(2)}\rangle + c_2 |A_2^{(1)}\rangle \otimes |B_2^{(2)}\rangle, \quad (3.\ f)$$

donde

$$c_1 = [(1+\sqrt{5}/3)/2]^{1/2}, \qquad c_2 = -[(1-\sqrt{5}/3)/2]^{1/2}, \quad (3.\ g)$$

$$|A_1^{(i=1)}\rangle = |B_1^{(i=2)}\rangle = [2/(5-\sqrt{5})]^{1/2} \{|+^{(i)}\rangle + [(1-\sqrt{5})/2]|-^{(i)}\rangle\}, \quad (3.\ h)$$

$$|A_2^{(i=1)}\rangle = |B_2^{(i=2)}\rangle = [2/(5+\sqrt{5})]^{1/2} \{|+^{(i)}\rangle + [(1+\sqrt{5})/2]|-^{(i)}\rangle\}, \quad (3.\ i)$$

y, como $|c_1| \neq |c_2|$, es única.

[55] La razón más evidente para el nombre de estados "máximamente entangled" es que existe un número infinito de bases biortogonales y por tanto existen infinitas correlaciones perfectas entre las partes del sistema. Véase [Shimony 95]. En la literatura hay diferentes definiciones de "índices de correlación" que dan cuenta del grado de "entanglement" entre dos (o más) sistemas; por ejemplo, en [Barnett-Phoenix 91] el índice de correlación se define como el contenido de información entre dos sistemas, entendiendo por tal la cantidad $S^{(1)} + S^{(2)} - S$, donde S es la entropía total del sistema definida en MC [Von Neumann 32] (Sec. V. 2) como, $S = -\mathrm{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$, y $S^{(i)}$ son las entropías parciales, definidas como $S^{(i)} = -\mathrm{tr}(\hat{\rho}^{(i)} \ln \hat{\rho}^{(i)})$. Ver [Schlienz-Mahler 95].

[56] Otro ejemplo, es el estado triplete entangled, que, en particular puede escribirse en las siguientes dos bases de Schmidt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}^2 = 1, S_z = 0\rangle &= (|\sigma_z^{(1)} = +1\rangle \otimes |\sigma_z^{(2)} = -1\rangle + |\sigma_z^{(1)} = -1\rangle \otimes |\sigma_z^{(2)} = +1\rangle)/\sqrt{2} \\ &= (|\sigma_x^{(1)} = +1\rangle \otimes |\sigma_x^{(2)} = +1\rangle - |\sigma_x^{(1)} = -1\rangle \otimes |\sigma_x^{(2)} = -1\rangle)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.\ j)$$

e. Generalizaciones del argumento de Hardy

(a) Generalización a dos partículas de espín *s*: En [Clifton-Niemann 92], apartados 1 y 2, se demuestra que para todo *s* existen estados de espín de dos partículas de espín *s*

$$|\eta\rangle = \sum_{m,\, n=-s}^{s} c^{s}_{mn} |S_A^{(1)} = m\rangle \otimes |S_B^{(2)} = n\rangle, \tag{3. 80}$$

que verifican las siguientes cuatro condiciones, análogas a las condiciones (3. 49)-(3. 52):

$$\sum_{m+n>s} P_\eta (S_A^{(1)} = m, S_b^{(2)} = n) = 0, \tag{3. 81}$$

$$\sum_{m+n>s} P_\eta (S_a^{(1)} = m, S_B^{(2)} = n) = 0, \tag{3. 82}$$

$$P_\eta (S_A^{(1)} = -s, S_B^{(2)} = -s) = 0, \tag{3. 83}$$

$$P_\eta (S_a^{(1)} = s, S_b^{(2)} = s) > 0. \tag{3. 84}$$

Con lo cual se puede hacer un argumento completamente similar al desarrollado para dos partículas de espín 1/2, basado ahora en las propiedades (3. 81)-(3. 84).

(b) Generalización a *n* partículas de espín 1/2: Supongamos *n* partículas de espín 1/2 mutuamente separadas por intervalos de género-espacio. Sobre cada una de ellas podemos elegir medir el espín en dos direcciones alternativas $\mathbf{a}_i$ o $\mathbf{A}_i$. En [Pagonis-Clifton 92] se muestra que cualquier estado de *n* partículas de espín 1/2

$$|\eta\rangle = \sum_{m_1,\, m_2 \ldots,\, m_n = -1}^{+1} c_{m_1 m_2 \ldots m_n} |\sigma_{A_1}^{(1)} = m_1\rangle \otimes |\sigma_{A_2}^{(2)} = m_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\sigma_{A_n}^{(n)} = m_n\rangle, \tag{3. 85}$$

permite un argumento similar al de Hardy, siempre y cuando satisfagan las siguientes condiciones:

$$P_\eta (\sigma_{A_i}^{(i)} = \sigma_{a_j}^{(j)} = +1) = 0, \quad \forall i \neq j, \tag{3. 86}$$

$$P_\eta (\sigma_{A_1}^{(1)} = \sigma_{A_2}^{(2)} = \ldots = \sigma_{A_n}^{(n)} = -1) = 0, \tag{3. 87}$$

$$P_\eta (\sigma_{a_1}^{(1)} = \sigma_{a_2}^{(2)} = \ldots = \sigma_{a_n}^{(n)} = +1) > 0. \tag{3. 88}$$

Nótese que la ecs. (3. 86) son las análogas a las ecs. (3. 49) y (3. 50) en el caso de dos partículas. El argumento, basado ahora en las ecs. (3. 86)-(3. 88), es completamente

similar al de dos partículas. Para más detalles consúltese la referencia original. El caso $n = 3$ se trata con mayor amplitud en [Wu-Xie 96].

3. 5. Elementos de realidad fuertes

3. 5. 1. Introducción

En las secciones siguientes reformularemos el argumento de incompletitud de la MC propuesto por EPR, usando una versión aún más "inevitable" de "elementos de realidad" (ERs) (que llamaremos elementos de realidad fuertes, SERs), que permite eludir la "laguna [lógica] más significativa" del argumento original (ver la Sec. 3. 2. 7). Ello aumenta la sensación de que la MC ha de ser "completable", al menos, con esta versión de ERs. En una segunda parte, sin embargo, se demuestra el teorema de Bell-EPR con elementos de realidad fuertes, poniéndo aún más en evidencia la naturaleza e intensidad del conflicto entre la MC y sus alternativas con variables ocultas locales. La demostración de esta segunda parte se basa en modificaciones, técnicamente triviales pero conceptualmente muy simplificadores, de argumentos descritos en secciones anteriores.

La estructura de esta parte es la siguiente. En la Sec. 3. 5. 2, introducimos una forma más detallada de la condición suficiente para una inferencia conjunta de varios ERs, que llamaremos elementos de realidad fuertes conjuntos (SERs conjuntos); los argumentos de las secciones posteriores se basan de manera crucial en la utilización de los SERs introducidos en esta sección en vez de los ERs usuales de EPR. En la sección 3. 5. 3, formularemos el argumento de incompletitud de EPR en términos de SERs inferidos a partir de mediciones conjuntas (en lugar de a partir de mediciones alternativamente factibles como en el artículo original) en dos estados entangled de tres partículas de espín 1/2: uno que es una extensión a tres partículas del estado de Hardy de dos partículas, y el otro que es el estado de GHZ-Mermin. En la Sec. 3. 5. 4, mostraremos la incompatibilidad entre la MC y los SERs (el teorema de Bell-EPR con SERs) sobre los mismos estados entangled usados en la sección 3. 5. 3. Finalmente resumiremos nuestras conclusiones en la sección 3. 5. 5.

El material de estas secciones forma parte de [Cabello-García Alcaine 95 b, 96 b, c].

3. 5. 2. ERs inferidos de mediciones conjuntas

Llamaremos *elementos de realidad fuertes* (SERs, *strong elements of reality*) a aquéllos que se obtienen con el criterio de EPR, tomando "podemos predecir" en el sentido fuerte. Este nombre refleja su carácter *actual* ("real", por contraposición a "potencial"), a diferencia de los ERs que se usan en el artículo de EPR y en la mayor parte de la literatura: los SERs corresponden a predicciones concretas, con valores bien definidos, en lugar de a ERs con existencia abstracta pero sin valores concretos como los que se infieren usando el sentido débil de "podemos predecir". Adviértase, sin embargo, que el criterio de EPR es una condición *suficiente*, y que el conjunto de hipótesis empleadas para inferir SERs es de hecho *más débil*: ahora no se requiere CFD (para efectuar inferencias alternativas) que se usaba implícitamente en el argumento original de EPR.

Garantizaremos que se cumple la frase "sin perturbar de ninguna manera el sistema" del criterio de EPR imponiendo el requisito de que el sistema al que se asigna el ER esté fuera de los conos de luz con vértice en los puntos en los que se efectúan las observaciones necesarias para hacer la predicción. Así es como se infieren los ERs en el artículo de EPR y está de acuerdo con las ideas de Einstein sobre sistemas compuestos y la independencia entre las propiedades de sus partes: "La situación real del sistema S_2 es independiente de lo que se haga con el sistema S_1, que está espacialmente separado del anterior." [Einstein 49][57]. Más explícitamente, formularemos la condición *suficiente* para la existencia de un SER de la manera siguiente:

> Consideremos un sistema físico con dos partes S_1, S_2, y dos regiones R_1, R_2 de sus tubos de universo respectivos separadas por un intervalo de género-espacio. Si podemos predecir con certeza el valor concreto de una cantidad física en R_2 a partir del resultado de una medida efectuada en R_1, entonces existe un *elemento de realidad fuerte* (SER) que corresponde a esa cantidad física, *al menos* en la parte del tubo de universo de S_2 que está fuera de los conos de luz futuros con vértices en R_1 y antes de cualquier perturbación externa sobre S_2.

El SER no es necesario que sea el valor de la cantidad física, sino cualquier cosa que determine unívocamente dicho valor. Por ejemplo, en la teoría de Bohm la posición de la partícula a la entrada de un aparato de Stern-Gerlach es la que determina el valor de la correspondiente componente de espín [Bohm-Hiley 95]. En cualquier caso, para

[57] Ya citada en la nota 5 de este capítulo.

simplificar los argumentos identificaremos el SER con el valor de la cantidad física que predice.

Nuestro siguiente paso es ilustrar cuándo varios SERs pueden asignarse conjuntamente al mismo sistema individual. Supongamos que hacemos una medición en una región R_1 del tubo de universo de S_1, y que el resultado obtenido nos permite inferir un SER $r^{(2)}$ en S_2 siguiendo nuestro criterio anterior. Sobre el mismo sistema individual, supongamos que un segundo observador hace una medición en una región R_2 del tubo de universo de S_2, separada por intervalos de género-espacio de R_1, y que su resultado le permite inferir un SER $r^{(1)}$ en S_1 en su estado preparado originalmente (antes de cualquier perturbación). La persistencia del SER $r^{(2)}$ después de la medición en R_2 no está garantizada (en general la medida perturba el subsistema S_2; podría incluso destruirlo); lo mismo se puede decir del SER $r^{(1)}$ después de la medición en R_1. De acuerdo con la condición suficiente para la existencia de SERs, podemos asignar a ese sistema individual dos SERs *conjuntos*, $r^{(1)}$ y $r^{(2)}$, al menos en las partes de los tubos de universo que están fuera de los conos de luz futuros con vértices en R_1 y R_2 (coloquialmente, en las partes de los tubos de universo "anteriores" a las mediciones): un caso simplificado se muestra en la figura 3. 2.

Para cualquier par de sucesos (puntuales), uno en cada región, siempre existe un sistema de referencia inercial en el cual ambos sucesos son simultáneos. Por tanto, es tentador adoptar la terminología usual y decir que los SERs conjuntos son "simultáneos", pero hemos evitado esto para enfatizar que la existencia combinada de $r^{(1)}$ y $r^{(2)}$ en el mismo sistema individual no depende de ninguna elección externa de referencial inercial. No es necesario preocuparse por la instanteneidad de las mediciones o por su existencia sobre secciones tridimensionales simultáneas de los tubos de universo de S_1 y S_2, y la generalización a sistemas con tres o más partes separadas por intervalos de género-espacio es inmediata: el único requisito sobre el sistema compuesto es que se puedan hacer predicciones con certeza sobre propiedades (posiblemente no-locales) del sistema individual en alguna región del espacio-tiempo (anterior a cualquier perturbación externa), basadas en mediciones efectuadas en otras regiones separadas por intervalos de género-espacio.

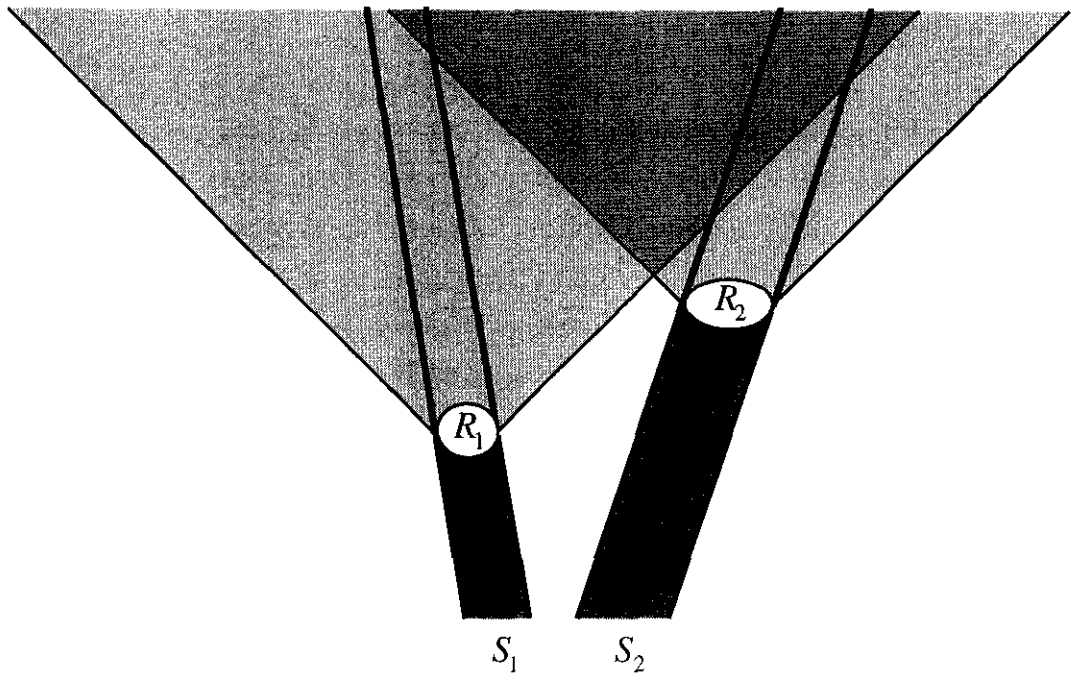


Fig. 3. 2. Para simplificar la representación hemos supuesto que las secciones de los tubos de universo de los subsistemas S_1 y S_2 con el plano de la figura tienen bordes rectos bien definidos y anchura constante (lo que es una obvia idealización, que elude los problemas asociados con el soporte no-compacto y el ensanchamiento de la parte espacial de las funciones de onda). El resultado de una medición en la región R_1 del espacio-tiempo se usa para inferir un elemento de realidad $r^{(2)}$ en el subsistema S_2, al menos fuera de los conos de luz futuros con vértices en R_1, y antes de cualquier perturbación externa sobre S_2. Otra medición efectuada en R_2 cambia en general el estado del subsistema S_2 (S_2 podría dejar de existir), y la persistencia de $r^{(2)}$ como elemento de realidad ya no está garantizada. El mismo razonamiento se aplica cuando se intercambian los índices $1 \leftrightarrow 2$. Existen elementos de realidad fuertes conjuntos $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ al menos en las partes de los tubos de universo fuera de los conos de luz futuros con vértices en R_1 y R_2 (zonas más oscuras en la figura).

3. 5. 3. El argumento de EPR con SERs conjuntos

Vamos a seguir el dictado de EPR antes citado, de encontrar los ERs "apelando a los resultados de experimentos", y vamos a reformular el argumento de incompletitud usando sólo ERs inferidos de mediciones conjuntas en un mismo sistema individual (los SERs conjuntos, definidos en la sección anterior), sin hipótesis *a priori* de CFD para inferencias alternativas. Nuestros SERs conjuntos corresponderán a observables que no

tienen *ningún* estado propio común; ésta es la condición relevante, y no simplemente la de que los observables sean incompatibles (que requiere sólo que no exista una *base* de estados propios comunes, lo que permitiría en principio la existencia de estados libres de dispersión conjunta).

Consideremos un sistema formado por tres partículas de espín 1/2 en regiones separadas por intervalos de género-espacio, preparadas en el estado entangled de espín (en la base de estados propios de los operadores $\hat{\sigma}_z^{(j)}$, $j=1, 2, 3$),

$$|\psi\rangle = a\left(|+++\rangle - |+--\rangle - |-+-\rangle - |--+\rangle\right) + b\,|---\rangle, \tag{3. 89}$$

con $3|a|^2 + |b|^2 = 1$, y $ab \neq 0$.

En este estado,

$$P_\psi(\sigma_x^{(2)} = -1 \,|\, \sigma_z^{(1)} = +1) = 1, \tag{3. 90}$$

$$P_\psi(\sigma_x^{(1)} = -1 \,|\, \sigma_z^{(2)} = +1) = 1, \tag{3. 91}$$

donde $P_\psi(\sigma_x^{(2)} = -1 \,|\, \sigma_z^{(1)} = +1)$ denota la probabilidad condicionada de obtener el valor $\sigma_x^{(2)} = -1$ si $\sigma_z^{(1)} = +1$. Si medimos $\sigma_z^{(1)}$ sobre la primera partícula y obtenemos el resultado $+1$, la propiedad (3. 90) nos permite asignar un SER $\sigma_x^{(2)} = -1$ a la segunda partícula, al menos mientras no se la perturbe. Análogamente, si un segundo observador mide $\sigma_z^{(2)}$ sobre la segunda partícula y obtiene el resultado $+1$, la propiedad (3. 91) le permite asignar un SER $\sigma_x^{(1)} = -1$ a la primera partícula antes de ser perturbada.

Consideremos ahora el observable no-local (y no-factorizable) definido mediante el proyector

$$\hat{\pi}^{(1+2)} = 1 - |--\rangle\langle--|, \tag{3. 92}$$

en el sistema formado por la primera y la segunda partículas. Este observable $\pi^{(1+2)}$ es compatible con $\sigma_z^{(1)}$ y $\sigma_z^{(2)}$ pero no con $\sigma_x^{(1)}$ y $\sigma_x^{(2)}$; de hecho, es fácil comprobar que no existe ningún estado propio común de los tres operadores $\hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)}$, $\hat{I}^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}$ y $\hat{\pi}^{(1+2)}$.

En el estado (3. 89),

$$P_\psi(\pi^{(1+2)} = 1 \,|\, \sigma_z^{(3)} = +1) = 1. \tag{3. 93}$$

Consecuentemente, si un tercer observador mide $\sigma_z^{(3)}$ y obtiene el resultado $+1$, puede asignar un SER $\pi^{(1+2)} = 1$ al sistema formado por la primera y la segunda partículas.

La probabilidad de obtener los resultados $\sigma_z^{(1)} = +1$, $\sigma_z^{(2)} = +1$, $\sigma_z^{(3)} = +1$ en una medida conjunta de los tres observables $\sigma_z^{(j)}$ en regiones espacialmente separadas del mismo sistema físico individual es no nula:

$$P_\psi(\sigma_z^{(1)} = +1,\ \sigma_z^{(2)} = +1,\ \sigma_z^{(3)} = +1) = |a|^2 . \tag{3. 94}$$

En un sistema físico individual en el que se obtienen estos tres resultados, usando (3. 90), (3. 91) y (3. 93) podemos inferir tres SERs conjuntos: $\sigma_x^{(1)} = -1$, $\sigma_x^{(2)} = -1$ y $\pi^{(1+2)} = 1$. Como no existe *ningún* estado propio común de los correspondientes observables, siguiendo a EPR podríamos concluir que el estado cuántico "no proporciona una descripción completa de la realidad física" [EPR 35] de este sistema individual.

Podríamos intentar un argumento de incompletitud similar con el estado de las dos primeras partículas dado por

$$|\eta\rangle = \left(|++\rangle - |+-\rangle - |-+\rangle\right)/\sqrt{3} \tag{3. 95}$$

(un ejemplo de estado de Hardy; ver la Sec. 3. 4. 4), que verifica las propiedades (3. 90) y (3. 91) y es un estado propio de $\hat{\pi}^{(1+2)}$ con valor propio 1. Pero entonces, los valores $\sigma_x^{(1)} = -1$, $\sigma_x^{(2)} = -1$ y $\pi^{(1+2)} = 1$ no satisfarían nuestra condición *suficiente* para ser considerados SERs conjuntos, ya que la preparación del estado (3. 95), que garantiza el valor $\pi^{(1+2)} = 1$, estaría en el pasado causal de las mediciones usadas para inferir los otros dos valores[58]. Por supuesto, los ERs conjuntos podrían existir aunque no se satisfaciese esta condición *suficiente*, pero no necesitamos preocuparnos por

---

[58] Relacionado con esto está la discusión de qué tipo de elementos de realidad se pueden definir en el argumento de Hardy. En [Mermin 94 b], p. 883, se señala que cuando en un estado la condición de predictibilidad no se encuentra en todos los disparos del experimento sino sólo en una fracción, incontrolable, de ellos —como ocurre en el argumento de Hardy—, entonces no se puede "aplicar un argumento del tipo del de EPR". Con nuestra terminología, eso quiere decir simplemente que no tiene sentido hablar de elementos de realidad *débiles* en el argumento de Hardy. Sin embargo, si se consideran elementos de realidad *fuertes*, aunque la condición de predictibilidad sólo se de en uno de los posibles resultados de una medición, bastará que al hacer tal medición en un sistema individual y se obtenga tal resultado para, aplicando *la letra del criterio* de EPR, inferir el correspondiente elemento de realidad fuerte en dicho sistema individual; luego con esta acepción, sí tiene sentido hablar elementos de realidad en el argumento de Hardy. Hardy emplea la siguiente condición suficiente; nótese que en ella ha desaparecido la expresión "sin perturbar..." (ergo no presupone localidad): "If we can predict with certainty (i.e., with probability equal to 1) the result of measuring a physical quantity, then there exists an element of reality corresponding to this physical quantity and having a value equal to the predicted measurement result." [Hardy 92 a], p. 2982.

definiciones más precisas de ERs, porque la simple introducción de la tercera partícula nos permite formular el argumento de incompletitud en términos de SERs que verifican estrictamente la condición para una inferencia conjunta; en este nivel "gedanken" no nos preocuparemos por posibles dificultades adicionales en la preparación experimental del estado de tres partículas (3. 89) en relación con el estado de Hardy (3. 95).

Se puede obtener una demostración de incompletitud todavía más fuerte usando el estado de GHZ-Mermin de tres partículas de espín 1/2:

$$|\mu\rangle = (|+++\rangle - |---\rangle)/\sqrt{2}. \qquad (3.\ 96)$$

Denotemos por $\hat{A}_1 = \hat{\sigma}_x^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(3)}$, $\hat{A}_2 = \hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(3)}$, $\hat{A}_3 = \hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)}$. En este estado,

$$P_\mu(A_j = \varepsilon_j \,|\, \sigma_y^{(j)} = \varepsilon_j) = 1,\ \varepsilon_j = \pm 1,\ j = 1,\ 2,\ 3. \qquad (3.\ 97)$$

No existe ningún estado propio común a ninguna de las parejas de observables A_j, y sin embargo se pueden inferir SERs conjuntos para los tres, midiendo $\sigma_y^{(j)}$ en tres regiones mutuamente separadas por intervalos de género-espacio, y ello cualesquiera que sean los resultados obtenidos en estas mediciones (en el ejemplo anterior nos teníamos que restringir a aquellos sistemas físicos individuales en los que $\sigma_z^{(j)} = +1$, $j = 1,\ 2,\ 3$); el precio que hay que pagar para esta extensión del argumento a todos los sistemas individuales preparados en el estado (3. 96) es que los tres observables incompatibles a los que se asignan SERs conjuntos son ahora no-locales (aunque factorizables), en lugar de un observable no-local y dos locales en el ejemplo "probabilístico" anterior.

En ambos ejemplos (3. 89), (3. 96) se ha formulado el argumento de incompletitud en términos de SERs conjuntos, inferidos a partir de mediciones conjuntas ("simultáneas", en la terminología usual) sobre el mismo sistema individual; tal formulación se había considerado imposible hasta ahora [Clauser-Shimony 78], [d'Espagnat 93], [Shimony 93][59].

---

[59] Emilio Santos, en un e-mail del 25 de mayo de 1995, dice, refiriéndose a uno de nuestros "preprints": "La segunda sección del artículo es curiosa por la demostración que hacéis de que puede haber tres observables no compatibles que, sin embargo dan lugar a elementos de realidad fuertes simultáneos. En mi opinión eso refuerza notablemente el argumento de EPR de que la mecánica cuántica es incompleta, porque libra al argumento de la crítica más importante."

3. 5. 4. El teorema de Bell-EPR con SERs conjuntos

En esta sección vamos a ver cómo, con argumentos completamente similares a los de la sección anterior y en los mismos estados entangled allí considerados, podemos obtener demostraciones del teorema de Bell-EPR con SERs conjuntos. Estos argumentos son simples variantes de los de Hardy y Mermin que vimos en las Secs. 3. 4. 4 y 3. 4. 2.

El estado (3. 89) tiene las siguientes propiedades adicionales:

$$P_\psi(\sigma_z^{(2)} = -1 \mid \sigma_x^{(1)} = +1) = 1, \tag{3. 98}$$

$$P_\psi(\sigma_z^{(1)} = -1 \mid \sigma_x^{(2)} = +1) = 1, \tag{3. 99}$$

$$P_\psi(\sigma_x^{(1)} = +1,\ \sigma_x^{(2)} = +1,\ \sigma_z^{(3)} = +1) = \frac{1}{4}|a|^2. \tag{3. 100}$$

Si medimos los observables $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_x^{(2)}$ y $\sigma_z^{(3)}$, y obtenemos +1 en los tres casos (la probabilidad de que ocurra esto es, de acuerdo con (3. 100), distinta de cero), las propiedades (3. 98) y (3. 99), junto con la propiedad (3. 93), nos permiten inferir respectivamente tres SERs conjuntos asociados con los observables *compatibles* $\sigma_z^{(2)}$, $\sigma_z^{(1)}$ y $\pi^{(1+2)}$, con valores predichos -1, -1 y 1, respectivamente. Pero de acuerdo con la MC, en una medida conjunta (que es en principio factible) de estos tres observables en *cualquier* estado, si los dos primeros resultados son $\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)} = -1$, el tercero será necesariamente $\pi^{(1+2)} = 0$: La MC no es compatible con los elementos de realidad de EPR, incluso en su forma menos controvertible (los SERs conjuntos).

El estado (3. 89) es el producto tensorial del estado de Hardy (3. 95) por el estado $|+\rangle$ de la tercera partícula, entangled con el estado producto $|--\rangle$ de las dos primeras partículas por el estado $|-\rangle$ de la tercera. La presencia de la tercera partícula permite probar la incompatibilidad con la MC (el teorema de Bell-EPR) usando sólo tres SERs conjuntos que jamás pueden encontrarse como resultados de las correspondientes mediciones, no sólo en el estado (3. 95), sino en *cualquier* estado cuántico; por el contrario, los dos ERs del argumento de Hardy, $\sigma_z^{(1)} = -1$, $\sigma_z^{(2)} = -1$, nunca pueden obtenerse en una medida conjunta sobre el estado (3. 89), pero sí existen otros estados en los que se pueden obtener esos resultados.

La contradicción que encontró Mermin (ver Sec. 3. 4. 2) en el estado de GHZ-Mermin (3. 96) entre ERs para observables compatibles y la MC también se puede formular en términos de SERs conjuntos. Llamemos $\hat{B}_1 = \hat{\sigma}_y^{(2)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(3)}$, $\hat{B}_2 = \hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(3)}$, $\hat{B}_3 = \hat{\sigma}_y^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)}$; entonces en el estado (3. 96),

$$P_\mu(B_j = \varepsilon_j \,|\, \sigma_x^{(j)} = \varepsilon_j) = 1,\ \varepsilon_j = \pm 1,\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{3. 101}$$

$$P_\mu(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)} = -1) = 1. \tag{3. 102}$$

Si se miden los tres $\sigma_x^{(j)}$ en regiones espacialmente separadas de un mismo sistema individual preparado en el estado (3. 96), la ec. (3. 101) permite inferir tres SERs conjuntos, $B_j = \varepsilon_j$, que deben verificar la relación $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1$, de acuerdo con la ec. (3. 102). Por otro lado, el producto de los tres observables *compatibles* B_j es el operador identidad, y por tanto no hay *ningún* estado cuántico en el que los resultados de sus mediciones sobre el mismo sistema individual satisfagan tal relación (cada resultado es ± 1, pero el producto de los tres es siempre $+1$). Esto prueba de nuevo la incompatibilidad entre MC y SERs.

Nótese que todos los observables que hemos usado en las medidas necesarias para inferir ERs en las Secs. 3. 5. 3 y 3. 5. 4 son componentes de espín de una partícula, y por tanto no debería haber ninguna dificultad para su medición conjunta y la correspondiente inferencia de tres SERs conjuntos. Las no-localidades aparecen sólo en los observables a los que se asignan los ERs; en este sentido la verificación experimental de las predicciones de las Secs. 3. 5. 3 y 3. 5. 4 podría ser problemática, pero nuestros ejemplos (gedanken) muestran las diferencias entre la *teoría* cuántica y cualquier teoría que incluya elementos de realidad *a la* EPR: los ERs no se pueden usar para "completar" la MC.

3. 5. 5. Sumario

Usando sólo lo que hemos llamado "elementos realidad fuertes conjuntos", inferidos a partir de mediciones conjuntas sobre el mismo sistema individual (elementos de realidad más *actuales* que los usuales ERs *potencialmente* inferidos a partir de mediciones *alternativamente* factibles), hemos llegado a las siguientes conclusiones:

i) Si aceptamos la aparentemente inocente condición para la existencia de elementos de realidad, existirían SERs conjuntos para observables sin *ningún* estado propio común. Bajo estas premisas, la MC sería incompleta. Esta formulación del argumento de EPR en términos de SERs conjuntos se había considerado imposible hasta ahora.

ii) Hay SERs conjuntos ("simultáneos", en la terminología usual) para observables compatibles que, de acuerdo con la MC, jamás pueden obtenerse como resultados de las correspondientes mediciones conjuntas en *ningún* sistema individual. Por tanto, por

muy plausibles que resulten, los elementos de realidad son incompatibles con la MC (el teorema de Bell-EPR).

Ambos resultados se han demostrado usando argumentos completamente similares sobre los mismos estados entangled (3. 89), (3. 96).

Capítulo 4. Relaciones entre el teorema de Bell-KS y el de Bell-EPR

"Is the Bell-KS theorem silly?"

[Mermin 93 b], p. 811.

"... one should constantly look for new ways to deal with old ideas, new ways to apply knowledge. One should take delight in surprises — in turning things upside down."

[Mermin 90 d], p. 32.

"Bell [Bell 66] argued that the general requirement of noncontextuality cannot be justified on physical grounds, but pointed out that a special case of noncontextuality is physically plausible. If (...), the requirement of noncontextuality (...) becomes a locality condition."

[Bub 95], p. 1257.

"J. S. Bell's classic 1966 review paper on the foundations of quantum mechanics led directly to the Bell nonlocality theorem. It is not widely appreciated that the review paper contained the basic ingredients needed for a nonlocality result which holds in certain situations where the Bell inequality is not violated."

[Brown-Svetlichny 90], p. 1379.

Capítulo 4
Relaciones entre el teorema de Bell-KS y el teorema de Bell-EPR

4. 1. Introducción

En este capítulo se aborda la relación entre las demostraciones del teorema de BKS (o de Bell-KS) de imposibilidad de variables ocultas no-contextuales estudiadas en el capítulo 2 y las demostraciones algebraicas del teorema de Bell-EPR de imposibilidad de variables ocultas locales examinadas en el capítulo 3. El propósito fundamental de este capítulo es insistir en que las desigualdades de Bell no son la única forma de demostrar teóricamente la imposibilidad de variables ocultas locales (el teorema de Bell-EPR) sino que tal demostración puede hacerse usando argumentos geométricos del mismo tipo que los empleados en el capítulo 2.

El capitulo está dividido en dos partes distintas (que tienen en común el que en ambas se aplican argumentos de BKS para demostrar la imposibilidad de variables ocultas locales). La primera ocupa la sección 4. 2, y en ella se resumen los trabajos de Heywood, Redhead, Stairs y otros autores, en los que se aplicaban por primera vez los argumentos geométricos de tipo BKS a sistemas de dos partículas espacialmente separadas en un estado entangled de espín. En 4. 2. 1 se enumeran algunas de las motivaciones originales de estos trabajos, y en 4. 2. 2 se presenta el resultado principal: el teorema de "BKS con localidad"; en 4. 2. 3 se sugiere una versión probabilística de este teorema, análoga a la discutida en 2. 3. 6 para el teorema de BKS.

La segunda parte ocupa la Sec. 4. 3, e incluye nuestras contribuciones sobre la relación entre las demostraciones del teorema de BKS y las del teorema de Bell-EPR. En

ella veremos cómo se derivan algunas de las demostraciones algebraicas aditivas de imposibilidad de variables ocultas a partir de la demostración con 18 direcciones en dimensión 4 del teorema de BKS introducida en 2. 4. 2. Este estudio comienza en 4. 3. 2 dando una interpretación física de las proposiciones que aparecen en el conjunto CEG-18, en términos de los estados de espín de dos partículas de espín 1/2. En 4. 3. 3 se extrae una versión dependiente del estado de CEG-18 (con 10 proposiciones más el singlete) que esencialmente es una versión aditiva de la demostración de Peres con elementos de realidad "recursivos" del teorema de Bell-EPR. En la Sec. 4. 3. 4 se hace una simplificación adicional de manera que se puede demostrar un resultado similar con sólo cinco proposiciones más el singlete. En 4. 3. 5. se deriva la demostración de Hardy del teorema de Bell-EPR como una versión probabilística derivada a partir de CEG-18. En la Sec. 4. 3. 6 se ve cómo se puede hacer un tratamiento similar a partir de la demostración con 36 direcciones en dimensión 8 de Kernaghan y Peres estudiado en la Sec. 2. 6. 2. Por último, en la Sec. 4. 3. 7 se resumen los requisitos suficientes que debe cumplir una demostración aditiva del teorema de BKS para poder interpretarse como una demostración algebraica de imposibilidad de variables ocultas locales.

Las Secs. 4. 3. 3 y 4. 3. 5 forman parte de [CEG 96 a], y la Sec. 4. 3. 4 forma parte de [CEG 96 b].

4. 2. El teorema de BKS con localidad

4. 2. 1. Introducción: Escapatorias al teorema de BKS, motivaciones para un teorema de BKS con localidad

Vamos a ver las dos objeciones más serias apuntadas en la literatura sobre la relevancia real del teorema de BKS, que denotaremos (i) y (ii). El primer reparo sobre la importancia de las conclusiones del teorema de BKS es el que sugiere Bell en [Bell 66] y que ya comentamos en la Sec. 2. 3. 3:

(i) La no-contextualidad de las variables ocultas exigida en BKS no es un requisito exigible *a priori* a cualquier teoría de variables ocultas.

Según Bell, para eludir (i) habría que reemplazar la hipótesis de no-contextualidad, por otra exigible en base a las evidencias experimentales, por ejemplo la localidad. Como hemos visto, esto es lo que hace precisamente el teorema de Bell-EPR.

Otra posible objeción al teorema de BKS está relacionada con el formalismo matemático de su demostración: los observables implicados en las demostraciones del teorema de BKS son todos observables asociados a operadores *degenerados* (que también llamaremos operadores *no-maximales*); esto ocurre porque cualquier observable A implicado (de manera esencial) en una demostración de BKS ha de ser compatible con al menos otros dos B y C que son, a su vez, mutuamente incompatibles (es decir, $[\hat{A}, \hat{B}]=[\hat{A}, \hat{C}]=0$; $[\hat{B}, \hat{C}]\neq 0$, de donde se deduce que $\hat{A}$ debe ser degenerado); Físicamente esto quiere decir que cada observable aparece en la demostración en al menos dos contextos experimentales distintos. Un teorema de Maczynski, [Maczynski 71 a], teorema 4. 4 (ver también [Maczynski 71 b]), muestra que se puede completar consistentemente cualquier asignación (manteniendo las demás hipótesis de BKS) de valores a observables, si tal asignación sólo se pretende para observables asociados a operadores maximales, es decir,

(ii) El teorema de BKS deja de ser cierto si sólo se asignan valores predefinidos a observables maximales.

Así pues, el teorema de BKS depende esencialmente de la asignación de valores a observables no-maximales. El resultado de Maczynski es compatible con el hecho de que el lema de Gleason y el teorema de BKS sólo sean ciertos para espacios de Hilbert de dimensión mayor que dos, ya que en dimensión dos todos los operadores autoadjuntos no triviales (distintos de la identidad) son maximales.

Esta objeción (ii) sugiere una posible escapatoria al teorema de BKS propuesta por van Fraassen, [Van Fraassen 73, 79] (ver también, [Van Fraassen 91], pp. 361-362). La escapatoria de van Fraassen consiste en suponer que sólo los operadores maximales están asociados inambiguamente a observables físicos, mientras que un operador no-maximales puede corresponder en una teoría de variables ocultas a varios "observables" diferentes[1]. Más concretamente, la escapatoria a BKS propuesta por van Fraassen se resume en asociar a cada operador no-maximal $\hat{A}$ un conjunto de "observables" $\{A_B, A_C, \ldots\}$ de manera que cada "observable" está asociado a cada uno de los operadores maximales de los que $\hat{A}$ es función ($\hat{A} = f(\hat{B})$, $\hat{A} = g(\hat{C})$, ...)[2]. Como un operador no-maximal puede estar relacionado funcionalmente con muchos operadores maximales, algunos incluso mutuamente incompatibles, se podrán asignar valores diferentes a un mismo operador no-maximal, por ejemplo dependiendo de que $\hat{A}$ se mida midiendo $\hat{B}$ y aplicando la función f al resultado o midiendo $\hat{C}$ y aplicando la función g. Así pues, el valor de $\hat{A}$ depende del contexto de la medida, y aunque se sigue cumpliendo $v(A_B) = f[v(B)]$ y $v(A_C) = g[v(C)]$, ello no implica necesariamente que $v(A_B) = v(A_C)$. En definitiva, en el modelo de van Fraassen los resultados asociados a "observables no-maximales" en general sí dependen del contexto. Lo único que se pierde en la descripción según este modelo de variables es la hipótesis de que la identidad entre las estadísticas de las medidas implica la identidad sin más entre los observables.

En vista de la profusión de observables que hace falta introducir, se ha bautizado a esta alternativa de variables ocultas como la MC de-ockhamizada [Redhead 87], p. 135[3]. Esta "de-ockhamización" no hace falta hacerla en todas partes; el modelo de van Fraassen supone que los operadores autoadjuntos maximales sí corresponden cada uno a un único observable.

---

[1] Dos observables A y A' empíricamente equivalentes y representados en MC por el mismo operador $\hat{A}$, podrían tener, en una teoría de variables ocultas, valores definidos distintos y aún así las predicciones estadísticas de esta teoría de variables ocultas seguir siendo compatibles con las de la MC, como muestra un teorema debido a Gudder, [Gudder 68].

[2] Se puede demostrar, [Redhead 87], pp. 20-22, que si $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son dos operadores no-conmutativos maximales, y si $\hat{A} = f(\hat{B})$ y $\hat{A} = g(\hat{C})$, entonces $\hat{A}$ debe de ser un operador no-maximal.

[3] Guillermo de Ockham fue un monje franciscano del siglo XIV, parte de cuya filosofía se resume en el aforismo (atribuido) "Essentia non sunt multiplicanda praeter necessitatem" (la esencia no debe multiplicarse excepto por necesidad). La idea que trata de expresar es que, ante teorías alternativa que den cuenta por igual de los hechos, debe preferirse aquélla que sea más sencilla. El término usar la "navaja de Ockham" —para eludir una excesiva complicación— fue acuñado en el siglo XIX por Sir William Rowan Hamilton; ver [Garrett 91].

Dado un sistema compuesto de dos subsistemas 1 y 2 con espacios de Hilbert asociados $H^{(1)}$ y $H^{(2)}$, respectivamente, diremos que un observable es *localmente maximal* si se representa en MC por un operador del tipo $\hat{A}^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)}$ o $\hat{I}^{(1)} \otimes \hat{B}^{(2)}$ sobre $H^{(1)} \otimes H^{(2)}$, donde $\hat{A}^{(1)}$ ($\hat{B}^{(2)}$) es un operador no-degenerado en $H^{(1)}$ ($H^{(2)}$), e $\hat{I}^{(i)}$ denota la identidad en $H^{(i)}$.

A la vista de las dos objeciones apuntadas sobre la relevancia del teorema de BKS, una pregunta interesante es saber si se puede extender el teorema de Maczynski a observables localmente maximales, es decir si se puede evitar una contradicción del tipo BKS si sólo pretendemos asignar valores de variables ocultas a observables localmente maximales. La sugerencia de que éste sería un tema interesante de investigación fue hecha en [Bub 76]. Una "demostración" de que tal extensión del teorema de Maczynski es posible puede encontrarse en [Demopoulos 80], Sec. V, addenda. Sin embargo, en [Humphreys 80] y [Bub 80] se discute esa demostración y se llega a la conclusión contraria. De hecho, el argumento de la próxima sección es un contraejemplo a tal extensión y demuestra que *sí* se pude hacer un argumento de BKS (dependiente del estado) usando sólo observables localmente maximales.

4. 2. 2. El teorema de BKS con localidad

En esta sección se enuncia y demuestra lo que llamaremos el teorema de BKS con localidad. Antes de empezar conviene hacer énfasis en tres puntos:

(a) El teorema de BKS con localidad elude las objeciones de Bell y van Fraassen sobre el teorema de BKS, debilitando las hipótesis sobre las variables ocultas que hacían falta en el teorema de BKS.

(b) El correspondiente teorema es pues un teorema de imposibilidad de variables ocultas locales (como el teorema de Bell-EPR[4]).

(c) Su demostración utiliza los mismos argumentos *algebraicos* que se usaban en las demostraciones (como la original de KS o sus variantes) del teorema de BKS[5].

---

[4] En [Elby-Jones 92] y [Elby 93 b] se defiende incluso que las hipótesis del teorema de BKS con localidad son más débiles que las del teorema de Bell-EPR y por tanto su conclusión más general.

[5] [Brown-Svetlichny 90], p. 1379: "J. S. Bell's classic 1966 review paper on the foundations of quantum mechanics led directly to the Bell nonlocality theorem. It is not widely appreciated that the review paper contained the basic ingredients needed for a nonlocality result which holds in certain situations where the Bell inequality is not violated." [Heywood-Redhead 83], p. 481: "... particularly after the work of Kochen and Specker [KS 67] and Bell [Bell 64], two serious allegations have been

Aparentemente, la conexión entre el teorema de BKS (de imposibilidad de variables ocultas no-contextuales) y las variables ocultas locales fue sugerida por Simon Kochen en un trabajo no publicado a principios de los años 70; independientemente, una idea similar desarrollada por Allen Stairs en su tesis doctoral [Stairs 78][6]. Los primeros artículos publicados sobre el teorema de BKS con localidad son [Heywood-Redhead 83] y [Stairs 83]; comparaciones entre ambos artículos pueden encontrarse en [Stairs 83] y [Brown-Svetlichny 90], en éste además se sistematiza la demostración de Stairs[7]. El enunciado del teorema que veremos aquí es esencialmente el de [Brown-Svetlichny 90], la demostración, sin embargo, es más parecida a la de [Elby-Jones 92] (ver también [Elby 93 b]) ya que es la única que reúne las siguientes tres características:

(i) Es una demostración finita (al contrario que la de [Brown-Svetlichny 90] que, como se señala en [Brown 93], p. 112, requiere un continuo de observables).

(ii) Usa un número reducido de observables. Se basa en el conjunto totalmente no-coloreable en dimensión 3 que en el capítulo 2 llamamos P-33 (y no en KS-117, como sugieren [Heywood-Redhead 83]).

(iii) Sólo necesita observables localmente maximales (al contrario que [Heywood-Redhead 83], que manejaban cuadrados de componentes de espín de dos partículas de espín 1, representadas por operadores degenerados).

---

brought against realism in quantum mechanics. First, that a realistic interpretation involves an algebraic contradiction—this charge came from the work of Kochen and Specker. Second, that realism entails nonlocality—this came from Bell's work. In this paper, by showing that any local realism leads to a Kochen-Specker type of contradiction, we shall show how the results of Kochen-Specker and Bell are linked."

[6] Por ejemplo, en [Heywood-Redhead 83], p. 481, se dice: "The connection between nonlocality and the Kochen-Specker paradox appears to have been suggested by Simon Kochen in an unpublished comment to A. Shimony. (We are grateful to Professor Shimony for this information.) The idea was developed in a rather different context by Stairs [Stairs 78]." Comentarios similares pueden encontrarse en [Stairs 83], p. 581, y [Shimony 84 a], p. 36.

[7] Bibliografía adicional sobre el teorema de BKS con localidad: [Krips 87] (Cap. 9), [Redhead 87] (Cap. 6), [Elby 90 a] (generalización del teorema de BKS con localidad a teorías de variables ocultas factorizables estocásticas), [Elby 90 b]; [Penrose 92, 93, 94 a, b] y [Zimba-Penrose 93] hacen una demostración del teorema de BKS con localidad con dos partículas de espín 3/2 preparadas en el estado singlete y usando como conjunto totalmente no-coloreable el conjunto Q-40 que vimos en la Sec. 2. 4. 2. b.

Siguiendo a [Brown-Svetlichny 90], con los necesarios cambios de notación para ser consistentes con la usada hasta ahora, consideraremos las siguientes hipótesis sobre un sistema compuesto de dos partes 1 y 2 separadas por un intervalo de género-espacio:

(BKSL1) *Separabilidad:* Cualquier observable localmente maximal $A^{(1)}$, $B^{(2)}$ (representado por operadores $\hat{A}^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)}$, $\hat{I}^{(1)} \otimes \hat{B}^{(2)}$, donde $\hat{A}^{(1)}$, $\hat{B}^{(2)}$ son no-degenerados) es función univaluada de las variables ocultas λ, con valores respectivos $v(A^{(1)})$, $v(B^{(2)})$. Estos valores corresponden a los resultados de (cualquier tipo) de mediciones diseñadas para medir por separado $A^{(1)}$ sobre el sistema 1, y $B^{(2)}$ sobre el sistema 2.

(BKSL2) *Localidad:* $v(A^{(1)})$ no es sensible a ninguna elección de medición en 2 (separado de 1 por un intervalo de género-espacio). Análogamente $v(B^{(2)})$ no es sensible a ninguna elección de medición en 1.

(BKSL3) *Sucesos conjuntos excluidos:* Si $P_\psi(A^{(1)} = a, B^{(2)} = b) = 0$ entonces $v(A^{(1)}) \neq a$, o $v(B^{(2)}) \neq b$[8].

Teorema de BKS con localidad: Una teoría (no-estocástica) de variables ocultas que satisfaga (BKSL1), (BKSL2) y (BKSL3) es inconsistente con la descripción mecanocuántica de pares de partículas de espín 1 preparadas en el estado singlete de espín total cero.

Demostración: Dados tres números reales distintos de cero y distintos entre sí $\{a, b, c\}$, para cada trío de direcciones mutuamente ortogonales $\theta = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ podemos definir el observable localmente maximal de la partícula 1

$$H_\theta^{(1)} = a(S_x^{(1)})^2 + b(S_y^{(1)})^2 + c(S_z^{(1)})^2, \qquad (4.\ 1)$$

cuyos posibles resultados son $\{h_x = b + c,\ h_y = a + c,\ h_z = a + b\}$. Ya vimos en la Sec. 2. 4. 3. a lo que representaba y cómo se podía medir este observable.

Consideremos ahora un sistema de dos partículas de espín 1 preparadas en el estado de espín total cero (singlete), que se puede escribir como

[8] De (BKSL1) y (BKSL3) se deduce que $v(A^{(1)})$ ha de pertenecer al espectro de $\hat{A}^{(1)}$ y análogamente $v(B^{(2)})$ debe de pertenecer al espectro de $\hat{B}^{(2)}$.

$$|\psi\rangle = \left[\left|S_n^{(1)} = +1\right\rangle \otimes \left|S_n^{(2)} = -1\right\rangle + \left|S_n^{(1)} = -1\right\rangle \otimes \left|S_n^{(2)} = +1\right\rangle - \left|S_n^{(1)} = 0\right\rangle \otimes \left|S_n^{(2)} = 0\right\rangle\right] / \sqrt{3} \tag{4. 2}$$

para una dirección cualquiera **n**, o como

$$|\psi\rangle = -\left[\left|S_x^{(1)} = 0\right\rangle \otimes \left|S_x^{(2)} = 0\right\rangle - \left|S_y^{(1)} = 0\right\rangle \otimes \left|S_y^{(2)} = 0\right\rangle + \left|S_z^{(1)} = 0\right\rangle \otimes \left|S_z^{(2)} = 0\right\rangle\right] / \sqrt{3} \tag{4. 3}$$

para cualquier trío de direcciones ortogonales $\theta = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, o equivalentemente, en función de los estados propios de $H_\theta^{(1)}$ para la primera partícula, como[9]

$$|\psi\rangle = -\left[\left|H_\theta^{(1)} = h_x\right\rangle \otimes \left|S_x^{(2)} = 0\right\rangle - \left|H_\theta^{(1)} = h_y\right\rangle \otimes \left|S_y^{(2)} = 0\right\rangle + \left|H_\theta^{(1)} = h_z\right\rangle \otimes \left|S_z^{(2)} = 0\right\rangle\right] / \sqrt{3} \tag{4. 4}$$

Para completar el argumento necesitamos un lema previo.

Lema: En un sistema individual en el estado singlete, dadas tres direcciones mutuamente ortogonales $\theta = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, *uno y sólo uno* de los valores $v(S_x^{(2)})$, $v(S_y^{(2)})$, $v(S_z^{(2)})$ es cero (los otros dos valen +1 ó −1).

Demostración. Al medir $H_\theta^{(1)}$ sobre la partícula 1 se obtendrá uno de los valores $v(H_\theta^{(1)}) = h_i$ ($i = x, y, z$); teniendo en cuenta que para el singlete

$$P_\psi(H_\theta^{(1)} = h_i,\ S_i^{(2)} = \pm 1) = 0, \tag{4. 5}$$

entonces, de acuerdo con (BKSL3), $v(S_i^{(2)}) = 0$.

Vamos a demostrar, por reducción al absurdo, que ninguno de los otros dos valores puede ser cero: supongamos que al medir $H_\theta^{(1)}$ se obtiene h_x con lo que $v(S_x^{(2)}) = 0$, supongamos por un momento que *además* $v(S_y^{(2)}) = 0$; teniendo en cuenta que para el singlete

---

[9] La relación entre los estados propios de $S_z^{(1)}$ y los de $H_\theta^{(1)}$ es

$$\left|S_z^{(1)} = -1\right\rangle = \left[\left|H_\theta^{(1)} = h_x\right\rangle + \left|H_\theta^{(1)} = h_y\right\rangle\right] / \sqrt{2}, \tag{4. a}$$

$$\left|S_z^{(1)} = 0\right\rangle = \left|H_\theta^{(1)} = h_z\right\rangle, \tag{4. b}$$

$$\left|S_z^{(1)} = +1\right\rangle = -\left[\left|H_\theta^{(1)} = h_x\right\rangle - \left|H_\theta^{(1)} = h_y\right\rangle\right] / \sqrt{2}. \tag{4. c}$$

$$P_{\psi}(H_{\theta}^{(1)} = h_i,\ S_j^{(2)} = 0) = 0, \text{ con } i \neq j, \qquad (4.\ 6)$$

entonces, de acuerdo con (BKSL3), $v(H_{\theta}{}^{(1)}) = h_y$; sin embargo habíamos supuesto que al medir $H_{\theta}{}^{(1)}$ se obtuvo $v(H_{\theta}{}^{(1)}) = h_x$ ($h_x \neq h_y$), luego llegamos a una contradicción. El razonamiento es análogo para cualquier otro resultado de medir $H_{\theta}{}^{(1)}$, *q.e.d.*

El lema anterior es cierto para cualquier elección de direcciones mutuamente ortogonales $\theta = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$; pero sabemos por el argumento geométrico que hay detrás de la demostración del teorema BKS que existen conjuntos de direcciones para los que es imposible asignar los valores 0 y 1 (en este caso +1 ó –1, en lugar de 1) de manera que de cada tres direcciones ortogonales sólo una tenga el valor 0 (da igual lo que se haga con las otras dos direcciones siempre que no tengan el valor 0). Siguiendo a [Elby-Jones 92], consideraremos el conjunto totalmente no-coloreable P-33 (que tiene 33 direcciones formando 16 tríos ortogonales). La demostración termina viendo que es imposible asignar valores a las proposiciones de P-33 con estas reglas (P-33 es totalmente no-coloreable), cosa que hicimos en la Sec. 2. 4. 1. b, *q.e.d.*

El número de observables (localmente maximales) empleado en la demostración anterior es: 16 observables del tipo $H_{\theta}{}^{(1)}$ (correspondientes a los 16 tríos θ ortogonales de P-33), y 33 observables de tipo $S_n^{(2)}$ (correspondientes a las 33 direcciones n de P-33). Nótese también que por cada $H_{\theta}{}^{(1)}$ se utilizan 12 correlaciones perfectas entre éste y el correspondiente trío $\{S_x^{(2)}, S_y^{(2)}, S_z^{(2)}\}$ (para cada dirección hay dos correlaciones como (4. 5) y dos correlaciones como (4. 6)), lo que hace un total de $16 \times 12 = 192$ correlaciones perfectas.

4. 2. 3. Versión probabilística del teorema de BKS con localidad

En el resto de este capítulo (y en general en toda la memoria) consideraremos que también los observables no-maximales (como los cuadrados de las componentes del espín de una partícula de espín 1) son observables unívocamente definidos en una teoría de variables ocultas. En la Sec. 2. 3. 6. vimos una demostración probabilística del teorema de BKS que consistía en preparar una partícula de espín 1 en un estado propio de una componente del espín con autovalor cero haciéndola pasar por un Stern-Gerlach (SG) *A* y posteriormente hacer pasar un sistema individual así por otro SG *B* con una orientación distinta elegida adecuadamente para que en una teoría de variables ocultas no-contextuales el resultado de esa segunda medición nunca pudiera ser cero. Esa demostración se puede convertir en una demostración probabilística del teorema de BKS

con localidad sin más que preparar un sistema de dos partículas de espín 1 en el estado singlete y hacer pasar una de las partículas por el SG A y a la otra por el SG B, separados ahora por un intervalo de género-espacio. En una teoría de variables ocultas locales jamás se podrían obtener ceros en ambos Stern-Gerlach, pero en MC, estos sucesos tienen una probabilidad no nula. Esta demostración se presenta en [Clifton 93], los cálculos son sencillos (y dependen del DPS elegido) y análogos a los de la Sec. 2. 3. 6 (pero ahora sobre el singlete), por lo que no los detallaremos aquí.

4. 3. Relaciones entre las demostraciones del teorema de BKS y las del teorema de Bell-EPR

4. 3. 1. Introducción

En la secciones 2. 3. 4 (los tres pasos de la demostración de KS) y 2. 4. 3 c (su generalización a dimensión arbitraria mayor que tres) vimos cómo, aumentando el número de direcciones, podíamos ir desde una demostración probabilística del teorema de BKS a una demostración no-probabilística dependiente del estado, y de ésta a otra independiente del estado. En las secciones siguientes vamos a ilustrar el proceso contrario; en la Sec. 4. 3. 2 interpretaremos el conjunto totalmente no-coloreable (TNCS) más pequeño conocido en dimensión 4, el conjunto CEG-18 introducido en la Sec. 2. 4. 2. g, en términos de proposiciones físicas sobre el estado de espín de un sistema compuesto por dos partículas de espín 1/2. En la Sec. 4. 3. 3 veremos que CEG-18 contiene un conjunto parcialmente no-coloreable (PNCS) que permite hacer una demostración dependiente del estado del teorema de BKS; esta demostración también se pueden interpretar, añadiendo la hipótesis de que las dos partículas están espacialmente separadas y utilizando una definición recursiva de elementos de realidad, como una demostración del teorema de Bell-EPR. En 4. 3. 4 veremos una simplificación del resultado anterior. En 4. 3. 5 veremos que CEG-18 contiene un conjunto con una predicción definida (DPS) que conduce a una demostración probabilística del teorema de BKS; esta demostración es esencialmente equivalente a la demostración de Hardy del teorema de Bell-EPR. En resumen, en las Secs. 4. 3. 3 y 4. 3. 5 veremos cómo, añadiendo la hipótesis de que las dos partículas se hallan en regiones separadas por intervalos de género-espacio, podemos reescribir las demostraciones dependiente del estado y probabilística del teorema de BKS en dimensión 4, como demostraciones del teorema de Bell-EPR. En la Sec. 4. 3. 6 haremos lo mismo partiendo del TNCS en dimensión 8 de Kernaghan y Peres (KP-36) que puede interpretarse físicamente como un conjunto de proposiciones sobre el estado de espín de un sistema de tres partículas de espín 1/2: veremos que KP-36 contiene un

PNCS que da lugar a una demostración dependiente del estado del teorema de BKS que puede interpretarse (añadiendo la hipótesis de que las tres partículas están espacialmente separadas entre sí) como una demostración de imposibilidad de variables ocultas locales. Finalmente en 4. 3. 7, resumiremos las condiciones suficientes para que un PNCS de lugar a una demostración de imposibilidad de variables ocultas locales.

A lo largo de estas secciones haremos alusión a las condiciones (a), (b), (c) definidas en la Sec. 2. 4. 2. h.

4. 3. 2. Interpretación física de CEG-18

Recordemos que CEG-18 es un subconjunto de P-24. Los 24 rayos en las 24 direcciones de P-24 pueden interpretarse como estados puros de espín de un sistema de dos partículas de espín 1/2. Los vectores de P-24 son de dos tipos:

16 de ellos son factorizables, es decir son de la forma $(a, b)^{(1)} \otimes (c, d)^{(2)}$; y por tanto los correspondientes proyectores son productos de operadores locales, lo que es equivalente a decir que las proposiciones asociadas se refieren a propiedades de cada una de las dos partículas *por separado*. Por ejemplo, tomando como base los estados propios de $\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$, el vector (no-normalizado) (1, –1, 0, 0) representa el estado de espín $|\sigma_z = +1\rangle^{(1)} \otimes |\sigma_x = -1\rangle^{(2)}$, y su correspondiente proyector está asociado a la proposición: "el observable $\sigma_z^{(1)}$ tiene valor +1 *y* el observable $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1". En una teoría de variables ocultas esa proposición tiene un valor bien definido: $v(1, -1, 0, 0) = 1$ si la proposición es "cierta", ó $v(1, -1, 0, 0) = 0$ si la proposición es "falsa".

Los 8 vectores restantes son no-factorizables, por tanto los correspondientes proyectores no se pueden factorizar en términos de observables locales, lo que equivale a decir que las proposiciones asociadas son enunciados sobre propiedades *conjuntas* de las dos partículas. Por ejemplo, el vector (no-normalizado) (1, –1, 1, 1) es propio de los operadores $\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}$ y $\hat{\sigma}_x^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_z^{(2)}$ con autovalores –1 y +1, respectivamente, y por tanto puede asociársele con la proposición: "El observable no-local $\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1 *y* el observable no-local $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1"[10]. En una teoría de

[10] Decimos que el observable *A* asociado al operador $\hat{A} = \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}$ es no-local porque, aunque su valor puede obtenerse midiendo los observables locales $\sigma_z^{(1)}$ y $\sigma_x^{(2)}$, ésta no es una medición ideal de primera especie (i.e., que no afecta a los observables compatibles) de *A*, en particular, esa forma de "medir" *A* no es compatible con ninguna forma de medir el observable *B* asociado al operador $\hat{B} = \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}$, pese a que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores conmutativos (y por tanto los correspondientes

variables ocultas no-contextuales estas proposiciones tienen que tener valores bien definidos.

En la tabla 4. 1 aparece la interpretación en término de proposiciones sobre ese sistema físico de los 24 vectores de P-24.

Los 18 vectores de CEG-18 se obtienen eliminando (de una forma particular) un vector de cada grupo de cuatro en la tabla 4. 1 (en la elección que hicimos en 2. 4. 2 g eliminábamos los vectores 4, 6, 11, 13, 19 y 23).

En CEG-18, 12 de los vectores son factorizables (los que aparecen las ecs. (2. 67)-(2. 70)), los otros 6 (que aparecen nuevos en las ecs. (2. 71)-(2. 75)) son no-factorizables (cada una de las ecs. (2. 71)-(2. 74) tiene un par de vectores factorizables y un par de vectores no-factorizables, la ec. (2. 75) contiene 4 vectores no-factorizables; en particular, nótese que ninguno de los vectores de CEG-18 es ortogonal a los 6 vectores no-factorizables (esto quiere decir que aunque preparemos el sistema en un estado propio de una de las 18 proposiciones con valor propio 1 —es decir, que su valor de variables ocultas es 1—, no podremos asignar valor de variables ocultas cero a todas las proposiciones no-factorizables, y, por tanto, habrá que recurrir a una definición recursiva de elementos de realidad para justificar la asignación de valores que se haga a las proposiciones no-factorizables no ortogonales a la de partida).

---

observables deberían ser compatibles: es decir, debería existir alguna manera de medirlos a la vez). En [García Alcaine 92] se propone una forma no-local de medir sólo A (sin medir $\sigma_z^{(1)}$ y $\sigma_x^{(2)}$); sin embargo esta forma también falla en el propósito de medir A y B conjuntamente.

Vector	Proposición asociada
1: (1, 1, 0, 0)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1"
2: (1, –1, 0, 0)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1"
3: (0, 0, 1, 1)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1"
4: (0, 0, 1, –1)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1"
5: (1, 0, 1, 0)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1"
6: (0, 1, 0, 1)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1"
7: (1, 0, –1, 0)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1"
8: (0, 1, 0, –1)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1"
9: (1, 0, 0, 1)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1"
10: (1, 0, 0, –1)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1"
11: (0, 1, 1, 0)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1"
12: (0, 1, –1, 0)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1"
13: (1, 0, 0, 0)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1"
14: (0, 1, 0, 0)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1"
15: (0, 0, 1, 0)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1"
16: (0, 0, 0, 1)	"$\sigma_z^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1"
17: (1, 1, 1, 1)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1"
18: (1, –1, 1, –1)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1"
19: (1, 1, –1, –1)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1"
20: (1, –1, –1, 1)	"$\sigma_x^{(1)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1"
21: (1, 1, 1, –1)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1"
22: (1, 1, –1, 1)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1"
23: (1, –1, 1, 1)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor +1"
24: (–1, 1, 1, 1)	"$\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$ tiene valor –1 y $\sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ tiene valor –1"

Tabla 4. 1. Interpretación física de las direcciones de P-24. CEG-18 se obtiene, por ejemplo, eliminando los vectores 4, 6, 11, 13, 19 y 23.

4. 3. 3. Relación entre CEG-18 y la demostración de Peres

En esta sección veremos que CEG-18 contiene lo que en el capítulo 2 llamábamos un conjunto parcialmente no-coloreable (PNCS) que da lugar a una demostración dependiente del estado del teorema de BKS, que es también (añadiendo la hipótesis de que las partículas están espacialmente separadas y aceptando una definición recursiva de elementos de realidad, ver la Sec. 3. 4. 3) una demostración del teorema de Bell-EPR [CEG 96 a].

Cada vector de CEG-18 es ortogonal a otros 7 vectores del conjunto; por tanto podemos preparar el sistema en un estado que asigne el valor 1 al proyector sobre uno de esos vectores y el valor 0 a los otros 7 proyectores sobre los vectores ortogonales. Por ejemplo, si preparamos el sistema en el estado singlete,

$$|\psi\rangle = (|+-\rangle - |-+\rangle)/\sqrt{2}, \tag{4. 7}$$

entonces, por definición

$$v(0,\ 1,\ -1,\ 0) = 1, \tag{4. 8}$$

y podemos eliminar de las ecs. (2. 67)-(2. 75) el vector (0, 1, −1, 0) y aquellos ortogonales a él, cuyos valores asociados son 0,

$$\begin{aligned} &v(0,\ 0,\ 0,\ 1) = v(1,\ -1,\ -1,\ 1) = v(1,\ 1,\ 1,\ 1) = \\ &v(1,\ 0,\ 0,\ -1) = v(1,\ 1,\ 1,\ -1) = v(-1,\ 1,\ 1,\ 1) = v(1,\ 0,\ 0,\ 1) = 0 \end{aligned} \tag{4. 9}$$

Por tanto, sólo quedan 7 ecuaciones con 10 vectores diferentes:

$$v(0,\ 0,\ 1,\ 0) + v(1,\ 1,\ 0,\ 0) + v(1,\ -1,\ 0,\ 0) = 1, \tag{4. 10}$$

$$v(0,\ 1,\ 0,\ 0) + v(1,\ 0,\ 1,\ 0) + v(1,\ 0,\ -1,\ 0) = 1, \tag{4. 11}$$

$$v(1,\ -1,\ 1,\ -1) + v(1,\ 1,\ 0,\ 0) + v(0,\ 0,\ 1,\ 1) = 1, \tag{4. 12}$$

$$v(1,\ -1,\ 1,\ -1) + v(1,\ 0,\ -1,\ 0) + v(0,\ 1,\ 0,\ -1) = 1, \tag{4. 13}$$

$$v(0,\ 0,\ 1,\ 0) + v(0,\ 1,\ 0,\ 0) = 1, \tag{4. 14}$$

$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1) + v(1,\ -1,\ 0,\ 0) + v(0,\ 0,\ 1,\ 1) = 1, \tag{4. 15}$$

$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1) + v(1,\ 0,\ 1,\ 0) + v(0,\ 1,\ 0,\ -1) = 1. \tag{4. 16}$$

Veamos que estos 10 vectores, junto con el estado inicial, forman un PNCS: No hay manera de asignar valores definidos a las 10 proposiciones implicadas en estas ecuaciones. La demostración es idéntica a la demostración de que CEG-18 era un TNCS: la suma de los miembros derechos de (4. 10)-(4. 16) es *impar* (en concreto 7),

mientras que la suma de los lados izquierdos es necesariamente *par*, porque cada valor (1 ó 0) aparece dos veces.

Aparentemente esta conclusión descansa en la imposibilidad de asignar valores únicos a $10+8$ proposiciones: las 10 asociadas a los 10 vectores distintos que aparecen en (4. 10)-(4. 16), más la asociada al estado inicial (4. 8) y las 7 asociadas a los 7 vectores ortogonales (4. 9). Pero de hecho, se pueden justificar las ecs. (4. 10)-(4. 16) sin necesidad de usar (4. 9), usando el siguiente argumento [Kernaghan-Peres 95]: cada subconjunto de dos o tres vectores en los lados izquierdos de (4. 10)-(4. 16) subtiende un subespacio que contiene el vector (0, 1, −1, 0) (podemos probar que este vector puede expresarse como una combinación lineal de los de cada subconjunto); por tanto, incluso si las sumas de los proyectores correspondientes no dan la matriz identidad 4×4, el sistema está en un estado propio, con valor propio 1, de cada suma de proyectores, y las sumas de los correspondientes valores debe ser 1. En consecuencia, esta demostración independiente del estado emplea sólo 10 vectores (o 10 (+1) si también contamos el estado inicial). El récord anterior [Kernaghan-Peres 95] requería 7 ecuaciones con 13 (o 13 (+1), si incluimos el estado inicial) vectores diferentes en dimensión 8[11], de forma que en el conjunto de las ecuaciones aparecen dos o cuatro veces cada uno[12].

Esta demostración dependiente del estado del teorema de BKS no se puede interpretar como una contradicción entre la MC y variables ocultas *locales*, porque, aunque es posible preparar el sistema en un estado entangled (el singlete, en el caso anterior), no es posible prescindir de las 5 restantes proposiciones no-factorizables, y seguir alcanzando una contradicción. Por ejemplo, las ecs. (4. 10)-(4. 16) contienen el estado entangled (1, 1, −1, 1), y el valor asociado a la proposición correspondiente no se puede determinar mediante una medida local sobre la partícula 1 y otra medida local sobre la partícula 2. Sin embargo, sí se puede interpretar como una demostración de imposibilidad de variables ocultas locales si se acepta una definición recursiva de elementos de realidad como la que vimos en la Sec. 3. 4. 3; en tal caso, el valor de la proposición asociada al vector (1, 1, −1, 1) (proposición que, consultando en la tabla 4. 1, vemos que es "$\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_x^{(2)}$ tiene valor +1 y $\sigma_x^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)}$ tiene valor −1") se puede determinar a partir de los valores asignados a proposiciones correspondientes a vectores factorizables. De hecho, esta demostración es una versión aditiva de la demostración

[11] Ya hemos visto demostraciones de BKS independientes del estado en dimensión 8 en la Sec. 2. 6. 2; veremos la demostración dependiente del estado con 13 (+1) vectores en la Sec. 4. 3. 6.

[12] Adelantemos aquí que la demostración dependiente del estado en [Kernaghan-Peres 95] tiene una propiedad deseable que no tiene la nuestra: sus 13 vectores son todos factorizables como $(a, b)^{(1)}\otimes(c, d)^{(2)}\otimes(e, f)^{(3)}$.

multiplicativa de Peres con elementos de realidad recursivos que vimos en la Sec. 3. 4. 3.

4. 3. 4. Una demostración con 5 proposiciones y el singlete

En esta sección veremos una simplificación adicional del ejemplo de la sección anterior. A ella se puede llegar por dos caminos: considerando una versión dependiente del estado de la demostración sugerida por Clifton basada en descomposiciones aditivas de la identidad de subespacios del espacio de Hilbert total del sistema que vimos en la Sec. 2. 4. 2. h, o simplemente usando las propiedades del estado singlete [CEG 96 b].

Consideremos un sistema individual de dos partículas de espín 1/2 preparadas en el estado singlete. Como antes, se verifica (4. 8) y (4. 9), en particular

$$v(1,\ 1,\ 1,\ -1) = v(-1,\ 1,\ 1,\ 1) = 0. \tag{4. 17}$$

Reemplazando estos valores en las ecs (2. 73) y (2. 74) de la Sec. 2. 4. 2. g (o en las ecs. (2. 80) y (2. 79) de la Sec. 2. 4. 2. h) obtenemos las ecs. (4. 15) y (4. 16), que volvemos a escribir aquí

$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1) + v(1,\ -1,\ 0,\ 0) + v(0,\ 0,\ 1,\ 1) = 1, \tag{4. 18}$$

$$v(1,\ 1,\ -1,\ 1) + v(1,\ 0,\ 1,\ 0) + v(0,\ 1,\ 0,\ -1) = 1. \tag{4. 19}$$

Nótese que la proposición asociada al primer vector de ambas ecuaciones es una proposición no-factorizable y que para asignarle un elemento de realidad a la vez que a las otras 4 proposiciones tendríamos que acudir a una definición recursiva de los elementos de realidad. Además, los valores de variables ocultas de las cuatro direcciones que no están repetidas en (4. 18) y (4. 19) satisfacen la siguiente relación en el estado singlete:

$$v(1,\ -1,\ 0,\ 0) + v(0,\ 0,\ 1,\ 1) + v(1,\ 0,\ 1,\ 0) + v(0,\ 1,\ 0,\ -1) = 1. \tag{4. 20}$$

Para demostrar (4. 20) hay que tener en cuenta dos cosas: primero, que el valor de una proposición factorizable (como cualquiera de las que aparecen en (4. 20)) es el producto de los valores de sus factores[13],

---

[13] Preguntar si un sistema de dos partículas está en el estado $(a,\ b)^{(1)} \otimes (c,\ d)^{(2)}$ es equivalente a preguntar si la partícula 1 está en el estado $(a,\ b)^{(1)}$ y la partícula 2 está en el estado $(c,\ d)^{(2)}$: la respuesta es 1 ("sí") sólo si los valores de ambas proposiciones son 1, y es 0 ("no") en cualquier otro caso. La misma conclusión se puede alcanzar como consecuencia de la regla del producto para observables compatibles: $v(AB) = v(A)v(B)$; en particular

$$v[(a,\ b)^{(1)} \otimes (c,\ d)^{(2)}] = v(a,\ b)^{(1)} \times v(c,\ d)^{(2)}; \tag{4. 21}$$

lo cual nos permite escribir el lado izquierdo de (4. 20) como

$$\begin{aligned} &v(1\,,0)^{(1)} \times v(1\,,\ -1)^{(2)} + v(0,1)^{(1)} \times v(1\,,1)^{(2)} \\ &+v(1\,,1)^{(1)} \times v(1\,,0)^{(2)} + v(1\,,\ -1)^{(1)} \times v(0,1)^{(2)} \end{aligned} \tag{4. 22}$$

Segundo, si en el estado singlete medimos la componente de espín de cada partícula según el mismo vector (arbitrario), los resultados están perfectamente correlacionados (siempre son opuestos), y la misma relación debe de existir entre los valores de las proposiciones en cualquier teoría determinista de variables ocultas,

$$v(1,\ -1)^{(2)} = v(1,\ 1)^{(1)}, \tag{4. 23 a}$$
$$v(1,\ 1)^{(2)} = v(1,\ -1)^{(1)}, \tag{4. 23 b}$$
$$v(1,\ 0)^{(2)} = v(0,\ 1)^{(1)}, \tag{4. 23 c}$$
$$v(0,\ 1)^{(2)} = v(1,\ 0)^{(1)}, \tag{4. 23 d}$$

sustituyendo (4. 23 a)-(4. 23 d) en (4. 22) se obtiene

$$[v(1,\ 0)^{(1)} + v(0,\ 1)^{(1)}] \times [v(1,\ 1)^{(1)} + v(1,\ -1)^{(1)}] = 1, \tag{4. 24}$$

donde el lado de la izquierda es la forma factorizada del lado de la izquierda de (4. 20) una vez utilizadas las correlaciones perfectas del estado singlete, (4. 23 a)-(4. 23 b), y la igualdad (4. 24) es una consecuencia de la resolución de la identidad en el espacio bidimensional de los estados de la primera partícula, *q.e.d.*

Los dos primeros vectores en (4. 20) no son ortogonales a los otros dos, y los correspondientes proyectores no conmutan; es más, no existe ningún estado propio común de los cuatro proyectores. Por tanto, ni podemos preparar un sistema en un estado libre de dispersión para las cuatro proposiciones, ni podemos comprobar experimentalmente la relación (4. 20) midiendo simultáneamente las cuatro proposiciones; en este sentido la relación (4. 20) es diferente de las relaciones (4. 18) y (4. 19), que vienen de (b) ($\sum_{i=1}^{4} |\mathbf{u}_i\rangle\langle\mathbf{u}_i| = \hat{I} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} v(\mathbf{u}_i) = 1$), para las que existen estados

---

$$\begin{aligned} v\left(|u^{(1)}\rangle\langle u^{(1)}| \otimes |w^{(2)}\rangle\langle w^{(2)}|\right) &= v\left(|u^{(1)}\rangle\langle u^{(1)}| \otimes \hat{I}^{(2)}\right) \times v\left(\hat{I}^{(1)} \otimes |w^{(2)}\rangle\langle w^{(2)}|\right) \\ &= v\left(|u^{(1)}\rangle\langle u^{(1)}|\right) \times v\left(|w^{(2)}\rangle\langle w^{(2)}|\right) \end{aligned} \tag{4. d}$$

donde la última igualdad refleja el hecho de que las proposiciones representadas por el proyector $|u^{(1)}\rangle\langle u^{(1)}| \otimes \hat{I}^{(2)}$ corresponden a la primera partícula en el estado $|u^{(1)}\rangle$, cualquiera que sea el estado de la segunda partícula.

libres de dispersión simultáneamente para cada tétrada de proyectores compatibles, y que (en principio) se pueden verificar experimentalmente en cualquier estado. Pero en una teoría de variables ocultas determinista, los observables incompatibles pueden tener valores definidos en el mismo sistema individual, y por lo tanto la ec. (4. 20), aunque no sea una consecuencia de ninguna resolución de la identidad, es una relación legítima entre los valores de variables ocultas, basada en las propiedades del estado singlete.

Teorema: no existe ningún conjunto de valores $v(\mathbf{u}_i)$ que verifiquen las ecs. (4. 18)-(4. 20).

Demostración: Una vez más la demostración descansa en un argumento de paridad: cada proposición aparece dos veces en (4. 18)-(4. 20), pero la suma de los lados derechos es 3, *q.e.d.*

Terminaremos con una reflexión sobre el número de proposiciones implicado en la demostración. Hemos hecho la cuenta usando explícitamente otra consecuencia de los requisitos (a) y (b) definidos en la Sec. 2. 4. 2:

(d) *Dado un sistema individual preparado en un estado* $\mathbf{w}$ *y un conjunto de vectores* $\{\mathbf{u}_i\}$ *que expanden un subespacio* U *que contiene a* $\mathbf{w}$*, entonces* $\sum_i v(\mathbf{u}_i) = 1$.

Una razón para esto se da en [Kernaghan-Peres 95]: cualquier vector $\mathbf{v}$ en el subespacio complementario a U es ortogonal a $\mathbf{w}$; si $v(\mathbf{w}) = 1$ entonces (b) implica $v(\mathbf{v}) = 0$; por tanto, la suma de los valores de cualquier conjunto completo de proposiciones compatibles sobre el subespacio U debe ser 1. Esto también se puede justificar sin mencionar explícitamente los valores $v(\mathbf{v}) = 0$, si se recuerda que la probabilidad de encontrar el sistema en un estado en el subespacio U es 1. La condición (d) es una consecuencia de (a) y (b), pero al contrario de lo que sucede con (c), ahora las proposiciones omitidas tienen un valor bien definido (cero), y por lo tanto puede argumentarse que usar (d) es esencialmente una manera de contar el número de vectores que aparece en una demostración dependiente del estado, prescindiendo de los vectores ortogonales al estado inicial[14].

---

[14] Partiendo de una demostración dependiente del estado del teorema de BKS en términos de vectores en dimensión n, podemos trivialmente construir una demostración dependiente del estado en cualquier dimensión $n + m$: basta con añadir m ceros a todos los vectores, incluyendo el estado inicial. Si la cuenta del número de vectores se basa en el uso explícito de la condición (d), este número es independiente de m (por ejemplo, el conjunto de 10 vectores de la demostración dependiente del estado en dimensión $n = 4$ de la Sec. 4. 3. 3 da lugar a una demostración también con 10 vectores en $n = 8$). El

En nuestro ejemplo, ambos tríos de vectores de los lados izquierdos de (4. 18) y (4. 19) expanden subespacios que contienen al singlete (0, 1, –1, 0), y por tanto ambas ecuaciones son aplicación directa de la regla (d). Si usamos esta condición, sólo necesitaremos contar los 5 vectores que aparecen explícitamente en (4. 18) y (4. 19); una cuenta del número de proposiciones con valores definidos necesarios para la demostración basada estrictamente en (a) y (b), debería incluir los vectores omitidos (1, 1, 1, –1), (–1, 1, 1, 1) (y quizá también el estado inicial).

La contradicción desarrollada en esta sección requiere 3 ecuaciones y 5 proposiciones en $\mathbf{R}^4$: en términos del *número de proposiciones*, esta demostración dependiente del estado (del teorema de BKS o del teorema de Bell-EPR aceptando una definición recursiva de elementos de realidad) es la demostración de imposibilidad de variables ocultas más económica que conocemos.

4. 3. 5. Relación entre CEG-18 y la demostración de Hardy

En esta sección vamos a considerar lo que en el capítulo 2 llamábamos un conjunto con una predicción definida, DPS, subconjunto de CEG-18 lo que nos permitirá obtener una versión probabilística del teorema de BKS en la que aparecerán (además del estado de partida) sólo proposiciones factorizables, y por tanto se podría interpretar (suponiendo que las partículas están espacialmente separadas) como una demostración del teorema de Bell-EPR. De hecho, veremos que el resultado coincide esencialmente con la demostración de Hardy que vimos en la Sec. 3. 4. 4 por lo que simplemente consideraremos que la nuestra es una derivación de aquélla basada en los argumentos del teorema de BKS [CEG 96 a][15].

---

cociente entre el número f de vectores empleado en una demostración del teorema de BKS y la dimensionalidad n del espacio [Kernaghan-Peres 95] es una medida razonable de la bondad de una demostración independiente del estado (donde obviamente $f > n$), pero no tiene sentido en demostraciones dependientes del estado si no se cuentan el estado inicial ni los vectores ortogonales a él, como se hace cuando se usa la condición (d).

[15] El comentario, vía correo electrónico, de Hardy sobre esta derivación de "su" argumento fue: "I also like your state-dependent and state dependent probabilistic proofs [CEG 96 a]. It is neat that one case reduces to a similar contradiction to my nonlocality proof", 6 de febrero de 1996. Guruprasad Kar, e-mail del 31 de mayo de 1996: "Also your probabilistic proof gives a better understanding of Hardy's theorem." [Kar 96]: "[Abstract] The converse of Hardy's nonlocality theorem is proved by using the technique developed by A. Cabello *et al.* [CEG 96 a] for probabilistic proof of the Bell-Kochen-Specker theorem. (...) [Texto principal] Very recently Adán Cabello *et al.* [CEG 96 a] proved Bell-Kochen-Specker theorem in four dimensions using 18 vectors only. There they gave a probabilistic proof of

Supongamos que preparamos ("preseleccionamos") dos partículas de espín 1/2 en el estado entangled (pero no "máximamente entangled"[16]),

$$|\eta\rangle = (|++\rangle - |+-\rangle - |-+\rangle)/\sqrt{3}. \tag{4. 25}$$

Entonces, por definición

$$v(1,\ -1,\ -1,\ 0) = 1. \tag{4. 26}$$

En una teoría de variables ocultas, los valores de los proyectores sobre cualquier vector ortogonal a $(1,\ -1,\ -1,\ 0)$[17] deben de ser 0; en particular,

$$v(0,\ 0,\ 0,\ 1) = v(1,\ 1,\ 0,\ 0) = v(1,\ 0,\ 1,\ 0) = 0. \tag{4. 27}$$

Supongamos que en una medida posterior (o "postselección") el sistema se encuentra en el estado

$$|\varphi\rangle = |\sigma_x^{(1)} = +1\rangle \otimes |\sigma_x^{(2)} = +1\rangle \tag{4. 28}$$

(esto es posible porque $\langle\varphi|\eta\rangle \neq 0$); entonces,

$$v(1,\ 1,\ 1,\ 1) = 1. \tag{4. 29}$$

En los sistemas individuales postseleccionados en el estado (4. 28), el valor de todas las proposiciones sobre vectores ortogonales a $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ es 0; en particular,

$$v(1,\ -1,\ 0,\ 0) = v(1,\ 0,\ -1,\ 0) = 0. \tag{4. 30}$$

Reemplazando (4. 27) y (4. 30) en (2. 67) y (2. 68) se llega a

$$v(0,\ 1,\ 0,\ 0) = v(0,\ 0,\ 1,\ 0) = 1. \tag{4. 31}$$

Bell-KS theorem using only factorisable propositions, which can be interpreted in terms of local measurements and hence can be related to Hardy nonlocality theorem.

Here we shall prove the converse of Hardy's result using their technique. We shall show that for four spin-1/2 observables, noncommuting for both systems, a state can be found satisfying Hardy's nonlocality. The state would be shown not to be product state as well as maximally entangled state."

[16] Ver la discusión en la Sec. 3. 4. 4. d.

[17] Este vector no pertenece a CEG-18 ni a P-24. Puede interpretarse geométricamente como la dirección que une los centros de una par de aristas opuestas de un teseracto (ver las figuras 2. 20 y 2. 21; las otras 15 direcciones que unen los centros de las restantes aristas opuestas también representan estados de Hardy. Aunque ese vector no pertenezca a CEG-18, los restantes vectores sí forman un DPS contenido en CEG-18 de acuerdo con la definición de DPS; véase la nota 28 del capítulo 2.

Pero (0, 1, 0, 0) y (0, 0, 1, 0) son ortogonales, y por tanto los valores de las correspondientes proposiciones no pueden ambos ser 1: hemos llegado a una contradicción.

Esta demostración probabilística del teorema de BKS usa 7 (+2) vectores (los 7 de (4. 27), (4. 30), (4. 31), más los estados η y φ). El término "probabilística" proviene del hecho de que al preparar el sistema en el estado inicial η (i.e., al preseleccionar η) existe sólo una probabilidad no nula de encontrar el sistema en el estado final φ (i.e., de postseleccionar φ), no la certeza.

Ahora vamos a ver cómo está relacionado este resultado con la prueba de Hardy del teorema de Bell-EPR que vimos en la sección 3. 4. 4. Adviértase que todos los vectores implicados en la demostración anterior son factorizables, con excepción del estado inicial η. Los valores asociados a proposiciones factorizables pueden expresarse en términos de los valores de las proposiciones de los correspondientes factores:

$$v[(a,\ b)^{(1)} \otimes (c,\ d)^{(2)}] = 1 \Leftrightarrow v(a,\ b)^{(1)} = v(c,\ d)^{(2)} = 1, \tag{4. 32}$$

$$v[(a,\ b)^{(1)} \otimes (c,\ d)^{(2)}] = 0 \Leftrightarrow v(a,\ b)^{(1)} \times v(c,\ d)^{(2)} = 0. \tag{4. 33}$$

En particular, si preseleccionamos el estado η,

$$v(1,\ -1,\ -1,\ 0) = 1 \Rightarrow v(1,\ 1,\ 0,\ 0) = 0 \Leftrightarrow v(1,\ 0)^{(1)} \times v(1,\ 1)^{(2)} = 0. \tag{4. 34}$$

De manera similar, al postseleccionar φ (i.e., $v[(1,\ 1)^{(1)} \otimes (1,\ 1)^{(2)}] = 1$) ello implica, usando (4. 32),

$$v(1,\ 1)^{(1)} = 1, \tag{4. 35}$$

$$v(1,\ 1)^{(2)} = 1. \tag{4. 36}$$

Entonces, (4. 34), (4. 36) implican

$$v(1,\ 0)^{(1)} = 0. \tag{4. 37}$$

Si usamos las hipótesis (a) y (b) sobre el espacio bidimensional de los estados de espín de la primera partícula, a partir de (4. 37) concluimos que

$$v(0,\ 1)^{(1)} = 1. \tag{4. 38}$$

Los valores (4. 26), (4. 36), (4. 38) corresponden en términos mecanocuánticos al siguiente resultado para la probabilidad condicional de encontrar $\sigma_z^{(1)} = -1$ en un sistema preparado en el estado η, *si* $\sigma_x^{(2)} = +1$;

$$P_\eta(\sigma_z^{(1)} = -1 \,|\, \sigma_x^{(2)} = +1) = 1. \tag{4. 39}$$

Intercambiando los papeles de las partículas 1 y 2, un razonamiento similar nos conduce a que

$$P_\eta(\sigma_z^{(2)} = -1 \,|\, \sigma_x^{(1)} = +1) = 1. \tag{4. 40}$$

La ec. (4. 26) y la primera parte de (4. 27) ($v(0,\ 0,\ 0,\ 1) = 0$) se traducen en

$$P_\eta(\sigma_z^{(1)} = -1,\ \sigma_z^{(2)} = -1) = 0. \tag{4. 41}$$

Finalmente, el hecho de que el sistema se pueda postseleccionar en el estado φ, usado para obtener (4. 29), significa que

$$P_\eta(\sigma_x^{(1)} = +1, \sigma_x^{(2)} = +1) > 0, \tag{4. 42}$$

Las ecs. (4. 39)-(4. 42) son la traducción en términos mecanocuánticos del conjunto de valores usado en la demostración probabilística del teorema de BKS. Si suponemos que las partículas 1 y 2 están localizadas en dos regiones separadas por un intervalo de género-espacio (hipótesis que no era necesaria para el teorema de BKS), las ecs (4. 39)-(4. 42) son todo lo que necesitamos para rehacer la demostración de Hardy del teorema de Bell-EPR, demostración que ya vimos en la sección 3. 4. 4.

Para subrayar la completa analogía de esta demostración probabilística de BKS con las tratadas en la Sec. 2. 3. 6, en la figura 4. 1 representamos el diagrama de KS (tradicional) correspondiente. Nótese que ahora estamos en un espacio tetradimensional y que los conjuntos completos de proposiciones compatibles (que en dimensión tres representábamos por triángulos) ahora están representados por cuadrados con sus diagonales. Salvo por la dimensión nótese que este diagrama es similar al diagrama de KS-8 (ver las Figs. 2. 1 y 2. 8); de hecho este diagrama es un caso particular para dimensión 4 del diagrama de la Fig. 2. 24 que dibujamos cuando generalizábamos la demostración original de KS a dimensión arbitraria[18]. Si $v(1,\ -1,\ -1,\ 0) = v(1,\ 1,\ 1,\ 1) = 1$ (es decir si asignamos el color blanco a esos vectores), el resto del diagrama no se puede colorear de ninguna forma consistente con (a) y (b).

---

[18] Tómese en la Fig. 2. 24, $\mathbf{r}_1 = (1,\ -1,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{r}_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{r}_3 = (1,\ -1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{r}_4 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{r}_5 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{r}_6 = (1,\ 0,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{r}_7 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{r}_8 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{r}_9 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

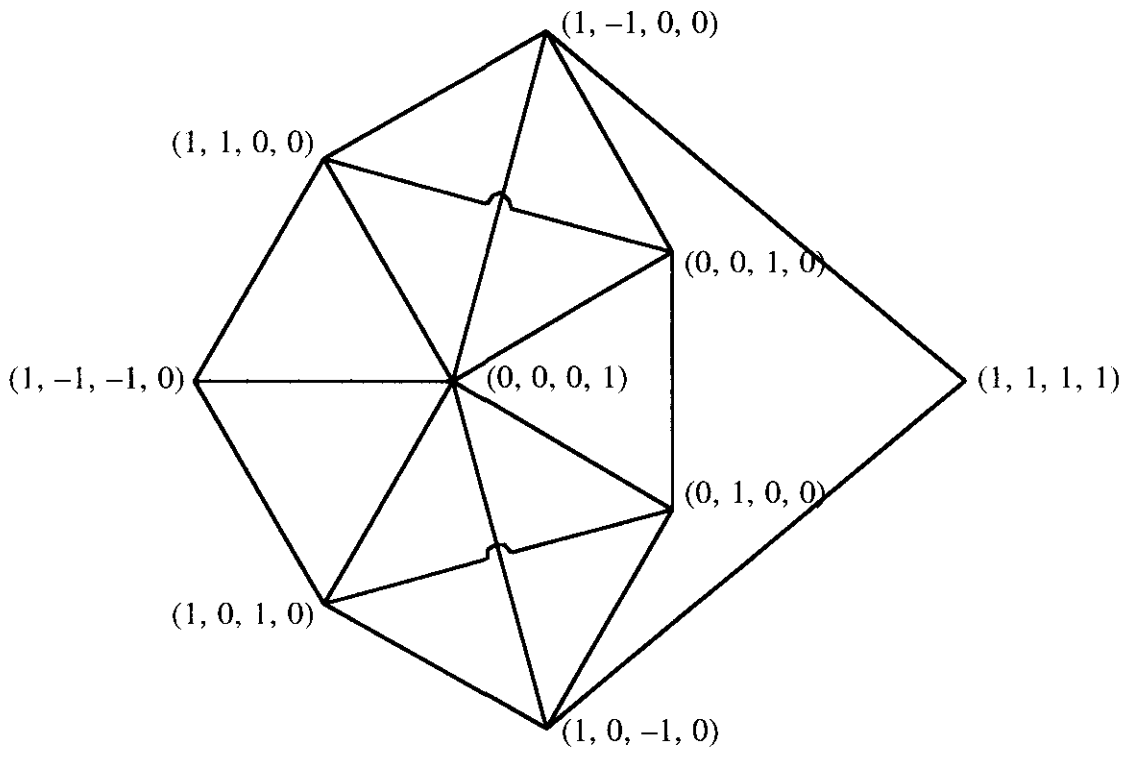


Fig. 4. 1. Diagrama de Kochen-Specker de la demostración probabilística de BKS en cuatro dimensiones extraída de CEG-18. Si $v(1, -1, -1, 0) = v(1, 1, 1, 1) = 1$, el diagrama no puede colorearse de ninguna manera consistente con (a) y (b)[19].

[19] Se puede demostrar que si, en lugar de la elección explícita de vectores que hemos hecho en esta figura, hiciésemos la elección más general compatible con este diagrama de KS, de forma que sólo el primer vector sea no-factorizable; entonces el producto escalar entre éste vector y el último (y por tanto la probabilidad de, preparando el primero, al hacer una medida sobre él, encontrar el segundo) es máximo bajo las mismas circunstancias en que ocurre la máxima violación en el argumento de Hardy; en particular, de este cálculo se obtiene de nuevo que la probabilidad máxima es el inverso de la razón áurea elevada a 5.

4. 3. 6. Relación entre KP-36 y la demostración de GHZ

En esta sección veremos un PNCS propuesto en [Kernaghan-Peres 95] que es subconjunto del TNCS que en la Sec. 2. 6. 2 llamábamos KP-36; este PNCS contiene un vector no-factorizable y 13 vectores factorizables. Preparando un sistema en el estado propio asociado al vector no-factorizable, ese PNCS da lugar no sólo a una demostración dependiente del estado del teorema de BKS sino también a una demostración del teorema de Bell-EPR sobre un sistema de tres partículas de espín 1/2. En esta sección nos concentraremos en la demostración algebraica; puede construirse una tabla análoga a la tabla 4. 1 con la relación entre vectores y proposiciones físicas, sin más que tener en cuenta que los vectores en este caso son propios de los operadores que aparecen en la Fig. 2. 28.

El sistema se prepara inicialmente en un estado entangled (de GHZ) de las tres partículas

$$\begin{aligned} |\mu\rangle &= \left(\left|\sigma_y^{(1)}=+1,\ \sigma_y^{(2)}=+1,\ \sigma_y^{(3)}=+1,\right\rangle + \left|\sigma_y^{(1)}=-1,\ \sigma_y^{(2)}=-1,\ \sigma_y^{(3)}=-1,\right\rangle\right)/\sqrt{2} \\ &= \left(-|+++\rangle + |+--\rangle + |-+-\rangle + |--+\rangle\right)/2 \end{aligned} \tag{4. 43}$$

de manera que $v(\mu)=1$, es decir

$$v(-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)=1, \tag{4. 44}$$

lo que permite hacer cero los valores de los vectores ortogonales (que no escribimos explícitamente). Sustituyendo estos valores en las resoluciones de la identidad (en dimensión 8) que se pueden extraer de la Fig. 2. 28, se obtienen las siguientes 7 ecuaciones (las cursivas indican que el vector ha aparecido en una ecuación anterior):

$$\begin{aligned} &v(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0)+v(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0) \\ &v(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)=1 \end{aligned} \tag{4. 45}$$

$$\begin{aligned} &v(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0) \\ &v(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)=1 \end{aligned} \tag{4. 46}$$

$$\begin{aligned} &v(1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)+v(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \\ &v(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)=1 \end{aligned} \tag{4. 47}$$

$$\begin{aligned} &v(1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1) \\ &v(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)=1 \end{aligned} \tag{4. 48}$$

$$\begin{aligned} &v(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1) \\ &v(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)=1 \end{aligned} \tag{4. 49}$$

$$v(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0)+v(1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0)$$
$$v(0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1)+v(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)=1 \qquad (4.\ 50)$$

$$v(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0)+v(0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1)$$
$$v(1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0)+v(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)=1 \qquad (4.\ 51)$$

Es fácil ver que se trata de un PNCS: con la elección de partida (4. 44), a los 13 vectores que aparecen en las 7 ecuaciones (4. 45)-(4. 51) no se les puede asignar valores de forma consistente con (a) y (b).

Demostración: cada valor (1 ó 0) aparece dos o cuatro veces en los lados izquierdos de (4. 44)-(4. 50), sin embargo la suma de los lados derechos es 7, *q.e.d.*

Los 13 vectores en (4. 45)-(4. 51) son factorizables $(a,\ b)^{(1)}\otimes(c,\ d)^{(2)}\otimes(e,\ f)^{(3)}$, luego corresponden a proposiciones locales (resolubles mediante medidas locales), lo cual permite asignarles un valor definido apelando a la hipótesis de localidad (si las tres partículas están espacialmente separadas), que sustituye en este caso a la hipótesis de no-contextualidad. Por tanto, la demostración resultante es una demostración (no-probabilística) de imposibilidad de variables ocultas locales (teorema de Bell-EPR) basada en una demostración dependiente del estado (construida sobre un subconjunto de un conjunto que permite una demostración independiente del estado) del teorema de BKS. De hecho, la demostración anterior es una versión aditiva de la demostración multiplicativa de GHZ-Mermin del teorema de Bell-EPR que vimos en la Sec. 3. 4. 2.

4. 3. 7. Condición suficiente para pasar de BKS a Bell-EPR

Lo visto en las secciones 4. 3. 3 y 4. 3. 6 nos permite concluir que los siguientes requisitos son suficientes para que una demostración dependiente del estado del teorema de BKS basada en un PNCS contenido en un TNCS mayor, admita una interpretación como demostración no-probabilística del teorema de Bell-EPR:

(a) El TNCS debe admitir una interpretación física en términos de n ($n \geq 2$) sistemas separables espacialmente.

(b) El PNCS contenido en el TNCS debe poder elegirse de manera que el vector inicial para el que se hace la asignación de partida (con valor 1) sea ortogonal a todos los posibles vectores no-factorizables del conjunto, con lo cual, los valores para todos éstos serán 0, y no intervendrán en la demostración, de manera que no será necesario justificar (apelando, por ejemplo, a una definición recursiva de elementos de realidad)

por qué han de tener valores no-contextuales bien definidos en una teoría de variables ocultas locales.

Con esas condiciones, la hipótesis de no-contextualidad de los valores de variables ocultas se puede sustituir por la hipótesis de localidad para los correspondientes valores de variables ocultas (ahora asociados sólo a observables locales correlacionados en el estado entangled de partida).

Capítulo 5. Experimentos sobre Bell-EPR sin desigualdades

"In the 30 years elapsed since Bell's seminal paper, hundreds of gedanken experiments have been proposed showing the violation of a Bell inequality, but no incontrovertible (loophole-free) violation has been shown in a real experiment. (...) Proposals for loophole-free experiments are beginning to appear, but none of them is clearly feasible with present technology. Furthermore, the difficulties for performing empirical tests of the Bell inequalities cannot be just attributed to nonidealities of the available measuring devices. Indeed, LHV [local hidden-variables] models have been found which perfectly agree with the ideal quantum predictions for atomic cascade experiments, like Aspect's one, which are currently considered the most reliable test of Bell's inequalities. The sharp contrast between so many gedanken and so few (none in fact) real violations of Bell's inequalities surely requires an explanation, and the obvious one is that gedanken experiments contain oversimplifications that make them unphysical."

[Santos 95], p. 1.

"So although Hardy's four questions provide a rather weak basis for a laboratory violation of the experimentally relevant inequality, they reign supreme in the *gedanken* realm."

[Mermin 94 a], p. 11.

Capítulo 5

Experimentos sobre el teorema de Bell-EPR sin desigualdades

5. 1. Introducción

Este capítulo se dedica a estudiar la implementación ideal de las demostraciones de GHZ y Hardy en diversos contextos físicos y a discutir el único experimento realizado hasta 1995 basado en tales argumentos.

La primera parte, los experimentos ideales, es una revisión sin pretensiones de completitud de resultados publicados en la literatura reciente (1990-1995): en la Sec. 5. 2 se presentan cuatro experimentos ideales para implementar argumentos de tipo GHZ, y en la Sec. 5. 3 se revisan cinco propuestas para implementar el argumento de Hardy.

Su inclusión aquí está justificada por varias razones: (i) Son implementaciones en contextos físicos diferentes de los mismos argumentos algebraicos del capítulo 3. Si, como algunos piensan, la debilidad de las demostraciones algebraicas reside precisamente en su carácter ideal (algunos autores piensan que hay impedimentos a nivel fundamental para preparar y manejar los estados necesarios[1]), el hecho de que las

[1] Por ejemplo [Santos 91 b], p. 1388: "My criticism to the proof is that the two-particle state defined above [for instance, (...) photons in a singlet state], represented by the Hilbert-space vector $|\psi\rangle$, has not been shown to be a physically realizable state. Of course, it may be postulated that *every* vector in the Hilbert space of the system corresponds to a physically realizable state. But it is by no means obvious that such a strong assumption should be a part of the quantum formalism. In fact, it is well known that some restrictions have already been introduced under the name of superselection rules, and further constraints may be found in the future." [Ben-Aryeh 93], p. 317 (ya citado antes): "Locality is

mismas demostraciones aparezcan en contextos físicos diferentes dificulta una salida de ese tipo. (ii) Los procedimientos para preparar estados entangled (en particular estados de tipo GHZ o Hardy) descritos en las Secs. 5. 2 y 5. 3 son de utilidad no sólo para tests experimentales de variables ocultas, sino también en otros contextos: la preparación y manipulación coherente de estados entangled juega un papel fundamental en criptografía cuántica[2], teleportación[3], y computación cuántica[4]; los obstáculos prácticos para construir, por ejemplo, un computador cuántico son esencialmente los mismos que hay que superar en un test concluyente de variables ocultas (el problema principal en ambos casos es la fragilidad de los estados entangled experimentales ante la decoherencia por acoplamiento con el medio, y la eficiencia de los detectores). Cabría pues esperar que la relevancia que están adquiriendo los temas antes señalados (en particular la computación cuántica) se traduzca en una mejora de las técnicas experimentales aplicables a los tests sobre variables ocultas. Por lo pronto, algunas de las propuestas para fabricar estados para computación cuántica se pueden reconvertir en dispositivos para fabricar estados entangled sobre los que implementar tests de variables ocultas[5]. (iii) No existe ningún artículo de revisión que recoja estos resultados. Los

---

not violated for the singlet state. (...) Due to superselection rules [expuestas en la Sec. 3 del artículo] the singlet spin state is entangled with spatial spherical wave functions. Bell inequalities are violated only for subensembles which are not pure states."

[2] Bibliografía sobre criptografía cuántica: [Ekert 91 a, b, 92], [Bennett-Brassard-Mermin 92], [Bennett-Brassard-Ekert 92], [Bennett 92], [Ekert-Rarity-Tapster-Palma 92], [Bennett-Wiesner 92], [Phoenix 93], [Muller-Breguet-Gisin 93], [Barnett-London-Pegg-Phoenix 94], [Huttner-Imoto-Gisin-Mor 95], [Muller-Zbinden-Gisin 95] (experimento real a través de casi 30 Km de fibra óptica). Para más información consultar, G. Brassard, "A bibliography of quantum cryptpgraphy", disponible en http://www.itr.ch:8000/~pheinzma/quantlit.html. Ver también la nota 4.

[3] Bibliografía sobre teleportación: [Bennett-Brassard-Crépeau-Jozsa-Peres-Wootters 93], [Deutsch-Ekert 93], [Popescu 94], [Vaidman 94 a, 95 b], [Davidovich-Zagury-Brune-Raimond-Haroche 94], [Cirac-Parkins 94], [Barnett-London-Pegg-Phoenix 94], [Braunstein-Mann 95], [Gisin 96 b], [Bennett-Brassard-Popescu-Schumacher-Smolin-Wootters 96], [Braunstein 96].

[4] Bibliografía sobre computación cuántica: [Bennett 93], [Cirac-Zoller 95] (propuesta de un computador cuántico con cadenas de iones), [Barenco-Deutsch-Ekert-Jozsa 95], [Sleator-Weinfurter 95], [Bennett 95] (artículo de revisión), [Lloyd 95], [Shor 95] (cómo reducir los efectos de la decoherencia), [Dove 95], [Pellizzari-Gardiner-Cirac-Zoller 95] (cómo reducir mediante medidas continuas los efectos de la decoherencia en un computador cuántico basado en cavidades), [Barenco-Bennett-Cleve-DiVincenzo-Margolus-Shor-Sleator-Smolin-Weinfurter 95], [Domokos-Raimond-Brune-Haroche 95], [Chuang-Yamamoto 95]. Para más información consultar "Ike and Raymond's collection of quantum computation papers", disponible en http://feynman.stanford.edu/qcomp/.

[5] Como ejemplo de la conexión entre estos temas, los trabajos de Ignacio Cirac versan tanto sobre implementación de computadores cuánticos [Cirac-Zoller 95], como sobre fabricación de estados de GHZ

resúmenes aquí incluidos son necesariamente incompletos, y pretenden solamente trasladar una idea cualitativa de las propuestas; el lector interesado es invitado a consultar los trabajos originales.

Ya en la segunda parte de este capítulo, en la Sec. 5. 4. 1, se describen y comentan los resultados del único experimento realizado hasta la fecha basado en demostraciones algebraicas (sin desigualdades) del teorema de Bell-EPR: el experimento de Torgerson, Branning, Monken y Mandel (TBMM) [TBMM 95] basado en el argumento de Hardy. En la Sec. 5. 4. 2 se discuten las conclusiones a las que llegan los autores de este experimento; para ello se siguen dos caminos: primero, se critica el razonamiento teórico al que someten sus resultados experimentales, y segundo, se presenta un modelo explícito de variables ocultas locales que reproduce los resultados del experimento comentado. Estos resultados forman parte de [Cabello-Santos 96]. Tras esta sección se llega a la conclusión, por otra parte evidente, de que para traducir los argumentos algebraicos en experimentos reales es necesario antes derivar desigualdades. Esto da pie a resumir, en la sección Sec. 5. 5, varias propuestas de desigualdades sugeridas por los argumentos algebraicos, y ver cómo éstas se comparan (desfavorablemente) con los experimentos clásicos basados en desigualdades de Bell.

El interés de las Secs. 5. 3, 5. 4 y 5. 5 se justifica en el hecho de que las demostraciones de GHZ y Hardy hicieron nacer la esperanza de que los experimentos reales en ellos basados serían más concluyentes que los experimentos realizados sobre desigualdades de Bell (la idea era simple: puesto que los argumentos son más sencillos y las contradicciones mayores, los experimentos correspondientes serán más concluyentes). Esperanza que se ha demostrado infundada porque, en el mejor de los casos, las nuevas desigualdades derivadas son casos particulares de las ya conocidas.

Como norma general, en aquellas secciones de este capítulo donde se resumen resultados de la literatura, se usará la misma notación empleada por sus autores.

[Cirac-Zoller 94] (comentado en la Sec. 5. 2. 4), o esquemas de teleportación cuántica [Cirac-Parkins 94].

5. 2. Experimentos ideales de tipo GHZ

5. 2. 1. Cuatro partículas de espín 1/2 (GHZ, 1989)

El argumento GHZ aparece por primera vez referido a estados de espín de un sistema de *cuatro* partículas de espín 1/2 [GHZ 89]; el ejemplo que hemos venido utilizando para ilustrarlo, con estados de espín de *tres* partículas de espín 1/2, es una simplificación del de GHZ debida a Mermin [Mermin 90 a, b, d] (aunque es muy frecuente en la literatura llamar estado "de GHZ" al de Mermin). Pese a involucrar cuatro partículas en lugar de tres, el ejemplo original tiene la ventaja de que el estado requerido se puede (en principio) obtener por dos desintegraciones sucesivas de una única partícula inicial. En esta sección veremos cómo se puede obtener idealmente este estado y cuál es el correspondiente argumento de GHZ para ese caso particular. Los resultados de esta sección proceden de [GHZ 89] y [GHSZ 90].

El estado de GHZ original [GHZ 89] es el siguiente estado de espín de cuatro partículas de espín 1/2

$$|\gamma\rangle = (|++--\rangle - |--++\rangle)/\sqrt{2}. \tag{5. 1}$$

Este estado se puede obtener a partir de una partícula de espín 1 y tercera componente 0

$$|\gamma_1\rangle = |\mathbf{S}=1, S_z=0\rangle, \tag{5. 2}$$

que se desintegra, conservando el espín total y su tercera componente, en dos partículas de espín 1 (que llamaremos I y II) en el estado entangled

$$|\gamma_2\rangle = (|+1-1\rangle - |-1+1\rangle)/\sqrt{2}, \tag{5. 3}$$

donde $|+1\ -1\rangle := |S_z^{(1)}=+1\rangle \otimes |S_z^{(II)}=-1\rangle$. Cada una de las partículas de espín 1 se desintegra en dos partículas de espín 1/2 a las que llamaremos respectivamente 1, 2, 3, 4, de manera que cada estado de una partícula de espín 1 da lugar a otro estado de dos partículas de espín 1/2

$$|S_z^{(I)}=+1\rangle \rightarrow |S_z^{(1)}=+1/2\rangle \otimes |S_z^{(2)}=+1/2\rangle, \tag{5. 4 a}$$

$$|S_z^{(I)}=-1\rangle \rightarrow |S_z^{(1)}=-1/2\rangle \otimes |S_z^{(2)}=-1/2\rangle, \tag{5. 4 b}$$

$$|S_z^{(II)}=+1\rangle \rightarrow |S_z^{(3)}=+1/2\rangle \otimes |S_z^{(4)}=+1/2\rangle, \tag{5. 4 c}$$

$$\left|S_z^{(\mathrm{II})}=-1\right\rangle \rightarrow \left|S_z^{(3)}=-1/2\right\rangle \otimes \left|S_z^{(4)}=-1/2\right\rangle. \qquad (5.\ 4\ \mathrm{d})$$

Haciendo las sustituciones (5. 4 a)-(5. 4 d) en (5. 3), y con la notación $|++--\rangle := \left|S_z^{(1)}=+1/2\right\rangle \otimes \left|S_z^{(2)}=+1/2\right\rangle \otimes \left|S_z^{(3)}=-1/2\right\rangle \otimes \left|S_z^{(4)}=-1/2\right\rangle$, obtenemos el estado (5. 1).

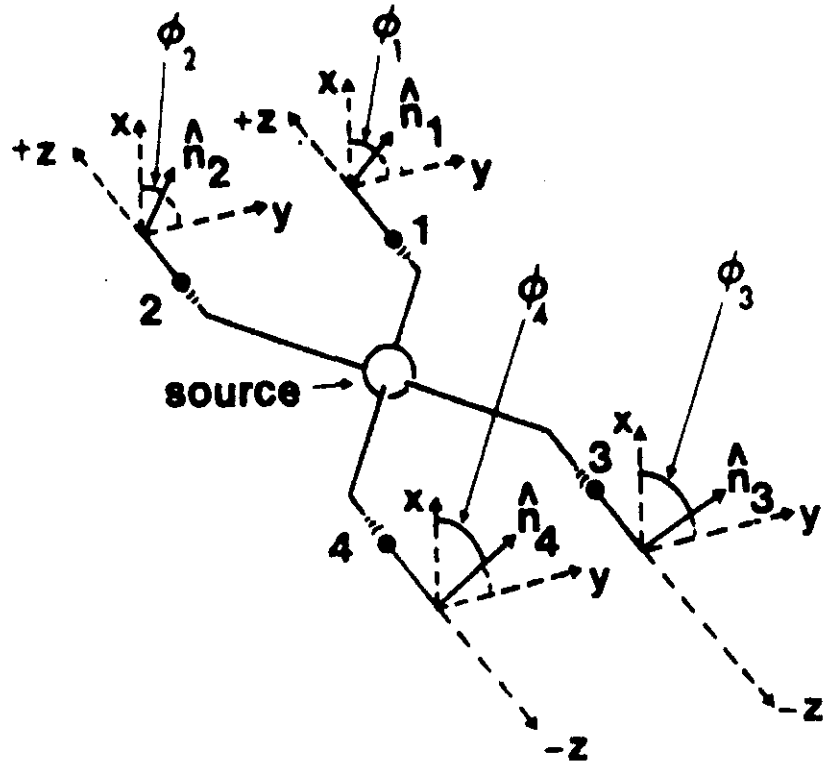


Fig. 5. 1. La situación considerada por GHZ: Cuatro partículas de espín 1/2 preparadas en el estado (5. 1) atraviesan sendos Stern-Gerlach orientados según los vectores unitarios $\mathbf{n}_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) perpendiculares a las trayectorias de las partículas. Tomado de [GHSZ 90].

El argumento de GHZ es como sigue: Consideremos un sistema de cuatro partículas de espín 1/2 producidas de manera que el estado de espín del sistema es (5. 1) y con partes espaciales tales que se puede considerar que cada una de las partículas está localizada en una cierta trayectoria y tiene sentido decir que las partículas 1 y 2 se mueven libremente en la dirección z positiva y las partículas 3 y 4 en la dirección z negativa. Supongamos que en la trayectoria de la partícula i ($i=1, 2, 3, 4$) se coloca un aparato de Stern-Gerlach en el plano x-y con ángulo acimutal ϕ_i. Supongamos, además,

que los cuatro sucesos "la partícula i atraviesa el correspondiente Stern-Gerlach observándose el resultado" (es decir, las cuatro mediciones), están separados por intervalos de género espacio. Ver la figura 5. 1.

El valor esperado en el estado (5. 1) del producto de los resultados (+1 ó –1) de esas mediciones es

$$E_\gamma(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4) = -\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4). \qquad (5.\ 5)$$

En particular nos interesaremos en los siguientes casos en los que se producen correlaciones perfectas:

$$\text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0, \text{ entonces } E_\gamma(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4) = -1, \qquad (5.\ 6\ a)$$

$$\text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi, \text{ entonces } E_\gamma(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4) = +1. \qquad (5.\ 6\ b)$$

Con los cuatro aparatos de Stern-Gerlach orientados en ángulos satisfaciendo las condiciones bien de (5. 6 a), bien de (5. 6 b), el conocimiento de los resultados de tres de las partículas nos permite una predicción con certeza del resultado de la cuarta. Como en el instante en que se efectúan las mediciones, las cuatro partículas están separadas por sendos intervalos de género-espacio, supondremos que, por la condición de localidad, el resultado de cada una de las mediciones no depende de nada que se haya hecho en las otras tres regiones espacialmente separadas. Esto nos lleva a suponer que para cada sistema individual de cuatro partículas preparado en las condiciones antes descritas, su estado de variables ocultas (que denotamos por λ) permite definir cuatro funciones, $A_\lambda(\phi_1)$, $B_\lambda(\phi_2)$, $C_\lambda(\phi_3)$, $D_\lambda(\phi_4)$, que sólo dependen de la variable entre paréntesis respectiva y toman valores +1 ó –1, que representan los resultados que se obtendrían en las correspondientes medidas del espín de las partículas 1 a 4 respectivamente en dicho sistema individual[6]. Reescribiendo (5. 6 a) y (5. 6 b) en términos de esas funciones obtenemos respectivamente

$$\text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0, \text{ entonces } A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) = -1, \qquad (5.\ 7\ a)$$

$$\text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi, \text{ entonces } A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) = +1. \qquad (5.\ 7\ b)$$

Consideremos ahora algunos casos particulares de (5. 7 a):

$$A_\lambda(0)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0) = -1, \qquad (5.\ 8\ a)$$

---

[6] La equivalencia entre esta notación y la usada en el capítulo 3 es $A_\lambda(\phi_1) = v(\sigma_{\mathbf{a}}^{(1)})$, siendo **a** un vector unitario en el plano x-y con ángulo acimutal ϕ_1.

$$A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(0)=-1, \tag{5. 8 b}$$

$$A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(\phi)=-1, \tag{5. 8 c}$$

$$A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi)=-1. \tag{5. 8 d}$$

De las ecs. (5. 8 a) y (5. 8 b) se obtiene

$$A_\lambda(0)C_\lambda(0)=A_\lambda(\phi)C_\lambda(\phi), \tag{5. 9 a}$$

y de las ecs. (5. 8 a) y (5. 8 c) se obtiene

$$A_\lambda(0)D_\lambda(0)=A_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi). \tag{5. 9 b}$$

Una consecuencia de (5. 9 a) y (5. 9 b) es

$$C_\lambda(0)/D_\lambda(0)=C_\lambda(\phi)/D_\lambda(\phi), \tag{5. 10 a}$$

que se puede reescribir como

$$C_\lambda(0)D_\lambda(0)=C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi), \tag{5. 10 b}$$

porque $D_\lambda(0)$ es +1 ó −1 y por tanto igual a su inversa, y lo mismo $D_\lambda(\phi)$. Entonces, de las ecs. (5. 8 d) y (5. 10 b) se obtiene

$$A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0)=-1, \tag{5. 11}$$

que junto con la ec. (5. 8 a) conduce a

$$A_\lambda(2\phi)=A_\lambda(0)=\text{cte},\ \forall\phi. \tag{5. 12}$$

Físicamente uno esperaría que $A_\lambda(0)$ y $A_\lambda(\pi)$ tuviesen resultados opuestos (puesto que corresponden a mantener la dirección y cambiar el sentido del Stern-Gerlach). Pero la contradicción es aún más evidente si consideramos un caso particular de (5. 7 b)

$$A_\lambda(\phi+\pi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(0)=+1, \tag{5. 13}$$

que, junto con (5. 8 b) conduce a

$$A_\lambda(\phi+\pi)=-A_\lambda(\phi), \tag{5. 14}$$

que está en clara contradicción con (5. 12). Nótese que en el argumento anterior el ángulo ϕ_2 ha sido 0 todo el tiempo, lo que lleva a pensar que la partícula 2 no juega un papel esencial y que sería posible un argumento teórico similar con sólo tres partículas.

Esta observación condujo a la versión simplificada con tres partículas que vimos en la Sec. 3. 4. 2.

5. 2. 2. Interferometría de tres partículas (GHSZ, 1990)

Cronológicamente la primera propuesta para implementar el argumento GHZ en un contexto físico distinto del de estados de espín de tres o más partículas, tiene que ver con fenómenos de interferencia de tres (o más) partículas [GHSZ 90]. Los resultados de esta sección proceden de esa referencia. Considérese el interferómetro de tres partículas que se representa en la figura 5. 2.

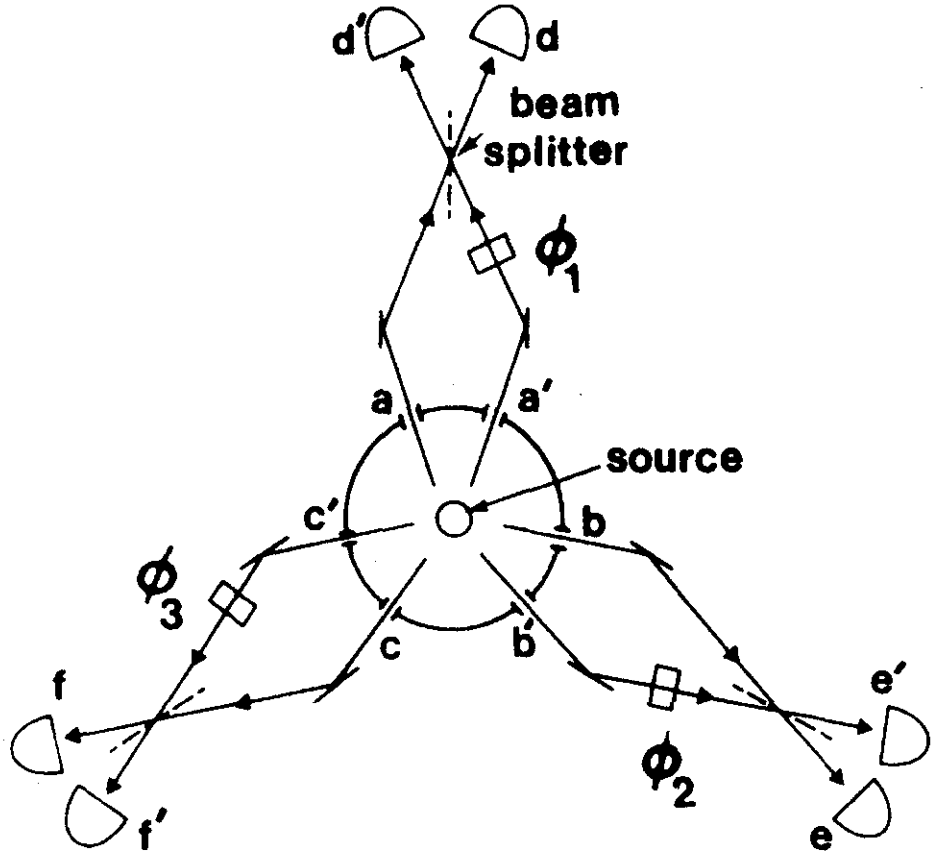


Fig. 5. 2. Interferómetro de tres partículas. La fuente emite tres partículas, 1, 2, y 3, por seis caminos *a*, *b*, *c*, *a'*, *b'*, *c'*, en el estado (5. 15). En el camino *a'* hay una lámina de fase que introduce una diferencia de fase ϕ_1 entre *a* y *a'*, los caminos *a* y *a'* se reúnen en un beam splitter previo a sendos detectores *d* y *d'*. Análogamente para las otras dos parejas de caminos. Tomado de [GHSZ 90]; también en [GHZ 93], p. 29, y [Shimony 93], p. 93.

En la región central del dispositivo de la Fig. 5. 2 se tiene una fuente que consiste en una partícula de momento lineal (medio) cero, que se desintegra en tres partículas (1, 2 y 3) de igual masa o en tres fotones (ligeras modificaciones del experimento permitirían otras combinaciones de partículas de diferentes masas, y fotones). Si esas tres partículas tienen la misma energía (lo cual se puede comprobar poniendo filtros de energía antes de los detectores), entonces, por conservación del momento lineal, deben emitirse formando ángulos de 120° entre sí. Rodeando a la zona donde se produce la desintegración, hay seis aperturas: a, b, y c, que forman entre sí ángulos de 120°; y a', b', y c', que forman entre sí ángulos de 120° (Fig. 5. 2). La mayoría de los tríos de partículas que se producen en la fuente no saldrán por ninguno de esas seis aperturas, pero supondremos que podemos ajustar la geometría de la fuente y de las aperturas de manera que las partículas 1, 2, y 3 saldrán o bien por a, b, y c; o bien por a', b', y c'. Por tanto, el estado de las tres partículas a la salida de las aperturas puede escribirse como la siguiente superposición

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle_1|b\rangle_2|c\rangle_3 + |a'\rangle_1|b'\rangle_2|c'\rangle_3), \tag{5. 15}$$

donde $|a\rangle_1$ denota la partícula 1 en el camino a, etc.[7]

En los caminos a', b', c' se introducen sendas láminas de fase que introducen diferencias de fase ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, entre, respectivamente, a y a', b y b', c y c'. A continuación cada pareja de caminos con la misma letra se hace incidir sobre cada una de las caras de un beamsplitter (divisor de haz). Tras cada beamsplitter hay una pareja de detectores (d y d', e y e', f y f', respectivamente). La acción de las láminas de fase (cuando las hay) y los beamsplitters hace que la evolución de los estados $|a\rangle_1$ y $|a'\rangle_1$ sea

$$|a\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\rangle_1 + \mathrm{i}|d'\rangle_1), \tag{5. 16 a}$$

$$|a'\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\phi_1}(|d'\rangle_1 + \mathrm{i}|d\rangle_1), \tag{5. 16 b}$$

donde $|d\rangle_1$ denota el estado en que la partícula 1 sigue el camino que conduce al detector d, etc. Los estados $|b\rangle_2$ y $|c\rangle_3$ evolucionan de forma análoga a (5. 16 a) y los estados $|b'\rangle_2$ y $|c'\rangle_3$ evolucionan de forma análoga a (5. 16 b) (cambiando $|d\rangle_1$ por $|e\rangle_2$ y $|f\rangle_3$, y $|d'\rangle_1$ por $|e'\rangle_2$ y $|f'\rangle_3$, y ϕ_1 por ϕ_2 y ϕ_3, respectivamente). A partir de (5. 15), con

[7] La analogía del estado (5. 15) con el estado de tres partículas de espín 1/2, considerado en la Sec. 3. 4. 2, $|\mu\rangle = (|+++\rangle - |---\rangle)/\sqrt{2}$, es evidente.

los cambios (5. 16 a), (5. 16 b) y similares, y suponiendo que todos los detectores son perfectos y que no hay pérdidas durante el vuelo, se pueden calcular la probabilidades de encontrar las tres partículas en las distintas combinaciones de detectores. Denotando por $P_\psi(d, e, f)$ la probabilidad de detectar simultáneamente la partícula 1 en d, la partícula 2 en e, y la partícula 3 en f,

$$P_\psi(d, e, f) = \frac{1}{8}[1 + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)], \tag{5. 17 a}$$

análogamente

$$P_\psi(d', e, f) = \frac{1}{8}[1 - \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)], \tag{5. 17 b}$$

etc. (si el número de detectores con primas es par, hay un signo más como en (5. 17 a); si es impar, hay un signo menos como en (5. 17 b)). Si asociamos el valor +1 a las partículas que llegan a detectores sin prima, y −1 a las partículas que llegan a detectores con prima, el valor esperado del producto de los tres resultados es

$$E_\psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3), \tag{5. 18}$$

de manera que con una elección adecuada de los ángulos, se pueden obtener correlaciones perfectas,

$$\text{Si } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi/2, \text{ entonces } E_\psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = +1, \tag{5. 19 a}$$

$$\text{Si } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3\pi/2, \text{ entonces } E_\psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = -1. \tag{5. 19 b}$$

Por ejemplo, supongamos que en cada brazo del interferómetro, la correspondiente lámina de fase puede tomar dos valores $\phi_i = 0$ y $\phi_i' = \pi/2$. De acuerdo con (5. 18),

$$E_\psi(\pi/2, 0, 0) = E_\psi(0, \pi/2, 0) = E_\psi(0, 0, \pi/2) = +1, \tag{5. 20}$$

mientras que, de acuerdo con (5. 19 b),

$$E_\psi(\pi/2, \pi/2, \pi/2) = -1. \tag{5. 21}$$

Las ecs. (5. 18), (5. 19 a) y (5. 19 b) son análogas a las ecs. (5. 5), (5. 6 a).y (5. 6 b) de la sección anterior, sólo que ahora las fases introducidas por las láminas de fase hacen el papel de en la sección anterior hacían los ángulos acimutales de las orientaciones de los Stern-Gerlach. El argumento GHZ es pues paralelo al de la sección anterior.

5. 2. 3. Interferometría con fuentes independientes (Yurke-Stoler, 1992)

En casi todos los experimentos sobre partículas preparadas en estados entangled se insiste en que las partículas tienen un origen común o que han de haber interactuado alguna vez en el pasado (como ocurre en las dos secciones anteriores). Por ese motivo es llamativa la propuesta de Yurke y Stoler [Yurke-Stoler 92 a] en la que se implementa el argumento de GHZ con tres partículas creadas en fuentes independientes[8]. Los resultados de esta sección son un resumen de esa referencia.

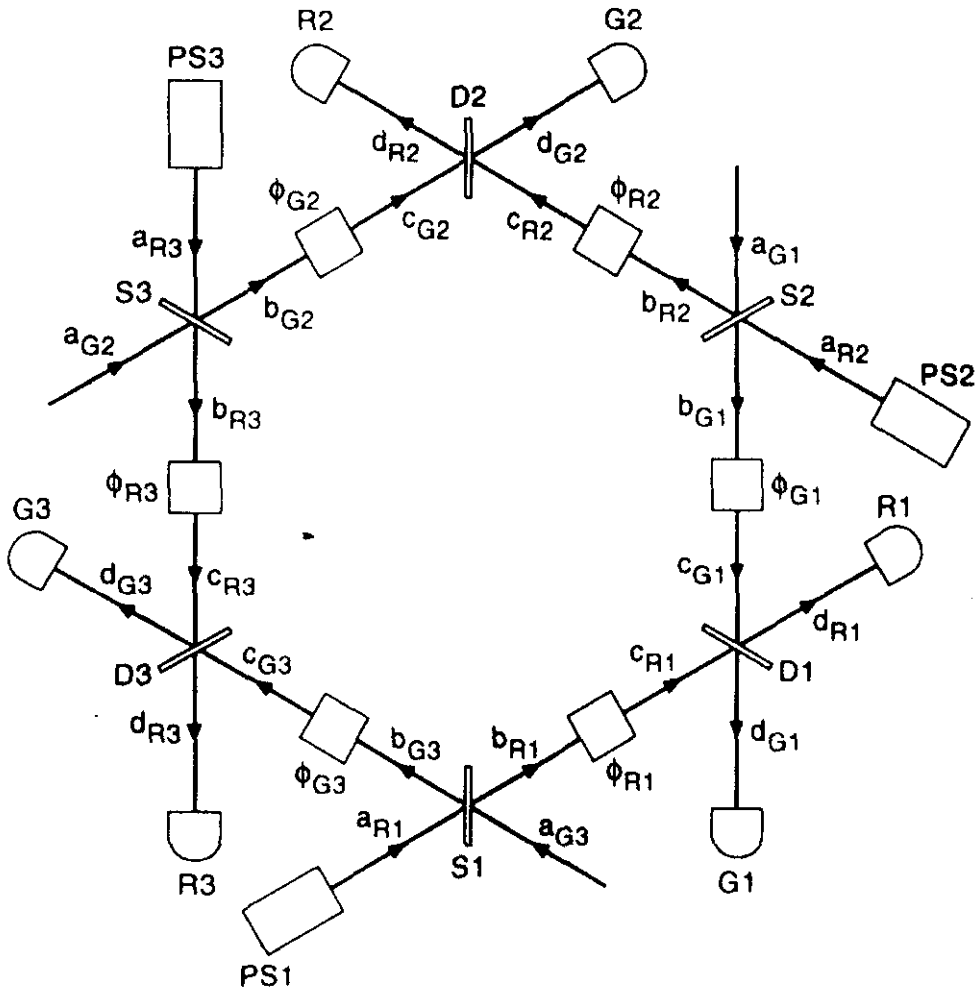


Fig. 5. 3. Interferómetro de tres partículas procedentes de tres fuentes independientes *PSi* ($i = 1, 2, 3$). Tomado de [Yurke-Stoler 92 a].

[8] De hecho, el dispositivo de la Fig. 5. 3 es una distorsión topológica del de la Fig. 5. 2, como se ve en [Yurke-Stoler 92 a], p. 1252.

El dispositivo de Yurke y Stoler se ilustra en la figura 5. 3; consiste en tres fuentes de partículas *PSi* ($i=1, 2, 3$), a la salida de las cuales se colocan sendos beamsplitters *Si* (con transmitividades y reflectividades 1/2); en los caminos de salida de estos beamsplitters hay sendas láminas de fase previas a sendos beamsplitters *Di* (con transmitividades y reflectividades 1/2), a cuya salida hay sendos detectores *Gi* y *Ri*. Denotaremos por ϕ_{Gi} (ϕ_{Ri}) a la diferencia de fase que introduce la lámina de fase que está en la dirección que acaba en *Gi* (*Ri*).

En notación de segunda cuantificación, el estado de partida a la salida de las tres fuentes es

$$|\psi\rangle = a_{R1}^{\dagger} a_{R2}^{\dagger} a_{R3}^{\dagger}|0\rangle, \tag{5. 22}$$

donde $a_i^{\dagger}$ (a_i) es el operador de creación (aniquilación) de los modos de salida de la fuentes *PSi* y $|0\rangle$ denota el estado de vacío[9]. Al pasar por el beamsplitter *Si* (en el que por el otro canal entra el vacío), por las respectivas láminas de fase, y por los beamsplitters *Dj*, $j=1, 2, 3$ y $D(j-1)$ (donde si $j=1$, $j-1:=3$), cada uno de los a_i se transforma en

$$a_{Rj} \to \frac{1}{2}[e^{-i\phi_{Rj}}(d_{Rj} - i d_{Gj}) - e^{-i\phi_{G(j-1)}}(-i d_{R(j-1)} + d_{G(j-1)})]. \tag{5. 23}$$

A partir de (5. 22) y (5. 23) podemos calcular las probabilidades de los diferentes resultados posibles. En cada par de detectores *Ri*, *Gi*, pueden darse, en principio los resultados $\{0, R, G, R^2, G^2, RG\}$ (i.e., que no haya ninguna detección, que *Ri* detecte una partícula y *Gi* ninguna, que *Gi* detecte una partícula y *Ri* ninguna, que *Ri* detecte dos partículas y *Gi* ninguna, que *Gi* detecte dos partículas y *Ri* ninguna, que *Ri* y *Gi* detecten una partícula cada uno). Llamemos *A* al conjunto de los sucesos en los que cada par de detectores *Ri*, *Gi* ($i=1, 2, 3$) ha detectado una sola partícula, y ha habido un número impar de detecciones *R*, es decir

$$A = \{RRR, RGG, GRG, GGR\}, \tag{5. 24 a}$$

donde, por ejemplo, *RGR* quiere decir que en el par de detectores *R1*, *G1* se ha obtenido un resultado *R*, en el par *R2*, *G2* se ha obtenido un resultado *G*, y en el par *R3*, *G3* se ha obtenido un resultado *R*. Con análoga notación, sea

$$B = \{GGG, GRR, RGR, RRG\}. \tag{5. 24 b}$$

---

[9] En [Yurke-Stoler 92 a] se describen varias formas de fabricar el estado (5. 22).

No nos interesaremos por el resto de los sucesos. La probabilidad de cada uno de los cuatro sucesos del conjunto A (B) es $\frac{1}{16}\sin^2\phi$ ($\frac{1}{16}\cos^2\phi$), donde

$$\phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\phi_{Ri} - \phi_{Gi}). \tag{5. 25}$$

Si llamamos $\phi_i = \phi_{Ri} - \phi_{Gi}$, y suponemos que cada ϕ_i sólo puede tomar los valores 0 y $\pi/2$, el experimento descrito exhibe características análogas a los de las secciones anteriores:

(a) Si uno de los ϕ_i vale 0 y los otros dos valen $\pi/2$, siempre que se detecta una partícula en cada par de detectores, el resultado es (con certeza) de tipo A.

(b) Si los tres ϕ_i son 0 y se detecta una sola partícula en cada par de detectores, el resultado es (con certeza) de tipo B.

Idealmente (suponiendo detectores perfectos), si se detecta una sola partícula en dos de las parejas de detectores, se sabe con certeza que la tercera pareja de detectores detecta una sola partícula. Con los tres ϕ_i uno igual a 0 y los otros dos igual a $\pi/2$, si se conocen los resultados (G o R) de dos de las detecciones, se conoce con certeza el resultado de la tercera (porque con esas elecciones de ángulos sólo se dan resultados del conjunto A, esto es con un número impar de Rs). Lo mismo sucede si los tres ϕ_i son 0 (porque entonces sólo se dan resultados del conjunto B, esto es, con un número par de Rs). Luego supondremos que puesto que la elección del correspondiente ϕ_i se hace en una región espacialmente separada de las otras dos, en una teoría de variables ocultas locales el tercer resultado está predefinido, es decir, que la tercera partícula sabe de antemano cómo responder a cualquiera de las alternativas de ϕ_i. Y, por un razonamiento totalmente simétrico, lo mismo pasa con las partículas primera y segunda. Cabe suponer pues, que existe un conjunto de seis instrucciones definidas (las dos respuestas alternativas de cada una de las tres partículas). Denotemos cada uno de esos conjuntos por una matriz 2×3 $\{\beta_{ij}\}$, donde el índice i puede valer 1 ó 2 según sea la diferencia de fase ϕ_i (0 ó $\pi/2$ respectivamente), y el índice j especifica el detector ($j = 1, 2, 3$); $\beta_{ij} \in \{R, G\}$. Es fácil ver que con las elecciones de fase 122 (esto es, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \phi_3 = \pi/2$), 212, y 221, los únicos conjuntos admisibles (en una teoría de variables ocultas locales) de instrucciones, $\{\beta_{ij}\}$, son:

$$\begin{Bmatrix} RRR \\ RRR \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} RGG \\ RGG \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} GRG \\ GRG \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} GGR \\ GGR \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} RRR \\ GGG \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} RGG \\ GRR \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} GRG \\ RGR \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} GGR \\ RRG \end{Bmatrix}. \tag{5. 26}$$

Teniendo en cuenta (5. 26), al hacer la elección de fases 111 sólo deberíamos obtener sucesos con un número *impar* de Rs, cuando lo que sucede (el correspondiente cálculo

puede encontrarse en la referencia original) es justamente lo contrario: sólo se dan sucesos con un número *par* de *R*s.

5. 2. 4. Tres átomos en interacción con cavidades (Cirac-Zoller, 1994)

En lugar de los dos posibles estados (+1/2 y −1/2) de partículas de espín 1/2, se van a usar átomos de dos niveles. El "entanglement" se produce en este caso por interacción con el campo electromagnético contenido en una cavidad. Se han propuesto formas de fabricar singletes de esta manera [Phoenix-Barnett 93], [Cirac-Zoller 94]; aquí se resume la propuesta de [Cirac-Zoller 94] para fabricar el estado de GHZ-Mermin

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle-|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle\right), \tag{5. 27}$$

donde $|\downarrow_i\rangle$, $|\uparrow_i\rangle$ denotan, respectivamente, los estados fundamental y excitado del átomo i-ésimo. Supongamos que el modo de la cavidad es inicialmente una superposición coherente de los estados de Fock $|0\rangle$ y $|3\rangle$,

$$|\psi\rangle_C=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|3\rangle\right). \tag{5. 28}$$

Este estado se puede preparar mediante el paso de átomos de dos niveles con estructura Zeeman a través de una cavidad [Parkins-Marte-Zoller-Kimble 93], o, alternativamente mediante medidas sobre los átomos que salen de la cavidad que proyecten el estado de la cavidad a (5. 28) [Vogel-Akulin-Schleich 93].

Una vez preparada la cavidad en el estado (5. 28) se hacen pasar a través de ella, uno a uno, tres átomos en estado fundamental, con velocidades respectivamente v_1, v_2, v_3. Consideremos para empezar la interacción del primer átomo con la cavidad. Supondremos que la interacción átomo-cavidad viene descrita por el hamiltoniano de Jaynes-Cummings [Shore-Knight 93],

$$H=\mathrm{i}g(t)(\sigma_+a-a^\dagger\sigma_-), \tag{5. 29}$$

donde $\sigma_+=(\sigma_-)^\dagger=|\uparrow\rangle\langle\downarrow|$ es el operador de excitación del átomo de dos niveles y $a^\dagger$ y a son los operadores de creación y destrucción para el modo de la cavidad. Se ha supuesto que la transición entre los dos niveles del átomo está en resonancia con el modo de la cavidad. El parámetro de acoplamiento entre el átomo y la cavidad es $g(t)$,

que depende del tiempo que pasa el átomo dentro de la cavidad. El hamiltoniano (5. 29) tiene dos propiedades relevantes para nuestra discusión:

— El estado $|\downarrow\rangle|0\rangle$ no cambia durante la interacción.

— Los estados $|\uparrow\rangle|0\rangle$ y $|\downarrow\rangle|1\rangle$ sufrirán oscilaciones del vacío de Rabi [Walther 92], [Thompson-Rempe-Kimble 92] que dependerán del tiempo de interacción del átomo con la cavidad (y por tanto de la velocidad del átomo a la entrada de la cavidad).

Como el átomo está en estado fundamental, la parte $|0\rangle|\downarrow_1\rangle$ no cambia durante la interacción. Por el contrario, si se selecciona la velocidad v_1 de forma que el estado $|3\rangle|\downarrow_1\rangle$ efectúe medio ciclo de Rabi al final de la interacción, el estado del átomo 1 más la cavidad es

$$|\psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|\downarrow_1\rangle - |2\rangle|\uparrow_1\rangle\right). \tag{5. 30}$$

Análogamente, como el segundo átomo también está en su estado fundamental, el estado $|0\rangle|\downarrow_1\rangle$ no cambia en durante la interacción. Si se selecciona la velocidad v_2 de manera que el estado $|2\rangle|\downarrow_1\rangle$ efectúe medio ciclo de Rabi, el estado del átomo 1 más el átomo 2 más la cavidad es

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle - |1\rangle|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\right). \tag{5. 31}$$

Finalmente, seleccionando adecuadamente la velocidad del tercer átomo, el sistema de los tres átomos más la cavidad está en el estado

$$|\psi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle\right)|0\rangle. \tag{5. 32}$$

Otra propuesta de fabricación de estados tipo GHZ con átomos pasando por cavidades es [Wódkiewicz-Wang-Eberly 93].

La misma idea sirve (como se sugiere en [Cirac-Zoller 94]) para preparar estados de Hardy. En la Sec. 5. 3. 5 veremos una propuesta para preparar estados de Hardy con átomos en cavidades.

Otros resultados similares (implementación ideal de variantes del argumento de GHZ en distintos contextos físicos) que no nos detendremos a comentar son: [Zukowski 91 a, b], [Reid-Munro 92], [Klyshko 93], [Shih-Rubin 93], [Hnilo 93, 94], [Pittman 95].

5. 3. Experimentos ideales de tipo Hardy

5. 3. 1. Electrón-positrón en interferómetros solapados (Hardy, 1992)

Hardy [Hardy 92 a] presentó originalmente su argumento sobre el dispositivo de la figura 5. 4[10].

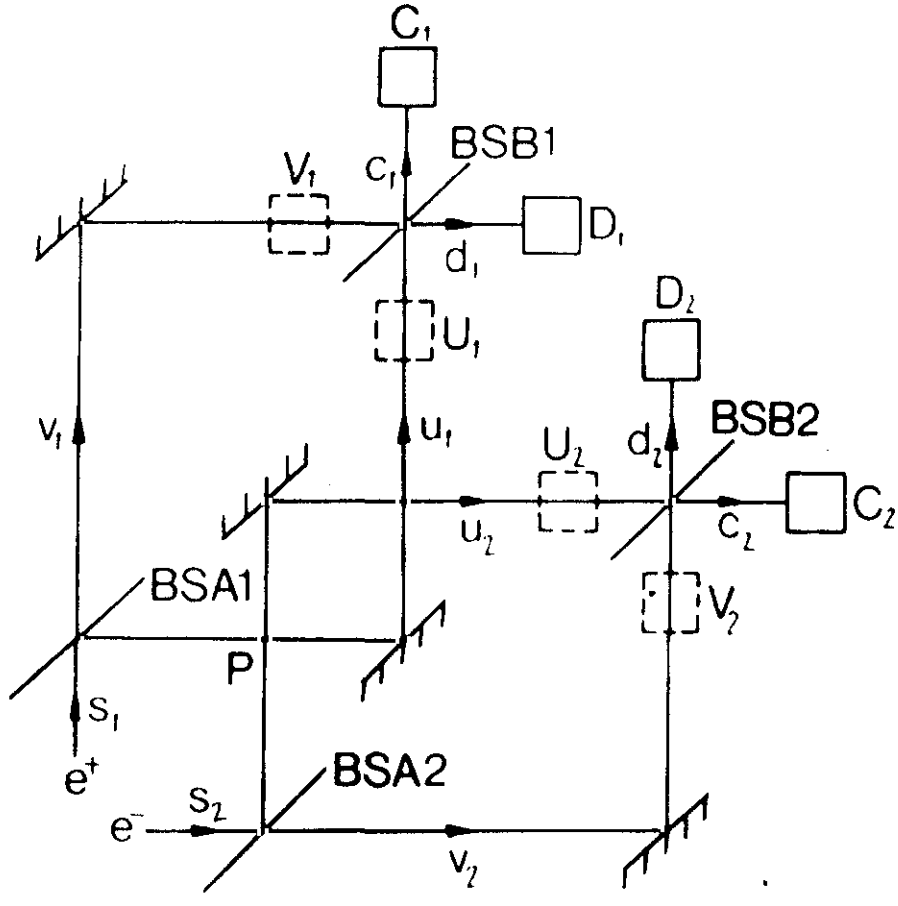


Fig. 5. 4. Dispositivo de Hardy: dos interferómetros de Mach-Zehnder, uno para electrones y otro para positrones, solapados. Los detectores U_i y V_i (con $i = 1, 2$) se pueden quitar. Tomado de [Hardy-Squires 92]; también en [Hardy 92 a].

[10] Este dispositivo es una modificación de otro propuesto por Elitzur y Vaidman para un propósito distinto ("Quantum mechanical interaction-free measurements"). En [Elitzur-Vaidman 93] se dice, p. 996: "A few preprints of this paper, written in 1991 (Tel-Aviv University, TAUP 1865-91), were circulated among our colleagues and stimulated a number of publications [Hardy 91 a, 92 a, b] (y otra más) pointing out new applications of our proposed experiment."

El dispositivo de Elitzur y Vaidman consiste en dos interferómetros Mach-Zehnder[11], uno para electrones y otro para positrones, solapados en un punto P común a uno de los caminos de cada interferómetro. Llamaremos u_i y v_i a los dos caminos internos del interferómetro i, y c_i y d_i a los dos canales de salida del interferómetro i[12]. Cada uno de los interferómetros por separado está ajustado de manera que no salgan partículas por el canal d_i cuando entran por el canal s_i.

La operación de los primeros beamsplitters *BSA1* y *BSA2* es

$$|s_i\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}|u_i\rangle + |v_i\rangle), \tag{5. 33}$$

siendo $|s_i\rangle$ el estado de entrada de la correspondiente partícula ($i=1$ positrón, $i=2$ electrón) en el correspondiente canal de entrada s_i, $|u_i\rangle$ el estado de la partícula i en el camino u_i, y $|v_i\rangle$ el estado de la partícula i en el camino v_i.

Los caminos u_1 y u_2 se solapan en el punto P, de forma que si el positrón toma el camino u_1, y el electrón el camino u_2, y llegan al mismo tiempo a P, en P ambos se aniquilan con probabilidad unidad emitiendo un fotón,

$$|u_1\rangle|u_2\rangle \rightarrow |\gamma\rangle. \tag{5. 34}$$

El estado del par electrón-positrón después del punto P es

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(-|\gamma\rangle + \mathrm{i}|u_1\rangle|v_2\rangle + \mathrm{i}|v_1\rangle|u_2\rangle + |v_1\rangle|v_2\rangle). \tag{5. 35}$$

En cada interferómetro se pueden colocar detectores bien en los caminos internos u_i y v_i (en cuyo caso denotaremos los correspondientes detectores por U_i y V_i) o bien en los canales de salida c_i y d_i (en cuyo caso los denotaremos por C_i y D_i); ver la Fig. 5. 4. Por tanto, podemos hacer uno de los cuatro experimentos alternativos siguientes:

(i) Introducir los detectores U_1, V_1, U_2, V_2.

(ii) Introducir C_1, D_1, U_2, V_2.

(iii) Introducir U_1, V_1, C_2, D_2.

(iv) Introducir C_1, D_1, C_2, D_2.

---

[11] Un interferómetro de Mach-Zehnder consiste en un beamsplitter, sendos espejos a la salida del mismo, y a continuación otro beamsplitter en los caminos de los espejos.

[12] La notación es la de [Hardy-Squires 92] que es más clara que la de [Hardy 92 a].

Como $|\psi_1\rangle$ no contiene el término $|u_1\rangle|u_2\rangle$ (debido a la aniquilación (5. 34)), si hacemos un experimento de tipo (i), la probabilidad de que los detectores U_1, U_2 se disparen a la vez es cero,

$$P_{\psi_1}(U_1, U_2) = 0. \tag{5. 36}$$

Los beamsplitters de salida *BSB1* y *BSB2* convierten

$$|u_i\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|c_i\rangle + \mathrm{i}|d_i\rangle), \tag{5. 37 a}$$

$$|v_i\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}|c_i\rangle + |d_i\rangle). \tag{5. 37 b}$$

Por tanto, si hacemos un experimento de tipo (ii) (es decir, quitamos los detectores U_1, V_1 de delante de *BSB1* y ponemos los detectores C_1, D_1 detrás de *BSB1*), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2}|\gamma\rangle - |c_1\rangle|u_2\rangle + 2\mathrm{i}|c_1\rangle|v_2\rangle + \mathrm{i}|d_1\rangle|u_2\rangle), \tag{5. 38}$$

estado para el que

$$P_{\psi_2}(U_2 \mid D_1) = 1. \tag{5. 39}$$

Análogamente, en un experimento de tipo (iii) el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2}|\gamma\rangle - |u_1\rangle|c_2\rangle + 2\mathrm{i}|v_1\rangle|c_2\rangle + \mathrm{i}|u_1\rangle|d_2\rangle), \tag{5. 40}$$

estado para el que

$$P_{\psi_3}(U_1 \mid D_2) = 1. \tag{5. 41}$$

Finalmente, si decidimos hacer un experimento de tipo (iv), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{4}(-2|\gamma\rangle - 3|c_1\rangle|c_2\rangle + \mathrm{i}|c_1\rangle|d_2\rangle + \mathrm{i}|d_1\rangle|c_2\rangle - |d_1\rangle|d_2\rangle), \tag{5. 42}$$

para el cual

$$P_{\psi_4}(D_1, D_2) = \frac{1}{16}. \tag{5. 43}$$

Las expresiones (5. 36), (5. 39), (5. 41), (5. 43) permiten obtener una contradicción con las variables ocultas locales. Supongamos que la decisión de qué se mide en cada interferómetro (U_i, V_i o C_i, D_i) la toman dos experimentadores en regiones separadas por un intervalo de género espacio. Supongamos que ambos experimentadores optan por colocar los detectores C_i, D_i, y consideremos sólo aquellos sucesos en los que se disparan los detectores D_i (esos sucesos son posibles, de acuerdo con (5. 43)). El experimentador 1 infiere que si el experimentador 2 hubiese optado por poner los detectores U_2, V_2, se habría disparado el detector U_2, de acuerdo con (5. 39). Análogamente el experimentador 2 infiere que si el experimentador 1 hubiese optado por poner los detectores U_1, V_1, se habría disparado el detector U_1, de acuerdo con (5. 41). Pero de acuerdo con (5. 36), U_1, U_2 nunca se pueden disparar a la vez. Existe pues una contradicción entre la predicción cuántica (5. 36), y las inferencias basadas en (5. 39) y (5. 41). El argumento es completamente similar al que vimos en la Sec. 3. 4. 4. De hecho, como hemos dicho, el argumento de Hardy se propuso originalmente en este contexto.

5. 3. 2. Interferómetros ópticos solapados (Hardy, 1992)

Poco después de la propuesta anterior, Hardy da otra versión menos *gedanken* de la misma. El dispositivo, que se ilustra en la figura. 5. 5, consiste en dos interferómetros ópticos solapados en los que se inyectan sendos fotones de la misma frecuencia, emitidos en un proceso de parametric down conversion en un cristal no lineal (*NLC*). La notación para los caminos y los detectores es la misma que en la sección anterior. Las M_i representan espejos, las *BS*'s beamsplitters.

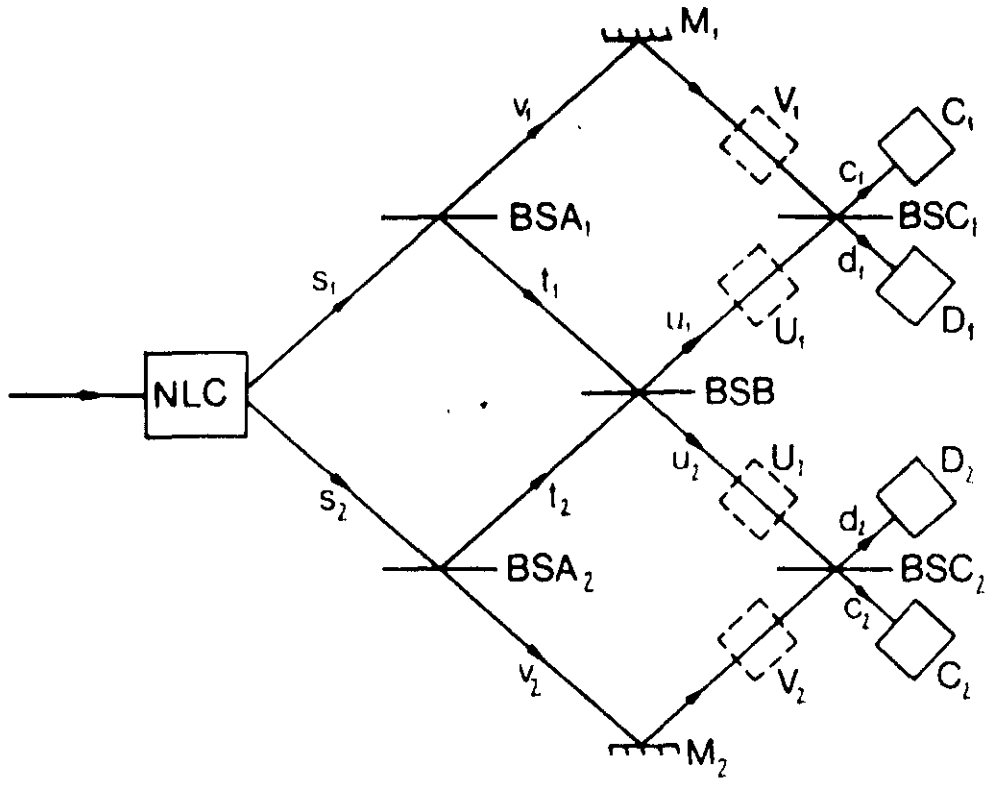


Fig. 5. 5. Dos interferómetros ópticos solapados. Los detectores U_i y V_i (con $i = 1, 2$) se pueden quitar. Tomado de [Hardy 92 b].

Los beamsplitters BSA_i y BSB tienen transmitividad 1/2, y los BSC_i tienen transmitividad 1/3. Con esta elección de transmitividades es posible ajustar las longitudes de los caminos ópticos de manera que si se bloquea la entrada del fotón 2 (1) a su interferómetro, entonces el fotón 1 (2) no puede detectarse en D_1 (D_2).

Después de tener en cuenta la acción de los beamsplitters BSA_i, de los espejos M_i, y del beamsplitter BSB, el estado del sistema es, [Hardy 92 b],

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle - \frac{i}{2\sqrt{2}}|1\rangle_{u_1}|0\rangle_{v_1}|0\rangle_{u_2}|1\rangle_{v_2} - \frac{i}{2\sqrt{2}}|0\rangle_{u_1}|1\rangle_{v_1}|1\rangle_{u_2}|0\rangle_{v_2} - \frac{1}{2}|0\rangle_{u_1}|1\rangle_{v_1}|0\rangle_{u_2}|1\rangle_{v_2} \tag{5. 44}$$

donde $|1\rangle_{u_1}|0\rangle_{v_1}|0\rangle_{u_2}|1\rangle_{v_2}$ denota el estado en el que hay un fotón en el camino u_1, otro en el camino v_2, y ninguno en los caminos u_2 y v_1. $|\varphi_1\rangle$ es el estado que contiene sólo términos en los que los dos fotones están en el mismo interferómetro. Sólo nos fijaremos en aquellos sucesos en los que llega un fotón a un detector con subíndice 1 y otro fotón a un detector con subíndice 2. Con la misma notación que en la sección anterior, si hacemos un experimento de tipo (i),

$$P_{\psi_1}(U_1, U_2) = 0. \tag{5. 45}$$

En un experimento de tipo (ii), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle - \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|1\rangle_{c_1}|0\rangle_{d_1}|0\rangle_{u_2}|1\rangle_{v_2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}|1\rangle_{c_1}|0\rangle_{d_1}|1\rangle_{u_2}|0\rangle_{v_2} - \frac{i}{2\sqrt{6}}|0\rangle_{c_1}|1\rangle_{d_1}|1\rangle_{u_2}|0\rangle_{v_2} \tag{5. 46}$$

donde, $|\varphi_2\rangle$ denota un el estado que contiene sólo términos en los que los dos fotones están en el mismo interferómetro. Para el estado (5. 46)

$$P_{\psi_2}(U_2 \mid D_1) = 1, \tag{5. 47}$$

en aquellos experimentos en los que los fotones se detecten cada uno en un interferómetro.

Si el experimento es de tipo (iii), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a un estado $|\psi_3\rangle$ para el cual, por simetría,

$$P_{\psi_3}(U_1 \mid D_2) = 1, \tag{5. 48}$$

en aquellos experimentos en los que los fotones se detecten cada uno en un interferómetro.

Finalmente, si el experimento es de tipo (iv), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona al estado

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_4\rangle + \frac{2}{3}|1\rangle_{c_1}|0\rangle_{d_1}|1\rangle_{c_2}|0\rangle_{d_2} - \frac{i}{6\sqrt{2}}|1\rangle_{c_1}|0\rangle_{d_1}|0\rangle_{c_2}|1\rangle_{d_2} - \frac{i}{6\sqrt{2}}|0\rangle_{c_1}|1\rangle_{d_1}|1\rangle_{c_2}|0\rangle_{d_2} + \frac{1}{6}|0\rangle_{c_1}|1\rangle_{d_1}|0\rangle_{c_2}|1\rangle_{d_2} \tag{5. 49}$$

para el que (prescindiendo del estado $|\varphi_4\rangle$ y renormalizando)

$$P_{\psi_4}(D_1, D_2) = \frac{1}{18}. \tag{5. 50}$$

Las condiciones (5. 45), (5. 47), (5. 48) y (5. 50) son análogas a las de la sección anterior. El argumento de imposibilidad de variables ocultas locales es el mismo.

5. 3. 3. Fermiones idénticos en interferómetros solapados (Yurke-Stoler, 1993)

En los dos casos anteriores, la aniquilación electrón-positrón o la interferencia entre dos fotones nos permitían eliminar ciertas componentes del estado, y de esta manera obtener estados susceptibles de hacer sobre ellos un argumento de tipo Hardy. Otro mecanismo que hace la misma función [Yurke-Stoler 93] es el principio de exclusión de Pauli [Pauli 26]. La propuesta de Yurke y Stoler se ilustra en la figura 5. 6. La notación es análoga a la de las dos secciones anteriores.

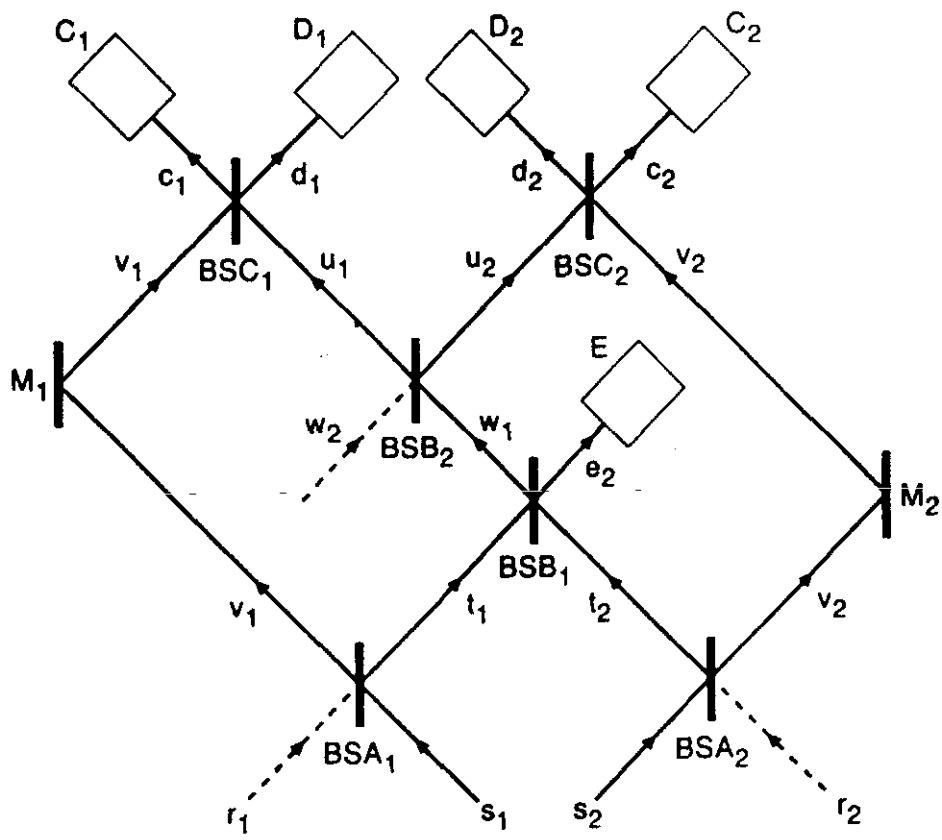


Fig. 5. 6. Dos interferómetros de Mach-Zehnder que comparten el camino w_1. Si se inyectan en los caminos s_i (con $i = 1, 2$) dos fermiones idénticos, debido al principio de exclusión de Pauli ambas partículas no pueden estar a la vez en el camino w_1. Los beamsplitters BSC_i se pueden quitar (o equivalentemente, se pueden poner sendos detectores U_i y V_i en los caminos u_i y v_i). Tomado de [Yurke-Stoler 93].

En representación de Heisenberg y en notación de segunda cuantificación, el estado a la entrada del doble interferómetro es

$$|\psi_0\rangle = s_1^\dagger s_2^\dagger |0\rangle, \tag{5. 51}$$

donde $s_i^\dagger$ es el operador de creación del modo s_i, y $|0\rangle$ es el estado de vacío. Suponiendo que los beamsplitters BSA_i hacen la transformación de modos

$$\begin{pmatrix} v_j \\ t_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_j \\ s_j \end{pmatrix}, \tag{5. 52}$$

con $j = 1, 2$, que el beamsplitter BSB_1 hace la transformación

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \tag{5. 53}$$

que el beamsplitter BSB_2 hace la transformación

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \tag{5. 54}$$

y teniendo además en cuenta las relaciones de anticonmutación para fermiones

$$e_2^\dagger w_1^\dagger = -w_1^\dagger e_2^\dagger, \tag{5. 55}$$

y el principio de exclusión de Pauli (un modo fermiónico no puede estar doblemente ocupado)

$$w_1^\dagger w_1^\dagger = e_2^\dagger e_2^\dagger = 0, \tag{5. 56}$$

el estado de la pareja de fermiones después del beamsplitter BSB_2 es

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle = & -\frac{1}{5}(v_1^\dagger v_2^\dagger + \mathrm{i}\, v_1^\dagger u_2^\dagger + \mathrm{i}\, u_1^\dagger v_2^\dagger)|0\rangle - \frac{1}{5}(u_1^\dagger v_1^\dagger + u_2^\dagger v_2^\dagger)|0\rangle \\ & -\frac{\sqrt{2}}{5}(\mathrm{i}\, v_1^\dagger + v_2^\dagger - 2u_1^\dagger + 2\mathrm{i}\, u_2^\dagger) e_2^\dagger |0\rangle \end{aligned} \tag{5. 57}$$

donde el primer término del lado derecho contiene sólo componentes en las que hay una partícula en cada interferómetro, el segundo término contiene sólo componentes en las que las dos partículas están en el mismo interferómetro, y el tercer término contiene componentes en las que una partícula es detectada por el detector E. De nuevo podemos hacer cuatro tipos de montajes:

(i) Se quitan los beamsplitters BSC_1 (lo cual es equivalente a introducir los detectores U_1 y V_1 en los caminos u_1 y v_1) y BSC_2 (lo cual es equivalente a introducir los detectores U_2 y V_2 en los caminos u_2 y v_2).

(ii) Se quita BSC_1 (es decir, se introducen U_1 y V_1) y se deja BSC_2 (es decir, se dejan C_2 y D_2).

(iii) Se deja BSC_1 (es decir, se dejan C_1 y D_1) y se quita BSC_2 (es decir, se introducen U_2 y V_2).

(iv) Se dejan BSC_1 (y C_1 y D_1) y BSC_2 (y C_2 y D_2).

En un experimento de tipo (i) para el estado (5. 57)

$$P_{\psi_1}(U_1, U_2) = 0. \tag{5. 58}$$

En un experimento de tipo (ii), suponiendo que los beamsplitters BSC_i hacen la transformación

$$\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}, \tag{5. 59}$$

el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle = & -\frac{1}{5\sqrt{2}}(2\mathrm{i}\, v_1^\dagger c_2^\dagger + \mathrm{i}\, u_1^\dagger d_2^\dagger - u_1^\dagger c_2^\dagger)|0\rangle - \frac{1}{5}(u_1^\dagger v_1^\dagger + c_2^\dagger d_2^\dagger)|0\rangle \\ & -\frac{1}{5}(\sqrt{2}\,\mathrm{i}\, v_1^\dagger - 2\sqrt{2}\, u_1^\dagger + 3\mathrm{i}\, c_2^\dagger - d_2^\dagger) e_2^\dagger |0\rangle \end{aligned} \tag{5. 60}$$

para el que

$$P_{\psi_2}(U_1 \mid D_2) = 1, \tag{5. 61}$$

para aquellos sucesos en los que no se disparen ni C_2 ni E (entonces es más razonable escribir $P_{\psi_2}(U_1 \mid D_2, \sim C_2, \sim E) = 1$).

Para un experimento de tipo (iii) el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle = & -\frac{1}{5\sqrt{2}}(2\mathrm{i}\, c_1^\dagger v_2^\dagger + \mathrm{i}\, d_1^\dagger u_2^\dagger - c_1^\dagger u_2^\dagger)|0\rangle - \frac{1}{5}(c_1^\dagger d_1^\dagger + u_2^\dagger v_2^\dagger)|0\rangle \\ & -\frac{1}{5}(-3\, c_1^\dagger - \mathrm{i}\, d_1^\dagger + \sqrt{2}\, v_2^\dagger - 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\, u_2^\dagger) e_2^\dagger |0\rangle \end{aligned} \tag{5. 62}$$

para el que

$$P_{\psi_3}(U_2 \mid D_1) = 1. \tag{5. 63}$$

para aquellos sucesos en los que no se disparen ni C_1 ni E ($P_{\psi_3}(U_2 \mid D_1, \sim C_1, \sim E) = 1$).

Por último, en los experimentos de tipo (iv), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle = & -\frac{1}{10}(-3c_1^\dagger c_2^\dagger + \mathrm{i}\, d_1^\dagger c_2^\dagger + \mathrm{i}\, c_1^\dagger d_2^\dagger - d_1^\dagger d_2^\dagger)|0\rangle - \frac{1}{5}(c_1^\dagger d_1^\dagger + c_2^\dagger d_2^\dagger)|0\rangle \\ & -\frac{1}{5}(3c_3^\dagger - \mathrm{i}\, d_3^\dagger + 3\mathrm{i}\, c_2^\dagger - d_2^\dagger)e_2^\dagger|0\rangle \end{aligned} \tag{5. 64}$$

para el que

$$P_{\psi_4}(D_1, D_2) > 0. \tag{5. 65}$$

Con las propiedades (5. 58), (5. 61), (5. 63) y (5. 65) se puede hacer un argumento de Hardy análogo a los de las secciones anteriores.

5. 3. 4. Una fuente de un solo fotón (Hardy, 1994)

Un ejemplo físico curioso en el que se puede implementar el argumento de Hardy fue propuesto por Hardy en 1994 [Hardy 94]. Esta propuesta provocó una controversia ([Peres 95], [Vaidman 95], [GHZ 95]), más relacionada con la pretensión de su autor de estar demostrando la no-localidad de un solo fotón[13], que con el fondo del asunto (se trata de las mismas ideas que hay detrás de la demostración de Hardy pero en un contexto más exótico[14]).

---

[13] Bibliografía sobre no-localidad de un solo fotón: [Grangier-Roger-Aspect 86], [Grangier-Potasek-Yurke 88], [Tan-Walls-Collett 91], [Hardy 91 a], [Santos 92 a], [Czachor 94], [Home-Agarwal 95].

[14] Tal es la opinión de varios autores, por ejemplo, [Vaidman 95 a], "I believe that its interpretation as a single photon experiment is misleading. (...) In fact, Hardy's work is, essentially, a translation of his other results on nonlocality for two particles without inequalities [Hardy 93]." También [GHZ 95], "Hence we cannot identify a single photon as responsible for each effect, and thus Hardy's description of his effects as nonlocality of a single photon is unjustifiable." [Peres 95 a], "[the origin of the nonlocality] is simply due to the creation of a component $|1\rangle_a|1\rangle_b$ by the detecting process itself."

Primero se necesita una fuente para preparar estados del tipo $q|0\rangle + f|1\rangle$, donde $|0\rangle$ denota el estado de vacío, y $|1\rangle$ el estado de un único fotón (véase la descripción de esa fuente en [Hardy 94]). El estado así preparado entra en el canal *s* del dispositivo de la figura. 5. 7.

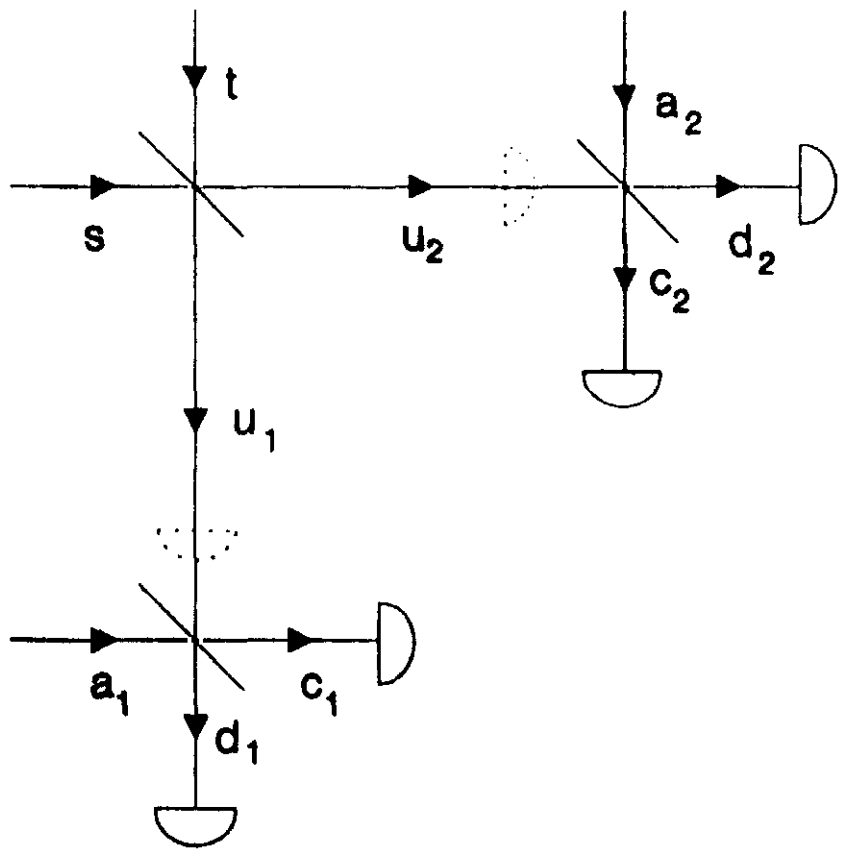


Fig. 5. 7. El estado $q|0\rangle + f|1\rangle$ entra en *s*, el estado $|0\rangle$ entra en *t*, y los estados coherentes $|\alpha_1\rangle$ y $|\alpha_2\rangle$ entran en, respectivamente, a_1 y a_2. Los detectores de los caminos u_1 y u_2 se pueden quitar. Tomado de [Hardy 94].

En el canal *t* entra el estado $|0\rangle$. Así que el estado a la entrada del primer beamsplitter es $(q|0\rangle_s + r|1\rangle_s)|0\rangle_t$. El dispositivo consta de tres beamsplitters de transmitividad 1/2 que efectúan la siguiente operación (*a* y *b* son los canales de entrada, y *c* y *d* los de salida)

$$|0\rangle_a|0\rangle_b \rightarrow |0\rangle_c|0\rangle_d, \tag{5. 66}$$

$$|0\rangle_a|1\rangle_b \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_c|1\rangle_d + i|1\rangle_c|0\rangle_d), \tag{5. 67}$$

$$|1\rangle_a|0\rangle_b \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}|0\rangle_c|1\rangle_d + |1\rangle_c|0\rangle_d), \tag{5. 68}$$

Cada uno de los canales de salida u_1, u_2 del primer beamsplitter incide sobre un nuevo beamsplitter donde se mezclan respectivamente con los estados coherentes $|\alpha_1\rangle_{a_1}$ y $|\alpha_2\rangle_{a_2}$ [15] que entran respectivamente por los canales a_1 y a_2.

Vamos a considerar cuatro experimentos:

(i) Con los detectores U_1 (en el camino u_1) y U_2 (en el camino u_2).

(ii) Sin U_1 (es decir, con C_1 y D_1) y con U_2.

(iii) Con U_1 pero sin U_2 (es decir, con C_2 y D_2).

(iv) Sin U_1 ni U_2.

En un experimento de tipo (i), como a la salida del primer beamsplitter el estado es

$$|\psi_1\rangle = q|0\rangle_{u_1}|0\rangle_{u_2} + \frac{\mathrm{i}r}{\sqrt{2}}|1\rangle_{u_1}|0\rangle_{u_2} + \frac{r}{\sqrt{2}}|0\rangle_{u_1}|1\rangle_{u_2}, \tag{5. 69}$$

tendremos,

$$P_{\psi_1}(U_1 = 1, U_2 = 1) = 0. \tag{5. 70}$$

(Recuérdese que la fuente sólo emite un fotón cada vez).

En un experimento de tipo (ii), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a (véanse los cálculos detallados en [Hardy 95])

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle = N e^{-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2} \Big[& q|0\rangle_{c_1}|0\rangle_{d_1} + \left(\alpha_1 q - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle_{c_1}|0\rangle_{d_1} \\ & + \mathrm{i}\left(\alpha_1 q + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle_{c_1}|1\rangle_{d_1} + |\varphi_2\rangle\Big]|0\rangle_{u_2} + M[\ldots]|1\rangle_{u_2} \end{aligned} \tag{5. 71}$$

donde M y N son constantes, y $|\varphi_2\rangle$ contiene sólo términos con dos o más fotones (como sólo estamos interesados en los casos en que se detecte un sólo fotón, no prestaremos atención a estos términos). Se eligen los parámetros del experimento de manera que

---

[15] $|\alpha_i\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha_i|^2} \sum_n \frac{\alpha_i^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$.

$$\alpha_1 q + \frac{r}{\sqrt{2}} = 0, \tag{5. 72}$$

así en el estado (5. 71)

$$P_{\psi_2}(U_2 = 1 \,|\, C_1 = 0 \;\&\; D_1 = 1) = 1. \tag{5. 73}$$

(Curiosamente, en [Hardy 94] no se detalla el término que he denotado por [...] en (5. 71)).

Análogamente, en un experimento de tipo (iii) el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a un estado $|\psi_3\rangle$ similar a (5. 71). Eligiendo los parámetros del experimento de manera que

$$\mathrm{i}\alpha_2 q + \frac{r}{\sqrt{2}} = 0, \tag{5. 74}$$

el estado $|\psi_3\rangle$ es tal que

$$P_{\psi_3}(U_1 = 1 \,|\, C_2 = 0 \;\&\; D_2 = 1) = 1. \tag{5. 75}$$

En un experimento de tipo (iv), el estado $|\psi_1\rangle$ evoluciona a un estado $|\psi_4\rangle$ (que no escribimos explícitamente), para el que

$$P_{\psi_4}(C_1 = 0 \;\&\; D_1 = 1,\; C_2 = 0 \;\&\; D_2 = 1) = \frac{|r|^4}{16|q|^2} \mathrm{e}^{-(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)}, \tag{5. 76}$$

siendo el miembro de la derecha de (5. 76) distinto de cero si q y r también lo son. De nuevo, (5. 70), (5. 73), (5. 75) y (5. 76) permiten desarrollar un argumento de tipo Hardy.

5. 3. 5. Dos átomos en interacción con cavidades (Freyberger, 1995)

[Freyberger 95] propone otra implementación física del argumento de Hardy. Su dispositivo, que se ilustra en la figura 5. 8, consta de dos cavidades de microondas C_1 y C_2, cuyos campos, inicialmente en el estado de vacío, se correlacionan haciendo pasar un átomo de dos niveles en un estado inicial superposición de su estado de mínima energía $|g\rangle$ y de su estado excitado $|e\rangle$. La preparación se completa cuando D, que es un detector de ionización, detecta el estado $|g\rangle$.

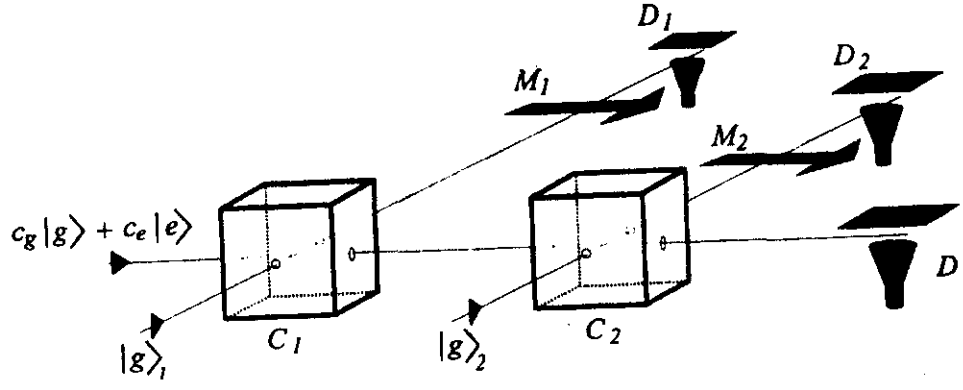


Fig. 5. 8. Esquema del dispositivo de Freyberger. Las C_i (con $i=1, 2$) son cavidades de microondas, D, D_i son detectores de ionización, las M_i son campos de microondas. Tomado de [Freyberger 95].

El segundo paso consiste en mandar un átomo (de dos niveles) 1 en su estado de mínima energía $|g\rangle_1$ a través de la cavidad C_1, y otro átomo (de dos niveles) 2 en su estado de mínima energía $|g\rangle_2$ a través de la cavidad C_2. El estado de los dos átomos a la salida de las cavidades es de la forma

$$|\psi\rangle = c_1|g\rangle_1|g\rangle_2 + c_2|e\rangle_1|g\rangle_2 + c_3|g\rangle_1|e\rangle_2, \qquad (5.\ 77)$$

donde los coeficientes c_i dependen de los parámetros específicos del experimento (véanse los detalles en [Freyberger 95]) y se pueden ajustar de manera que $c_1 c_2 c_3 \neq 0$.

A la salida de las cavidades hay sendos campos de microondas clásicos M_i seguidos de sendos detectores de ionización D_i. La combinación de M_i y D_i permite analizar

cualquier superposición arbitraria de $|g\rangle_i$ y $|e\rangle_i$ del átomo i [Davidovich-Maali-Brune-Raimond-Haroche 93], [Davidovich-Zagury-Brune-Raimond-Haroche 94].

En particular, permite hacer los siguientes experimentos:

(i) Medir los observables E_1 y E_2, siendo

$$E_1 = |e\rangle_{1\,1}\langle e|, \qquad E_2 = |e\rangle_{2\,2}\langle e|. \qquad \text{(5. 78 a), (5. 78 b)}$$

(ii) Medir E_2 y el observable S_1 definido como

$$S_1 = (1+|c_1/c_2|^2)^{-1}\left(|g\rangle_1 - \frac{c_1^*}{c_2^*}|e\rangle_1\right)\left({}_1\langle g| - \frac{c_1}{c_2}{}_1\langle e|\right). \qquad \text{(5. 79)}$$

(ii) Medir E_1 y el observable S_2 definido como

$$S_2 = (1+|c_1/c_3|^2)^{-1}\left(|g\rangle_2 - \frac{c_1^*}{c_3^*}|e\rangle_2\right)\left({}_2\langle g| - \frac{c_1}{c_3}{}_2\langle e|\right). \qquad \text{(5. 80)}$$

(iv) Medir S_1 y S_2.

En el estado (5. 77)

$$P_\psi(E_1=1, E_2=1) = 0, \qquad \text{(5. 81)}$$

$$P_\psi(E_2=1 | S_1=1) = 1, \qquad \text{(5. 82)}$$

$$P_\psi(E_1=1 | S_2=1) = 1, \qquad \text{(5. 83)}$$

$$P_\psi(S_1=1, S_2=1) = \frac{|c_1 c_2 c_3|^2}{(|c_1|^2+|c_2|^2)(|c_1|^2+|c_3|^2)}. \qquad \text{(5. 84)}$$

Estas cuatro condiciones permiten, de nuevo, hacer un argumento de Hardy. La probabilidad (5. 84) tomaría el valor máximo, $P_\psi(S_1=1, S_2=1) = 0.09$ (el mismo máximo, relacionado con la razón áurea, calculado en la Sec. 3. 4. 4. c), si $|c_1|^2 = (\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+3)$ y $|c_2|^2 = |c_3|^2 = 2/(\sqrt{5}+3)$. El autor de la propuesta afirma que con los parámetros reales del experimento ideal que propone no se puede obtener ese máximo estricto (en particular porque no se puede ajustar la relación $|c_2|^2 = |c_3|^2$) aunque sí valores muy próximos a ese máximo, $P_\psi(S_1=1, S_2=1) = 0.089$, y añade, p. 3350, que "In any case it will be difficult experimentally to distinguish an event with a probability of 9% from any kind of noise in the measurement process."

5. 4. Experimentos reales

5. 4. 1. El experimento de TBMM (1995)

El primer experimento real basado en el argumento de Hardy es el realizado por Torgerson, Branning, Monken y Mandel (TBMM en adelante) [TBMM 95] (previamente propuesto por Torgerson, Branning y Mandel (TBM) en [TBM 95]).

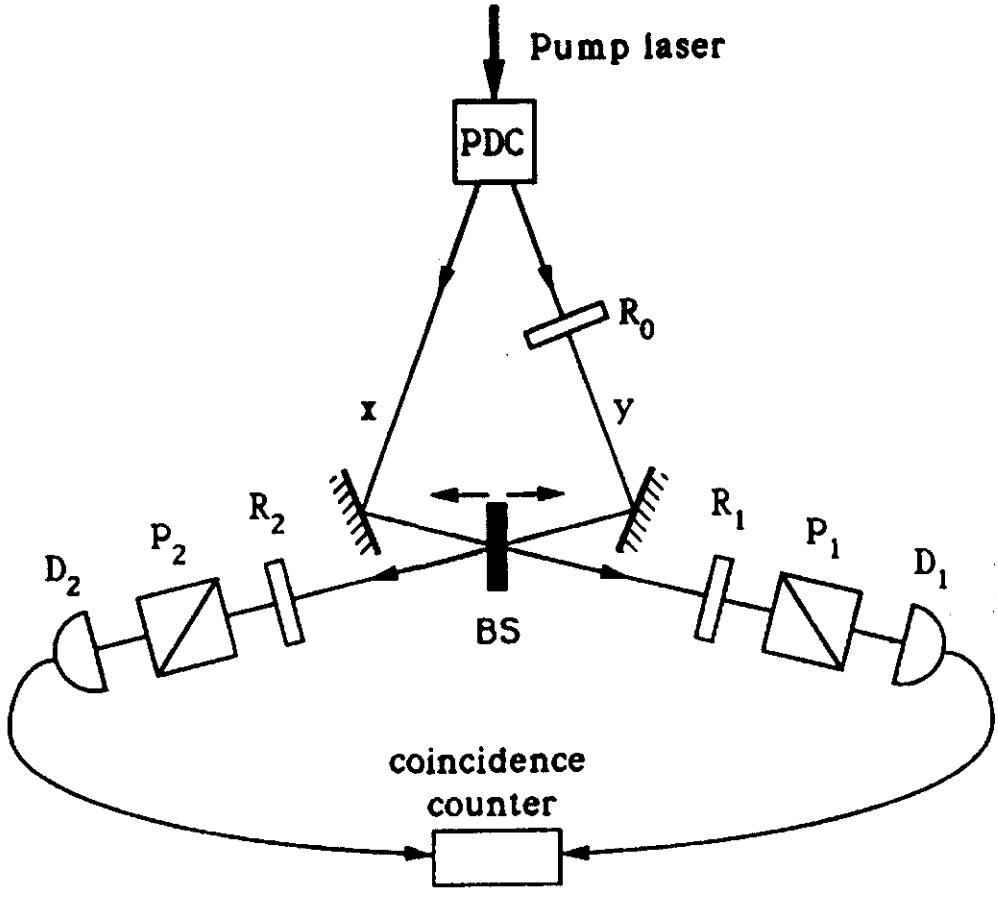


Fig. 5. 9. Tomado de [TBMM 95]. Ver también [TBM 95].

El experimento, cuyo esquema se muestra en la figura. 5. 9, es el siguiente. Dos fotones, que llamaremos señal (S) y testigo (T), son emitidos simultáneamente y con la misma polarización lineal por un cristal no-lineal en un proceso de parametric down conversion (PDC). En el camino de T se inserta un rotador de $\pi/2$, R_0, de manera que produce una polarización ortogonal a la del camino S. Se toma como eje x la dirección de polarización de S y como eje y la dirección de polarización de T tras el rotador. Los

fotones así polarizados atraviesan un beamsplitter BS cada uno en un sentido y con incidencias (respecto al BS) próximas a la normal, y emergen mezclados en dos direcciones que llamaremos 1 y 2. Si las longitudes de los dos caminos ópticos hasta el BS son iguales, el estado cuántico del par de fotones a la salida del BS es [Ou-Hong-Mandel 87]

$$|\psi\rangle = T_x T_y' |1\rangle_{1x} |1\rangle_{2y} + R_x R_y' |1\rangle_{1y} |1\rangle_{2x} + T_x R_y' |1\rangle_{1x} |1\rangle_{1y} + R_x T_y' |1\rangle_{2x} |1\rangle_{2y}. \quad (5.\ 85)$$

donde T_x, T_y, R_x, R_y son los coeficientes de transmitividad y reflectividad en las direcciones x e y de una de las caras del BS, y T_x', T_y', R_x', R_y' los de la otra. $|1\rangle_{1x}|1\rangle_{2y}$ denota el estado en el que hay un fotón polarizado según x en la dirección 1 y otro fotón polarizado según y en la dirección 2, la notación es análoga para los otros tres estados. Dado que la incidencia con el BS es próxima a la normal, podemos suponer $T_x = T_y := T$, $R_x = R_y := R$, $T_x' = T_y' := T'$, $R_x' = R_y' := R'$. También se supone $|T'| = |T|$, $|R'| = |R|$. El estado (5. 85) así preparado es, como vamos a ver, un estado de Hardy.

Se coloca en cada una de las direcciones, una lámina de media onda (que se puede rotar) R_j, seguida de un polarizador lineal (que permanece fijo durante el experimento) P_j, y un detector D_j. Ambos detectores están conectados a un contador de coincidencias. Tras la preparación del estado (5. 85) y, supuestamente en dos regiones (1 y 2) separadas por un intervalo de género-espacio (lo que seguramente no ocurre en el experimento real de TBMM), se procede a detectar los fotones que llegan con una u otra polarización (θ_1 o, alternativamente, θ_{10} para la región 1, y θ_2 o, alternativamente, θ_{20} para la región 2).

Se puede comprobar que, suponiendo un BS ideal, sin absorción, es decir que $|T|^2 + |R|^2 = 1$, y tal que $|T| \neq |R|$ existen ángulos de polarización θ_1, θ_2, θ_{10}, θ_{20} tales que se satisfacen las cuatro condiciones de Hardy:

$$P_\psi(\theta_{20} | \theta_1) = 1, \quad (5.\ 86)$$

$$P_\psi(\theta_{10} | \theta_2) = 1, \quad (5.\ 87)$$

$$P_\psi(\theta_{10}, \theta_{20}) = 0, \quad (5.\ 88)$$

$$P_\psi(\theta_1, \theta_2) > 0. \quad (5.\ 89)$$

Si suponemos que la probabilidad de detección por un detector perfecto colocado inmediatamente detrás de un polarizador perfecto orientado en un ángulo θ_j cumple la condición de completitud

$$P_{\psi}(\theta_j)+P_{\psi}(\bar{\theta}_j)=1, \tag{5. 90}$$

siendo $\bar{\theta}_j=\theta_j+\pi/2$, entonces podemos reescribir las condiciones (5. 86) y (5. 87) como

$$P_{\psi}(\theta_1, \bar{\theta}_{20})=0, \tag{5. 91}$$

$$P_{\psi}(\bar{\theta}_{10}, \theta_2)=0. \tag{5. 92}$$

El experimento de TBMM consiste en, tras la preparación descrita antes, medir $N(\theta_1, \bar{\theta}_{20})$, $N(\bar{\theta}_{10}, \theta_2)$, $N(\theta_{10}, \theta_{20})$, $N(\theta_1, \theta_2)$; donde $N(\theta_1, \theta_2)$ es el número de coincidencias detectadas con esa combinación de polarizaciones durante 10 s con el BS en la posición en la que los caminos ópticos son iguales[16]. En particular, se eligen los ángulos de polarización de manera que la probabilidad (5. 89) sea cercana a la máxima obtenible en un experimento de este tipo. Un cálculo [TBM 95], parecido al que ya se realizó para el caso de direcciones de espín para dos partículas de espín 1/2, conduce a que el valor máximo se obtiene con

$$|T|^2 \approx 0.32, \qquad |R|^2 \approx 0.68, \tag{5. 93}$$

$$\theta_1 \approx 18^{\circ}, \quad \theta_2 \approx 72^{\circ}, \quad \theta_{10} \approx -56^{\circ}, \quad \theta_{20} \approx -34^{\circ}, \tag{5. 94}$$

siendo en ese caso

$$P_{\psi}(\theta_1, \theta_2) \approx 0.09. \tag{5. 95}$$

En el experimento real $|T|^2 \approx 0.70$, $|R|^2 \approx 0.30$, $\theta_1 \approx 74.3^{\circ}$, $\theta_2 \approx 15.7^{\circ}$, $\theta_{10} \approx -56.8^{\circ}$, $\theta_{20} \approx -33.2^{\circ}$.

Para relacionar las cantidades medidas $N(\theta_1, \theta_2)$ con las probabilidades $P_{\psi}(\theta_1, \theta_2)$, los autores hacen la hipótesis de fair sampling según la cual la muestra detectada en un experimento con polarizadores y detectores reales es una muestra no sesgada respecto a la que se obtendría con polarizadores y detectores perfectos[17]. Con

---

[16] Para asegurar que los caminos ópticos hasta el BS son iguales, el BS es móvil y se miden $N(\theta_1, \bar{\theta}_{20})$, $N(\bar{\theta}_{10}, \theta_2)$, $N(\theta_{10}, \theta_{20})$, $N(\theta_1, \theta_2)$ para distintos desplazamientos del BS. Para los cálculos posteriores se toman los mínimos experimentales de estas cantidades.

[17] Hacer la hipótesis de fair sampling implica suponer que (a) las pérdidas de fotones por absorción en los polarizadores y (b) la eficiencia de los detectores, son independientes de la polarización de los fotones. Como ya se ha dicho, en el experimento de TBMM se rotan las láminas de media onda en lugar de los polarizadores para asegurar que los detectores reciben siempre fotones con la misma polarización, con lo cual ya no es necesario suponer (b), pero sí (a).

esa hipótesis, la probabilidad de detección para una cierta combinación de polarizaciones es proporcional al número de coincidencias detectadas con esa combinación de polarizaciones,

$$P_{\psi}(\theta_1, \theta_2) = N(\theta_1, \theta_2)/K. \tag{5. 96}$$

TBMM definen la constante de proporcionalidad como

$$K = N(\theta_1, \theta_2) + N(\theta_1, \bar{\theta}_2) + N(\bar{\theta}_1, \theta_2) + N(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2). \tag{5. 97}$$

En el experimento obtienen los siguientes resultados

$$P_{\psi}(\theta_1, \bar{\theta}_{20}) = 0.0034 \pm 0.0004, \tag{5. 98}$$

$$P_{\psi}(\bar{\theta}_{10}, \theta_2) = 0.0040 \pm 0.0004, \tag{5. 99}$$

$$P_{\psi}(\theta_{10}, \theta_{20}) = 0.0070 \pm 0.0005, \tag{5. 100}$$

$$P_{\psi}(\theta_1, \theta_2) = 0.099 \pm 0.002. \tag{5. 101}$$

Nótese que en particular que no se obtienen ceros en (5. 98)-(5. 100). Los autores, sin embargo, afirman que estos resultados contradicen el realismo local ya que, de (5. 101), (5. 98) y (5. 99), y suponiendo (5. 90)[18],

$$P_{\psi}(\theta_1, \theta_2) P_{\psi}(\theta_{20} | \theta_1) P_{\psi}(\theta_{10} | \theta_2) = 0.095 \pm 0.002, \tag{5. 102}$$

frente a (5. 100). Lo que les lleva a concluir, p. 328, que "The data therefore contradict local realism by about 45 standard deviations, even though the three measured probabilities $P_{\psi}(\theta_1, \bar{\theta}_{20})$, $P_{\psi}(\bar{\theta}_{10}, \theta_2)$, $P_{\psi}(\theta_{10}, \theta_{20})$ are not exactly zero."

---

[18] Por ejemplo,

$$P_{\psi}(\theta_{20} | \theta_1) = 1 - P_{\psi}(\theta_1, \bar{\theta}_{20})/P_{\psi}(\theta_1), \tag{5. a}$$

siendo

$$\begin{aligned} P_{\psi}(\theta_1) &= [N(\theta_1, \theta_{20}) + N(\theta_1, \bar{\theta}_{20})]/K \\ &= 0.220 \pm 0.003 \end{aligned} \tag{5. b}$$

5. 4. 2. Crítica a TBMM

Emilio Santos[19] ha señalado que los lados izquierdos de (5. 100) y (5. 102) no son matemáticamente equivalentes, ya que

$$P_\psi(\theta_{10}, \theta_{20}) = P_\psi(\theta_1, \theta_2) P_\psi(\theta_{20} | \theta_1, \theta_2) P_\psi(\theta_{10} | \theta_1, \theta_2), \qquad (5.\ 103)$$

expresión en la que las dos probabilidades de la derecha no tienen una interpretación física clara debido a que las polarizaciones θ_j y θ_{j0} no son medibles simultáneamente.

Por tanto, aduce Santos, la comparación entre (5. 100) y (5. 102) no es legítima a la hora de excluir la familia más general de teorías de variables ocultas locales[20].

Por otro lado, la tabla 1 en [TBMM 95], que contiene todos los resultados de las medidas realizadas, se reproduce si la probabilidad conjunta de, supuesto un fotón en cada brazo del dispositivo de TBMM, el fotón en el brazo 1 sea detectado con el polarizador orientado según un ángulo θ_1 y el fotón en el brazo 2 sea detectado con el polarizador orientado según un ángulo $\bar{\theta}_2 = \theta_2 + \pi/2$, es de la forma

$$P_{12}(\theta_1, \bar{\theta}_2) = N \left| \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \frac{|R|^2}{|T|^2} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \right|^2 . \qquad (5.\ 104)$$

Un modelo de LHV debe de poder expresar esta probabilidad conjunta como

$$P_{12}(\theta_1, \bar{\theta}_2) = \int P_1(\theta_1, \lambda) P_2(\bar{\theta}_2, \lambda) \rho(\lambda) \mathrm{d}\lambda , \qquad (5.\ 105)$$

donde λ denota colectivamente a las variables ocultas, $\rho(\lambda)$ es la distribución de probabilidad de esas variables ocultas (por tanto, $\rho(\lambda)$ debe de verificar $\rho(\lambda) \geq 0$ y $\int \rho(\lambda) \mathrm{d}\lambda = 1$), $P_1(\theta_1, \lambda)$ es la probabilidad de que el fotón en el brazo 1 sea detectado con el polarizador orientado en θ_1, y análogamente $P_2(\bar{\theta}_2, \lambda)$ (por tanto, $0 \leq P_1(\theta_1, \lambda), P_2(\bar{\theta}_2, \lambda) \leq 1$).

Un modelo de variables ocultas locales que reproduce los resultados de TBMM es el de [Cabello-Santos 96]; en dicho modelo, las variables ocultas son dos vectores unitarios, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, y se define

---

[19] Comunicación particular del 11 de octubre de 1995.

[20] En su respuesta a [Cabello-Santos 96], [TBMM 96] muestran cómo en una teoría de variables ocultas determinista el lado izquierdo de (5. 100) ha de ser *mayor o igual* que el lado izquierdo de (5. 102).

$$\rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{(4\pi)^2}(\mathbf{u}_1 \cdot \Re\mathbf{u}_2)^2\,\mathrm{d}^2\mathbf{u}_1\,\mathrm{d}^2\mathbf{u}_2, \tag{5. 106}$$

donde $\Re$ denota una rotación de ángulo φ en el plano x-y y

$$\cos\varphi = |R|^2 / |T|^2, \tag{5. 107}$$

siendo R y T los coeficientes de reflectividad y transmitividad del beamsplitter. En la definición (5. 107) hemos supuesto $|R| < |T|$, como ocurre en [TBMM 95]; si no sucediese así, los cambios $\theta_j \to \pi/2 - \theta_j$ ($j = 1, 2$), $|R| \leftrightarrow |T|$, conducirían a un modelo adecuado. También definimos

$$P_1(\theta_1, \mathbf{u}_1) = C\pi\varepsilon\, f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{r}_1), \tag{5. 108}$$

$$P_2(\bar{\theta}_2, \mathbf{u}_2) = C\pi\varepsilon\, f(\mathbf{u}_2 - \mathbf{r}_2), \tag{5. 109}$$

donde $0 < C \leq 1$, $0 < \varepsilon << 1$,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\pi\varepsilon)^{-1} & \text{if} \quad |\mathbf{x}|^2 \leq \varepsilon \\ 0 & \text{if} \quad |\mathbf{x}|^2 > \varepsilon \end{cases} \tag{5. 110}$$

y

$$\mathbf{r}_1 = (\sin\theta_1,\, 0,\, \cos\theta_1), \tag{5. 111 a}$$

$$\mathbf{r}_2 = (\sin\theta_2,\, 0,\, \cos\theta_2). \tag{5. 111 b}$$

Con las definiciones anteriores, utilizando la expresión (5. 105), se obtiene

$$P_{12} = \frac{3}{16} C^2\varepsilon^2(\mathbf{r}_1 \cdot \Re\mathbf{r}_2)^2 + o(\varepsilon^3), \tag{5. 112}$$

que está de acuerdo con (5. 104) excepto para términos de orden ε^3. Los resultados de la tabla 1 en [TBMM 95] se pueden reproducir si ε es menor que el error en las medidas. Por tanto, aunque el modelo de [Cabello-Santos 96] resulte ad-hoc, demuestra que los resultados experimentales de TBMM no bastan para excluir las variables ocultas locales, en contra de la afirmación de dichos autores[21]. Otra aproximación crítica el experimento de TBMM se comentará en la Sec. 5. 5. 3.

[21] En su respuesta a [Cabello-Santos 96], [TBMM 96] dicen: "We readily concede that there exist more general local hidden variable theories, which are not tested or addressed in our experiment."

5. 5. Demostraciones algebraicas y desigualdades

5. 5. 1. Introducción

La principal conclusión tras la sección anterior es que en un experimento real no cabe esperar que se produzcan correlaciones perfectas; en particular, es experimentalmente imposible obtener los ceros necesarios para que los argumentos de GHZ y Hardy permitan descartar las variables ocultas en experimentos de un solo disparo[22]. Como dice Alain Aspect (ver más adelante), los experimentos reales no permiten comprobar igualdades sino sólo desigualdades. Por esta razón, para llevar los argumentos algebraicos al plano experimental es necesario derivar desigualdades. Cualquier intento, como el de TBMM, de comparar directamente los datos experimentales con los resultados teóricos de un argumento algebraico siempre será objetable.

En este sentido, los argumentos algebraicos han estimulado nuevas desigualdades. En lo que sigue, resumiremos los resultados más importantes (de otros autores) al respecto. Además de su posible interés para futuros experimentos, algunos de estos trabajos permiten ahondar en la relación entre las demostraciones del teorema de Bell-EPR con y sin desigualdades. Clasificaremos los trabajos en dos grupos: en la Sec. 5. 5. 2 veremos aquellos que han surgido como consecuencia, más o menos directa, del argumento de GHZ: trabajos que esencialmente son derivaciones de desigualdades para más de dos partículas y estudios comparativos sobre su interés experimental; y en la Sec. 5. 5. 3 veremos reflexiones sobre la idoneidad de los estados de Hardy para test experimentales; en este grupo comentaremos un trabajo, [Garuccio 95 b], que es otro acercamiento crítico distinto al experimento de TBMM.

5. 5. 2. Desigualdades y la demostración de GHZ

La dificultad de traducir las demostraciones algebraicas a experimentos reales, y por tanto la necesidad de derivar desigualdades, fue ya advertida en muchos de los primeros trabajos sobre aquellas. Así, en [GHSZ 90], Sec. V, se deriva una desigualdad para

---

[22] Tal idea podría parecer sugerida por la siguiente frase, [Mermin 90 c], p. 1838: "The refutation [in the GHZ experiment] is not only stronger—it is no longer statistical and can be accomplished in a single run." Más adelante, sin embargo, dice: "This all versus nothing demolition of EPR follows directly from a simple quantum-mechanical calculation of the data produced in the new experiment. The same point cannot, however, be inferred directly from the actual data collected in some nonideal laboratory realization of the GHZ experiment, because, the less than perfect efficiency of real detectors weakens the observed spin correlations from the strong ideal form on which the EPR argument relies."

cuatro partículas a partir del correspondiente argumento de GHZ. Sin embargo, sus autores reconocen que para esta desigualdad, p. 1138, "the demand on detector efficiency if the fair sampling assumption is to be avoided [$\eta > 0.908$] (...) is more stringent than in tests of Bell's inequality [$\eta > 0.828$, ver las referencias de la nota 27 del capítulo 3]." También [Clifton-Redhead-Butterfield 91 a] derivan, p. 175 y siguientes, "a nonstrictly correlated [testable "quasi-algebraic"] version of [GHZ] algebraic nonlocality proof": un sistema de cinco desigualdades que son mutuamente inconsistentes; el adjetivo "quasi-algebraic" se justifica porque "the contradiction arises not between Einstenian elements of reality but between probabilities for measurement results", p. 178.

[Mermin 90 c], deriva una desigualdad para n partículas ($n \geq 3$) de espín 1/2 en estados de GHZ del tipo

$$|\mu\rangle = (|+ + \ldots +\rangle - |- - \ldots -\rangle)/\sqrt{2}, \qquad (5.\ 113)$$

desigualdad que es violada por la MC en un factor $2^{(n-1)/2}$ para n impar y en un factor $2^{(n-2)/2}$ para n par. También Mermin reconoce que, p. 1838, "Because these experiments require the use of n independent detectors, whose joint efficiency necessarily declines exponentially in n, this does not establish that the n-particle GHZ states (which are also more and more difficult to prepare with increasing n) are necessarily a promising arena in which to eliminate such loopholes as remain in the direct experimental demonstration of quantum nonlocality". [Mermin 90 c] da lugar a toda una serie de artículos. Por ejemplo, [Roy-Singh 91] derivan unas desigualdades para n partículas que son violadas por la MC en un factor $2^{(n-1)/2}$: "The improvement with respect to Mermin [Mermin 90 c] is by a factor $\sqrt{2}$ for even-n experiments. It results from our inequalities involving a continuum of apparatus parameters. The largest violation is not always in the GHZ state used by Mermin", p. 2761, esto último también se comprueba en [Braunstein-Mann-Revzen 92], p. 3261.

Una propuesta en la misma linea es la de [Ardehali 92] que pasamos a comentar. Se considera el estado de GHZ de n partículas de espín 1/2 dado por (5. 113); cuando las partículas están mutuamente separadas por intervalos de género-espacio se hace una medición del espín de cada una de las partículas 1, 2, ..., $n-1$, según el vector $\mathbf{i}$ o, alternativamente, según el vector $\mathbf{j}$ y una medición del espín de la partícula n según el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ o, alternativamente, según el vector $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Consideremos el operador

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2, \qquad (5.\ 114)$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 = (&-\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}\hat{\sigma}_x^{(3)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} + \hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\hat{\sigma}_x^{(3)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} + \ldots \\ &-\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\hat{\sigma}_y^{(3)}\hat{\sigma}_y^{(4)}\hat{\sigma}_x^{(5)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} - \ldots \\ &+\hat{\sigma}_y^{(1)}\ldots\ \hat{\sigma}_y^{(6)}\hat{\sigma}_x^{(7)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} + \ldots\ -\ldots)(\hat{\sigma}_a^{(n)} - \hat{\sigma}_b^{(n)})\end{aligned} \tag{5. 115}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_2 = (&\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} + \ldots\ -\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\hat{\sigma}_y^{(3)}\hat{\sigma}_x^{(4)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} - \ldots \\ &+\hat{\sigma}_y^{(1)}\ldots\ \hat{\sigma}_y^{(5)}\hat{\sigma}_x^{(6)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} + \ldots \\ &-\hat{\sigma}_y^{(1)}\ldots\ \hat{\sigma}_y^{(7)}\hat{\sigma}_x^{(8)}\ldots\ \hat{\sigma}_x^{(n-1)} - \ldots\ +\ldots)(\hat{\sigma}_a^{(n)} + \hat{\sigma}_b^{(n)})\end{aligned} \tag{5. 116}$$

Llamemos F al valor esperado del observable A en una teoría de variables ocultas locales; siguiendo los cálculos de [Ardehali 92] se llega a que

$$F \leq \begin{cases} 2^{n/2}, \text{ si } n \text{ es par} \\ 2^{(n+1)/2}, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{5. 117}$$

Sin embargo, según la MC,

$$\langle A \rangle_\mu = \langle \mu | \hat{A} | \mu \rangle = 2^{n-(1/2)}. \tag{5. 118}$$

Por tanto, la MC viola la desigualdad (5. 117) en un factor $2^{(n-1)/2}$ para n par (frente a $2^{(n-2)/2}$ en [Mermin 90 c]) y en un factor $2^{(n-2)/2}$ para n impar (frente a $2^{(n-1)/2}$ en [Mermin 90 c]).

Por último, [Braunstein-Mann 93] calculan, p. R2427, "... the signal-to-noise ratio in Mermin's n-particle Bell inequality [Mermin 90 c] (...) in the presence of three kinds of noise: (i) noise from variations in the quantum state used as source for the correlations; (ii) noise from data-flipping error—the readout randomly flipping the sign of the spin polarization; and (iii) noise from counting statistics due to measuring only a finite number of n-particle coincidences." Llegan a la conclusión, p. R2430, de que "the signal for violation grows exponentially faster than the exponentially growing noise, as long as the noise *per detector* or *per particle* is less than about 14%" y que, alternativamente, "in the absence of noise a loophole-free test could be made with detector efficiencies as low as 71%."

[Hardy 91 a] (Sec. 2) deriva una generalización de las desigualdades de CHSH para n partículas, y (Sec. 3) comprueba que el estado de GHZ-Mermin da la máxima violación posible de esas desigualdades en el caso $n = 3$. En este trabajo, p. 1, se dice que las "inequalities are still of interest for two reasons: (i) to elucidate the relationship between the GHZ proof of nonlocality and the proof of nonlocality using Bell

inequalities; (ii) the perfect correlations considered in gedankenexperiments are not possible in real experiments. Therefore, inequalities would be necessary if an experimental demonstration of nonlocality in the schemes involving more than two measurements is to be possible." En un trabajo posterior, [Hardy 91 b], usa un método nuevo para derivar una desigualdad de Bell de tipo general para dos partículas (Secs. 2 y 3), método que también aplica para derivar las desigualdades de CHSH (Sec. 4). Este procedimiento ("By requiring of any local realistic theory that the probability of a contradiction of the type considered by Greenberger, Horne, Zeilinger, and Mermin is equal to zero", p. 21) supone un acercamiento original para comprender la relación entre las demostraciones algebraicas (para sistemas individuales) y las demostraciones (estadísticas) con desigualdades. Otras desigualdades para $n \geq 4$ partículas, derivadas sin referencia alguna a GHZ, pueden encontrarse en [Suppes-Zanotti 91].

En [Hnilo 93, 94] se analiza la conveniencia de usar estados de GHZ de n partículas, en comparación con los experimentos, como el de Aspect, con dos partículas. Su conclusión es, p. 139, que "an Orsay-like experiment [Aspect] is preferable, even for highly idealized conditions and even if the difficulty of preparation of a GHZ state with a larger number of particles is not taken to account. The situation may be different for the case $n = 4$ if a proposed theorem [the identity between *optimal* hidden variable theories and *matrix* hidden variable theories for $n = 4$] is demonstrated true."

En [Greenberger 95] se estudian las diferencias que hay que considerar a la hora de derivar desigualdades entre los casos de dos partículas (en el estado singlete) y tres partículas (en el estado de GHZ).

Invitamos al lector a consultar las referencias originales.

5. 5. 3. Desigualdades y la demostración de Hardy

En [Hardy 92 b] (tras el análisis del experimento ideal con interferómetros ópticos solapados considerado en la Sec. 5. 3. 2) se derivan dos desigualdades que *si se satisfacen* mostrarían una contradicción con el realismo local; estas dos desigualdades se pueden reescribir en forma de una desigualdad que se viola si el realismo local se viola (como las desigualdades de Bell usuales). Hardy termina la discusión diciendo, p. 22, que sus desigualdades "could be tested in a real experiment. From estimates based on the results of the Hong, Ou and Mandel experiment [Hong-Ou-Mandel 87] and also the experiment of Grangier, Roger and Aspect [Grangier-Roger-Aspect 86], it would appear that such an experiment may be possible with present technology."

Por otro lado, se ha hecho notar en varias referencias, [Hardy 94], [Mermin 94 a, b, 95], por ejemplo en [Mermin 94 a], p. 11, que "The semi-EPR argument in the Hardy state (...) is merely an example of a violation—and not a very strong one—of an inequality that, though very plausible even in the absence of perfect correlations, has already been reported to be violated in many earlier experiments: [la desigualdad de CH]." En efecto, es inmediato comprobar que las desigualdades de CH (3. 25) se puedan escribir como:

$$\begin{aligned} -1 \le P_\eta(\sigma_a^{(1)} = +1, \sigma_b^{(2)} = +1) - P_\eta(\sigma_a^{(1)} = +1, \sigma_B^{(2)} = +1) \\ - P_\eta(\sigma_A^{(1)} = +1, \sigma_b^{(2)} = +1) - P_\eta(\sigma_A^{(1)} = -1, \sigma_B^{(2)} = -1) \le 0 \end{aligned} \qquad (5.\ 119)$$

donde las cuatro probabilidades que aparecen son las mismas implicadas en el argumento de Hardy. Si η es un estado de Hardy (esto es, si verifica las ecs. 3. 49-3. 52), la primera probabilidad en (5. 114) puede ser incluso 0.09 (ver la Sec. 3. 4. 4. c) y las otras tres son cero. De manera que, [Mermin 94 a], p. 11: "An experiment to confirm such a violation in the optimal Hardy state will require detectors accurate enough to distinguish a 9% event rate from a rate of 0%. Earlier tests for violations in states inspired by EPR had an easier time of it, using questions that made the [primera] probability $2+\sqrt{2}/2 \approx 0.43$ (43%) and the sum of [las otras tres] probabilities $6-3\sqrt{2}/2 \approx 0.22$ (22%) [los cálculos están equivocados en la versión original]." De lo cual Mermin concluye que "Hardy states will not lead to more definitive experiments." Mermin termina diciendo, "... although Hardy's four questions provide a rather weak basis for a laboratory violation of the experimentally relevant inequality, they reign supreme in the *gedanken* realm." Otro matiz de la misma idea puede encontrarse en la cita siguiente [Mermin 95 a], p. 619: "As Alain Aspect emphasized in a discussion

remark early in this conference[23], beautiful as the Hardy experiment is as a gedankenexperiment, in a real experiment "never" can never be established, if only because the number of runs is necessarily finite."

Por último, comentaremos otro acercamiento crítico al experimento de TBMM ya descrito (Secs. 5. 3. 1-5. 3. 2) debido a Garuccio, [Garuccio 95 b]. Su autor dice, p. 2535: "Unfortunately, these proofs [las de tipo Hardy] are based on an assumption difficult to realize experimentally: the detection of all the pairs emitted by the source. Moreover, an experimental test of the idea requires verification that three expectation values are zero, while a fourth one is nonzero, and this leads to the conceptual problem of the experimental measure of a null event. The first problem can be overcome with some supplementary assumptions, as in all experiments performed up to now in this field, while the latter can be solved by some different formulations of Bell's inequality, as suggested by Mermin [Mermin 95 b] and Hardy [private communication]." A continuación, Garuccio considera, p. 2536, "The most general inequality deduced from Einstein locality in the case of asymmetrical entangled states [como los de Hardy]", que, para él, "is the Eberhard's inequality [Eberhard 93]", y calcula "the minimum value of the quantum efficiency η that permits a violation of the previous inequality without use of any supplementary assumptions". La crítica a [TBMM 95] sigue ahora, ya que con "the values for the quantum-mechanical predictions in the case of the asymmetrical source used in the experiment of Torgerson *et al.* [TBMM 95] for testing Hardy's approach, we obtain $\eta_0 = 0.82$. This value is far from the actual value of detection quantum efficiency in the experiment of Torgerson *et al.* ($\eta_0 \approx 0.10$) and this proves that the experiment is not able to distinguish quantum mechanics and Einstein locality without supplementary assumptions." Más adelante dice: "it is possible to deduce the minimum value η_0 for a loophole-free experiments (...), the required quantum efficiency is between 0.75 and 0.67, which is not far from the efficiency of new commercial photodetectors." Termina su artículo comparando este acercamiento (la desigualdad de Eberhard para estados de Hardy) con las desigualdades de CHSH (más la hipótesis de fair-sampling) y las de CH (más la hipótesis de no-enhancement)[24].

---

[23] Fundamental Problems in Quantum Theory: A Conference Held in Honor of Professor John A. Wheeler, Baltimore, Maryland, June 18-22, 1994. Emilio Santos recuerda haber oído afirmar a Alain Aspect (quizá en esa misma conferencia) que los experimentos reales no permiten comprobar igualdades (como las necesarias para el argumento de Hardy) sino sólo desigualdades.

[24] Garuccio estaba en el laboratorio de la Universidad de Rochester cuando se hizo el experimento de TBMM (TBMM ponen a Garuccio en sus agradecimientos y Garuccio hace lo propio con TBMM) pero no estaba de acuerdo con las conclusiones de TBMM así que no firmó el artículo de TBMM y escribió uno aparte.

Como vemos, hasta la fecha ninguna propuesta basada en argumentos algebraicos ha demostrado ser capaz de mejorar los tests experimentales clásicos (Aspect) sobre variables ocultas. Ello es debido a que la traducción experimental (con desigualdades) de las demostraciones algebraicas: (a) requiere estados más difíciles de preparar y manejar (es más difícil preparar un estado de GHZ de tres o más partículas o un estado de Hardy de dos partículas que un singlete), y (b) no permite eludir las hipótesis adicionales que eran necesarias en los experimentos clásicos (o, para eludirlas, serían necesarias eficiencias en los detectores mayores que las necesarias para eludirlas en los experimentos clásicos). Como dice Mermin, la importancia de los argumentos algebraicos pertenece al reino de lo teórico.

Capítulo 6. Conclusiones

"Había comenzado como un hoja arrastrada por el viento y se había convertido en un árbol. Y el árbol creció, dando numerosas ramas y echando las más fantásticas raíces. Llegaron extraños pájaros que se posaron en las ramitas, y hubo que atenderlos. Después, todo alrededor del árbol y detrás de él, en los espacios que dejaban las hojas y las ramas, comenzó a crecer un paisaje."

J. R. R. Tolkien, *Hoja de Niggle*.

"El 90% de cualquier cosa es basura."

Ley de Sturgeon.

Capítulo 6
Conclusiones

En este capitulo se resumen las respuestas a los problemas planteados en el capítulo 1, que constituyen las aportaciones originales de esta memoria. Por capítulos, son las siguientes:

Capítulo 2. El teorema de Bell-Kochen-Specker:

1ª. Existe una correspondencia entre las diferentes demostraciones aditivas del teorema de BKS: probabilísticas, dependientes del estado, e independientes del estado y, (respectivamente), los conjuntos de proposiciones que se obtienen tras el primer, segundo y tercer paso de la demostración (DPSs, PNCSs y TNCSs) de Kochen y Specker de 1967 [CG 96 a].

2ª. Es posible un test experimental de las hipótesis del teorema de BKS, haciendo pasar sucesivamente una partícula de espín 1 por dos aparatos de Stern-Gerlach según ciertas orientaciones: las variables ocultas (no-contextuales) prohiben ciertos resultados para los que la MC predice una probabilidad no nula [CG 95 b].

3º. Existe una demostración del teorema de BKS físicamente interpretable, independiente del estado, aditiva, basada en descomposiciones espectrales de la identidad en el espacio de Hilbert de dimensión 4, con sólo 18 proposiciones (proyectores sobre subespacios unidimensionales) en un espacio de Hilbert de dimensión 4. Ésta es la demostración con estas características (las de la demostración original de KS) más económica conocida, en términos de número absoluto de proposiciones implicadas [CEG 96 a].

4ª. Considerando demostraciones aditivas basadas en descomposiciones de subespacios del espacio de Hilbert (esto es cambiando levemente las reglas de juego con las que se construyen habitualmente las demostraciones finitas de BKS), se puede reducir el número de proposiciones implicado en la demostración. Damos un ejemplo de una demostración de este tipo con 14 proposiciones [CEG 96 b].

5ª. Es posible construir demostraciones con las características de la de KS en espacios de Hilbert de cualquier dimensión finita mayor o igual que 3. Hemos propuesto dos formas de hacerlo: la primera es una generalización a espacios de Hilbert de dimensión mayor o igual que tres de la demostración de Kochen y Specker en dimensión tres [CG 96 a]; la segunda procede recursivamente a partir de una demostración dada es un espacio de Hilbert de dimensión inferior [CEG 96 c]. Aplicando el segundo procedimiento y buscando con ordenador subconjuntos de los obtenidos que permitan demostraciones de BKS hemos obtenido ejemplos explícitos de demostraciones con 29 direcciones en dimensión 5, 31 direcciones en dimensión 6, 34 en dimensión 7 y 36 en dimensión 8 [CEG 96 c].

6ª. El problema de cuál es la demostración aditiva mínima en cada dimensión es abordable con ayuda de un ordenador. Su solución parece en principio cuestión de tiempo.

7ª. Todas las demostraciones del teorema de BKS consideradas en los puntos anteriores admiten una representación en términos de estados de espín de una única partícula, para los que en principio todas las proposiciones y conjuntos completos de ellas son medibles [CG 96 a].

Capítulo 3. El teorema de Bell-EPR:

1ª. Es posible formular el argumento "de incompletitud" de la MC en términos de elementos de realidad inferidos a partir de medidas efectivamente realizadas (elementos de realidad fuertes). Tal formulación es posible al menos en sistemas que involucren tres o más partes espacialmente separadas [CG 95 a, 96 b, c].

2ª. Las demostraciones algebraicas del teorema de Bell-EPR conocidas (GHZ y Hardy) se pueden reescribir en términos de elementos de realidad inferidos a partir de medidas efectivamente realizadas (elementos de realidad fuertes) [CG 95 a, 96 b, c].

Capítulo 4. Relaciones entre los teoremas de Bell-KS y Bell-EPR:

1ª. Las demostraciones de Peres y GHZ-Mermin se pueden interpretar como demostraciones aditivas dependientes del estado del teorema de BKS en dimensión, respectivamente, 4 (que representa los estados de espín de dos partículas de espín 1/2) y 8 (que representa los estados de espín de tres partículas de espín 1/2).

2ª. Se propone una demostración aditiva con sólo 5 proposiciones del teorema de BKS para el estado singlete de dos partículas de espín 1/2 [CEG 96 b].

3ª. La demostración de Hardy del teorema de Bell-EPR se puede interpretar como una demostración aditiva probabilística del teorema de BKS en dimensión 4 que representa los estados de espín de un sistema de dos partículas de espín 1/2 [CEG 96 a].

4ª. Un requisito suficiente para que una demostración aditiva con proposiciones del teorema de BKS permita también hacer una demostración del teorema de Bell-EPR es que las proposiciones implicadas sean todas locales salvo, a lo sumo, un conjunto de ellas mutuamente conmutativas. Análogamente para que una demostración multiplicativa con observables de tipo general (no necesariamente proposiciones) de BKS permita una demostración de Bell-EPR es que todos los observables sean locales salvo, a lo sumo, un conjunto de ellos con algún estado propio común; preparando el sistema en este estado se obtendrá la correspondiente demostración del teorema de Bell-EPR.

Capítulo 5. Experimentos sobre el teorema de Bell-EPR sin desigualdades:

1ª. El único experimento realizado hasta la fecha implementando una demostración algebraica (la de Hardy), admite un modelo de variables ocultas locales que permite reproducir sus resultados. Las conclusiones de sus autores (exclusión de variables ocultas) no están pues justificadas [CS 96].

2ª. Aunque las demostraciones algebraicas muestren la incompatibilidad teórica entre la MC y las variables ocultas (no-contextuales y locales) en su forma más simple y directa, su realización experimental no ha dado hasta ahora resultados más decisivos que los experimentos tradicionales basados en las desigualdades de Bell.

Bibliografía

"Publico ergo sum."

Lorenzo Abellanas, al comienzo de un curso de doctorado, 1992.

Bibliografía

En la siguiente relación el símbolo delante de una referencia señala que no está completa (falta, por ejemplo, el número de la revista). El símbolo @ quiere decir que se ha encontrado citada, pero no se ha tenido acceso al original.

El origen de cada referencia, cuando no ha sido la Hemeroteca de la Facultad de Ciencias Físicas o la Biblioteca de los Departamentos de Física Teórica I y II de la Universidad Complutense de Madrid, se indica al final de la misma con un superíndice, de acuerdo a la siguiente clave:

[a] Biblioteca particular del autor.
[b] C. I. N. D. O. C. (Centro de Investigación y Documentación Científica), Madrid.
[c] C. S. I. C., Biblioteca Central, Madrid.
[d] Departamento de Física de la Universidad de Oviedo.
[e] Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Sevilla.
[f] Departamento de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid.
[g] Emilio Santos, Departamento de Física Moderna, Univ. de Cantabria, Santander.
[h] Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, Santander.
[i] Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid.
[j] Facultad de Filosofía, Universidad Complutense, Madrid.
[k] Facultat de Física, Universitat de Barcelona.
[l] Guillermo García Alcaine, Dep. de Física Teórica I, Univ. Complutense, Madrid.
[m] Instituto de Filosofía, C. S. I. C., Madrid.
[n] Instituto de Matemáticas y Física Fundamental, C. S. I. C., Madrid.
[ñ] Instituto de Química Física "Rocasolano", C. S. I. C., Madrid.
[o] Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

1. **[Albert-Aharonov-D'Amato 85]**: D. Z. Albert, Y. Aharonov, & S. D'Amato, "Curious new statistical prediction of quantum mechanics", *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1, 5-7 (1985). Ver **[Bub-Brown 86]**, **[Albert-Aharonov-D'Amato 86]**.

2. **[Albert-Aharonov-D'Amato 86]**: D. Z. Albert, Y. Aharonov, & S. D'Amato, "Comment on 'Curious properties of quantum ensembles which have been both preselected and post-selected'", *Phys. Rev. Lett.* **56**, 22, 2427 (1986). Comment a **[Bub-Brown 86]**. Ver **[Albert-Aharonov-D'Amato 85]**.

3. **[Albert-Loewer 91]**: D. Albert, & B. Loewer, "Wanted dead or alive: Two attempts to solve Schrödinger's paradox", en A. Fine, M. Forbes, & L. Wessels (eds.), *Proceedings of the 1990 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, East Lansing, Michigan, 1991, Vol. 1, pp. 277-285 (j). Ver **[Ruetsche 95]**.

4. **[Albertson 61]**: J. Albertson, "Von Neumann's hidden-parameter proof", *Am. J. Phys.* **29**, 8, 478-484 (1961).

5. **[Albrecht 92]**: A. Albrecht, "Investigating decoherence in a simple system", *Phys. Rev. D* **46**, 12, 5504-5520 (1992).

6. **[Albrecht 93]**: A. Albrecht, "Following a 'collapsing' wave function", *Phys. Rev. D* **48**, 8, 3768-3778 (1993).

7. **[Albrecht 94]**: A. Albrecht, "Some remarks on quantum coherence", *J. Mod. Opt.* **41**, 12, 2467-2482 (1994).

8. **[Allen 92]**: A. D. Allen, "Debunking the Mermin contraption", *Phys. Essays* **5**, 2, 178-179 (1992) (ñ). Crítica a **[Mermin 81 a]**, **[Mermin 81 b]**, **[Mermin 85]**.

9. **[Álvarez-García Alcaine 87]**: G. Álvarez, & G. García Alcaine, "Some remarks on realism, contextuality and quantum mechanics", *Anales de Física A* **83**, 3, 247-253 (1987).

10. **[Angelidis 83]**: T. D. Angelidis, "Bell's theorem: Does the Clauser-Horne inequality hold for all local theories?", *Phys. Rev. Lett.* **51**, 20, 1819-1822 (1983). Comments: **[Garg-Leggett 84]**, **[Barut-Meystre 84]**, **[Horne-Shimony 84]**, **[Cushing 85]**.

11. **[Aravind 95]**: P. K. Aravind, "To what extent do mixed states violate the Bell inequalities?", *Phys. Lett. A* **200**, 5, 345-349 (1995). Errata: *Phys. Lett. A* **204**, 5-6, 431 (1995). Ver **[Horodecki-Horodecki-Horodecki 95]**.

12. **[Ardehali 91]**: M. Ardehali, "Hidden variables and quantum-mechanical probabilities for generalized spin-*s* systems", *Phys. Rev. D* **44**, 10, 3336-3341 (1991).

13. **[Ardehali 92]**: M. Ardehali, "Bell inequalities with a magnitude of violation that grows exponentially with the number of particles", *Phys. Rev. A* **46**, 9, 5375-5378 (1992).

14. **[Arntzenius 91]**: F. Arntzenius, "Kochen's interpretation of quantum mechanics", en A. Fine, M. Forbes, & L. Wessels (eds.), *Proceedings of the 1990 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, East Lansing, Michigan, 1991, Vol. 2, pp. 241-249 (j).

15. **[Aspect 76]**: A. Aspect, "Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics", *Phys. Rev. D* **14**, 8, 1944-1951 (1976). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 435-442.

16. **[Aspect-Grangier-Roger 81]**: A. Aspect, P. Grangier, & G. Roger, "Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **47**, 7, 460-463 (1981).

17. **[Aspect-Grangier-Roger 82]**: A. Aspect, P. Grangier, & G. Roger, "Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A new violation of Bell's inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1, 91-94 (1982).

18. **[Aspect-Dalibard-Roger 82]**: A. Aspect, J. Dalibard, & G. Roger, "Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 25, 1804-1807 (1982). Reimpreso en **[Stroke 95]**.

19. @ **[Aspect 83]**: A. Aspect, "Trois tests expérimentaux des inégalités de Bell par mesure de correlation de polarisation de photons", thèse, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1983.

20. **[Aspect 85]**: A. Aspect, en "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 9 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

21. **[Bacciagaluppi 95]**: G. Bacciagaluppi, "Kochen-Specker theorem in the modal interpretation of quantum mechanics", *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 8, 1205-1216 (1995).

22. **[Balian 89]**: R. Balian, "On the principles of quantum mechanics and the reduction of the wave packet", *Am. J. Phys.* **57**, 11, 1019-1027 (1989).

23. **[Ballentine 70]**: L. E. Ballentine, "The statistical interpretation of quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **42**, 4, 358-381 (1970).

24. **[Ballentine 72]**: L. E. Ballentine, "Einstein's interpretation of quantum mechanics", *Am. J. Phys.* **40**, 12, 1763-1771 (1972).

25. **[Ballentine 87]**: L. E. Ballentine, "Resource letter IQM-2: Foundations of quantum mechanics since the Bell inequalities", *Am. J. Phys.* **55**, 9, 785-792 (1987). Ver **[DeWitt-Graham 71]** (I).

26. **[Ballentine-Jarrett 87]**: L. E. Ballentine, & J. P. Jarrett, "Bell's theorem: Does quantum mechanics contradict relativity?", *Am. J. Phys.* **55**, 8, 696-701 (1987).

27. **[Ballentine 90]**: L. E. Ballentine, *Quantum mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

28. **[Baracca-Bergia-Livi-Restignoli 76]**: A. Baracca, S. Bergia, R. Livi, & M. Restignoli, "Reinterpretation and extension of Bell's inequality for multivalued observables", *Int. J. Theor. Phys.* **15**, 7, 473-486 (1976).

29. **[Barenco-Deutsch-Ekert-Jozsa 95]**: A. Barenco, D. Deutsch, A. K. Ekert, & R. Jozsa, "Conditional quantum dynamics and logic gates", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 20, 4083-4086 (1995).

30. **[Barenco-Bennett-Cleve-DiVincenzo-Margolus-Shor-Sleator-Smolin Weinfurter 95]**: A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, & H. Weinfurter, "Elementary gates for quantum computation", *Phys. Rev. A* **52**, 5, 3457-3467 (1995).

31. **[Barnett-Phoenix 92]**: S. M. Barnett, & S. J. D. Phoenix, "Bell's inequality and the Schmidt decomposition", *Phys. Lett. A* **167**, 3, 233-237 (1992).

32. **[Barnett-Phoenix 93]**: S. M. Barnett, & S. J. D. Phoenix, "Bell's inequality and rejected-data protocols for quantum cryptography", *J. Mod. Opt.* **40**, 8, 1443-1448 (1995).

33. **[Barnett-London-Pegg-Phoenix 94]**: S. M. Barnett, R. London, D. T. Pegg, & S. J. D. Phoenix, "Communication using quantum states", *J. Mod. Opt.* **41**, 12 (número especial sobre comunicación cuántica), 2351-2373 (1994).

34. **[Barut-Meystre 84]**: A. O. Barut, & P. Meystre, "Rotational invariance, locality, and Einstein-Podolsky-Rosen experiments", *Phys. Rev. Lett.* **53**, 10, 1021 (1984). Comment de **[Angelidis 83]**.

35. **[Barut 92]**: O. A. Barut, "How to avoid 'quantum paradoxes'", *Found. Phys.* **22**, 1, 137-142 (1992).

36. **[Bechmann Johansen 94]**: H. Bechmann Johansen, "Comment on 'Getting contextual and nonlocal elements-of-reality the easy way', by R. Clifton", *Am. J. Phys.* **62**, 5, 471 (1994). Comment a **[Clifton 93]**.

37. **[Bedford-Selleri 85]**: D. Bedford, & F. Selleri, "On Popper's new EPR-experiment", *Lettere al Nuovo Cimento* **42**, 7, 325-328 (1985). Ver **[Collett-Loudon 87]**, **[Combourieu 92]**.

38. **[Belinfante 73]**: F. J. Belinfante, *A survey of hidden-variables theories*, Pergamon Press, New York, 1973.

39. **[Belinsky-Klyshko 93]**: A. V. Belinsky, & D. N. Klyshko, "A modified *N*-particle Bell theorem, the corresponding optical experiment and its classical model", *Phys. Lett. A* **176**, 6, 415-420 (1993).

40. **[Belinsky 94]**: A. V. Belinsky, "A generalized Bell's theorem", *J. Exp. Theor. Phys.* **78**, 4, 436-440 (1994); traducción de *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **105**, 4, 818-827 (1994).

41. **[Bell 66]**: J. S. Bell, "On the problem of hidden variables in quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **38**, 3, 447-452 (1966). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 397-402. También en **[Bell 87]**, pp. 1-13 (25-40 en la versión en castellano), y en **[Bell 95]**.

42. **[Bell 64]**: J. S. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", *Physics* **1**, 3, 195-200 (1964). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 403-408. También en **[Bell 87]**, pp. 14-21 (41-50 en la versión en castellano), y en **[Bell 95]**.

43. **[Bell 71]**: J. S. Bell, "Introduction to the hidden-variable question", en B. d'Espagnat (ed.), *Foundations of quantum mechanics. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi". Course IL: Foundations of Quantum Mechanics (Varenna, Italy, 1970)*, Academic Press, New York, 1971, pp. 171-181. Reimpreso en **[Bell 87]**, pp. 29-39 (60-73 en la versión en castellano). También en **[Bell 95]**.

44. **[Bell 82]**: J. S. Bell, "On the impossible pilot wave", *Found. Phys.* **12**, 10, 989-999 (1982). Reimpreso en **[Bell 87]**, pp. 159-168 (221-233 en la versión en castellano). También en **[Bell 95]**.

45. **[Bell 87]**: J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987. Versión en castellano: *Lo decible y lo indecible en mecánica cuántica*, Alianza, Madrid, 1990. Los mismos artículos y dos más pueden encontrarse en **[Bell 95]**.

46. **[Bell 95]**: J. S. Bell, *Quantum mechanics, high energy physics and accelerators: Selected papers of John Bell*, World Scientific, Singapore, 1995.

47. **[Ben Aryeh-Postan 92]**: Y. Ben-Aryeh, & A. Postan, "Comment on 'Does quantum mechanics violate the Bell inequalities?'", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 17, 2701. Comment a **[Santos 91]**.

48. **[Ben Aryeh 93]**: Y. Ben-Aryeh, "Localiy is not violated for the singlet spin state", *Found. Phys. Lett.* **6**, 4, 317-325 (1993) (g).

49. **[Bennett-Brassard-Mermin 92]**: C. H. Bennett, G. Brassard, & N. D. Mermin, "Quantum cryptography without Bell's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 5, 557-559 (1992).

50. **[Bennett-Brassard-Ekert 92]**: C. H. Bennett, G. Brassard, & A. K. Ekert, "Quantum cryptography", *Sci. Am.* **267**, 4, 26-33 (1992). Versión en castellano: "Criptografía cuántica", *Investigación y Ciencia* 195, 14-22 (diciembre 1992).

51. **[Bennett 92]**: C. H. Bennett, "Quantum cryptography using any two nonorthogonal states", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 21, 3121-3124 (1992).

52. **[Bennett-Wiesner 92]**: C. H. Bennett, & S. J. Wiesner, "Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 20, 2881-2884 (1992).

53. **[Bennett 93]**: C. H. Bennett, "Certainty from uncertainty", *Nature* **362**, 6422, 694-695 (1993).

54. **[Bennett-Brassard-Crépeau-Jozsa-Peres-Wootters 93]**: C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, & W. K. Wootters, "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 13, 1895-1899 (1993).

55. **[Bennett-Brassard-Popescu-Schumacher-Smolin-Wootters 96]**: C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, & W. K. Wootters, "Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 5, 722-725 (1996).

56. **[Bennett 95]**: C. H. Bennett, "Quantum information and computation", *Phys. Today* **48**, 10, 24-30 (1995).

57. **[Berndl-Goldstein 94]**: K. Berndl, & S. Goldstein, "Comment on 'Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz-invariant realistic theories'", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 5, 780 (1994). Comment a **[Hardy 92 a]**.

58. **[Bernstein 89]**: J. Bernstein, *Quantum profiles. An analysis of quantum physics* (?), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989. Versión en castellano: *Perfiles cuánticos. Un análisis de la física cuántica*, McGraw-Hill, Madrid, 1991 (a).

59. **[Bernstein-Greenberger-Horne-Zeilinger 93]**: H. J. Bernstein, D. M. Greenberger, M. A. Horne, & A. Zeilinger, "Bell theorem without inequalities for two spinless particles", *Phys. Rev. A* **47**, 1, 78-84 (1993).

60. **[Biedenharn-Van Dam 65]**: L. C. Biedenharn, & H. van Dam (eds.), *Quantum theory of angular momentum*, Academic Press, New York, 1965.

61. **[Bohm 51]**: D. Bohm, *Quantum theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1951; Constable, London, 1954; Dover, New York, 1989.

62. **[Bohm 52]**: D. Bohm, "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables. I & II", *Phys. Rev.* **85**, 2, 166-193 (1952). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 369-396.

63. **[Bohm-Aharonov 57]**: D. Bohm, & Y. Aharonov, "Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky", *Phys. Rev.* **108**, 4, 1070-1076 (1957).

64. **[Bohm-Aharonov 60]**: D. Bohm, & Y. Aharonov, "Further discussion of possible experimental tests for the paradox of Einstein, Podolsky and Rosen", *Nuovo Cimento* **17**, 6, 964-976 (1960). Ver **[Peres-Singer 60]**.

65. **[Bohm-Bub 66]**: D. Bohm, & J. Bub, "A refutation of the proof by Jauch and Piron that hidden variables can be excluded in quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **38**, 3, 470-475 (1966).

66. **[Bohm-Hiley 93]**: D. Bohm, & B. J. Hiley, *The undivided universe. An ontological interpretation of quantum theory*, Routledge, London, 1993 (a), (f).

67. **[Bohr 28]**: N. Bohr, "The quantum postulate and the recent development of atomic theory", *Nature* **121**, 3050, 580-590 (1928) (ñ), (o). Reimpreso en N. Bohr, *Atomic theory and the description of nature*, Cambrige University Press, Cambridge, 1934, pp. 52-91. También en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 87-126. Versión en castellano: "El postulado cuántico y el desarrollo reciente de la teoría atómica", en, *La teoría atómica y la descripción de la naturaleza*, Alianza, Madrid, 1988, pp. 97-132.

68. **[Bohr 35]**: N. Bohr, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", *Phys. Rev.* **48**, 8, 696-702 (1935) (ñ). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 145-151.

69. **[Bohr 49]**: N. Bohr, "Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics", en P. A. Schilpp (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-scientist*, Library of Living Philosophers, Open Court, La Salle, Illinois, 1949, Vol. 1, pp. 201-241. También Evanston, Illinois, 1949; Tudor, New York, 1949; Harper and Row, New York, 1959.

70. **[Born 26 a]**: M. Born, "Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge", *Zeitschrift für Physik* **37**, 863-867 (1926) (ñ). Versión en inglés: "On the quantum mechanics of collisions", en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 52-55.

71. **[Born 26 b]**: M. Born, "Quantenmechanik der Stossvorgänge", *Zeitschrift für Physik* **38**, 803-827 (1926) (ñ).

72. **[Born-Einstein 69]**: M. Born, & A. Einstein, *Der Einstein-Born Briefwechsel 1916-1955*, Nymphenburger, München, 1969. Versión en inglés: *The Born-Einstein letters. Correspondence between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955 with commentaries by Max Born*, MacMillan, London, 1971. Versión en castellano: A. Einstein y M. Born. Correspondencia (1916-1955), Siglo XXI, México, 1973. Falta (por lo menos) una carta de B. a E. de Nov. de 1926; ver **[Pais 91]**, p. 288.

73. **[Braunstein-Caves 88]**: S. L. Braunstein, & C. M. Caves, "Information-theoretic Bell inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **61**, 6, 662-665 (1988).

74. **[Braunstein-Caves 89]**: S. L. Braunstein, & C. M. Caves, "Chained Bell inequalities", en M. Kafatos (ed.), *Bell's theorem, quantum theory, and conceptions of the universe. Proceedings of a workshop (George Mason University, 1988)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1989, pp. 27-36 (d).

75. **[Braunstein-Caves 90]**: S. L. Braunstein, & C. M. Caves, "Wringing out better Bell inequalities", *Ann. Phys.* **202**, 1, 22-56 (1990). Ver **[Braunstein-Caves 89]**.

76. **[Braunstein-Mann-Revzen 92]**: S. L. Braunstein, A. Mann, & M. Revzen, "Maximal violation of Bell inequalities for mixed states", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 22, 3259-3261 (1992).

77. **[Braunstein-Mann 93]**: S. L. Braunstein, & A. Mann, "Noise in Mermin's *n*-particle Bell inequality", *Phys. Rev. A* **47**, 4, Part A, R2427-R2430 (1993).

78. **[Braunstein-Mann 95]**: S. L. Braunstein, & A. Mann, "Measurement of the Bell operator and quantum teleportation", *Phys. Rev. A* **51**, 3, R1727-R1730 (1995). Errata: *Phys. Rev. A* **53**, 1, 630 (1996).

79. **[Braunstein 96]**: S. L. Braunstein, "Quantum teleportation without irreversible detection", *Phys. Rev. A* **53**, 3, 1900-1902 (1996).

80. **[Brown-Svetlichny 90]**: H. R. Brown, & G. Svetlichny, "Nonlocality and Gleason's lemma. Part I. Deterministic theories", *Found. Phys.* **20**, 11, 1379-1387 (1990). Ver **[Elby 90 a]** (II).

81. **[Brown 93]**: H. R. Brown, "Bell's other theorem and its connection with nonlocality. Part I", en A. van der Merwe, & F. Selleri (eds.), *Bell's theorem and the foundations of modern physics. Proceedings of an international conference (Cesena, Italy, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 104-116 [(h)].

82. **[Bub 74]**: J. Bub, *The interpretation of quantum mechanics*, Reidel, Boston, 1974 [(m)].

83. **[Bub 76]**: J. Bub, "Hidden variables and locality", *Found. Phys.* **6**, 5, 511-525 (1976).

84. @ **[Bub 80]**: J. Bub, "Comment on 'Locality an the algebraic structure of quantum mechanics' by William Demopoulos", en **[Suppes 80]**, pp. 149-153. Comment a **[Demopoulos 80]**. Ver **[Humphreys 80]**.

85. **[Bub-Brown 86]**: J. Bub, & H. R. Brown, "Curious properties of quantum ensembles which have been both preselected and post-selected", *Phys. Rev. Lett.* **56**, 22, 2337-2340 (1986). Comment: **[Albert-Aharonov-D'Amato 86]**. Ver **[Albert-Aharonov-D'Amato 85]**.

86. **[Bub 95]**: J. Bub, "Maximal structures of determinate propositions in quantum mechanics", *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 8, 1255-1264 (1995).

87. **[Bub 96]**: J. Bub, "Schütte's tautology and the KS theorem", *Found. Phys.* **26**, 6, 787-806 (1996).

88. **[Cabello 94]**: A. Cabello, "A simple proof of the Kochen-Specker theorem", *Eur. J. Phys.* **15**, 4, 179-183 (1994).

89. **[Cabello 95]**: A. Cabello, "Kochen-Specker diagram of the Peres-Mermin example", en M. Ferrero, & A. van der Merwe (eds.), *Fundamental problems in quantum physics. Proceedings of an international symposium (Oviedo, Spain, 1993)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1995, pp. 43-46.

90. **[Cabello-García Alcaine 95 a]**: A. Cabello, & G. García Alcaine, "La sorprendente incompatibilidad de la idea de realidad einsteiniana con la mecánica cuántica (o de cómo la mecánica cuántica es más extraña de lo que usualmente se cree)", *Revista Española de Física* **9**, 2, 11-17 (1995).

91. **[Cabello-García Alcaine 95 b]**: A. Cabello, & G. García Alcaine, "A hidden-variables versus quantum mechanics experiment", *J. Phys. A* **28**, 13, 3719-3724 (1995).

92. **[Cabello-García Alcaine 96 a]**: A. Cabello, & G. García Alcaine, "Bell-Kochen-Specker theorem for any finite dimensions $n \geq 3$", *J. Phys. A* **29**, 5, 1025-1036 (1996).

93. **[Cabello-García Alcaine 96 b]**: A. Cabello, & G. García Alcaine, "Elementos de realidad locales *versus* mecánica cuántica", en M. Ferrero, A. Fernández Rañada, J. L. Sánchez Gómez, & E. Santos (directores), *Fundamentos de la Física Cuántica (San Lorenzo de El Escorial, Spain, 1995)*, Editorial Complutense, Madrid, 1996, pp. 83-91.

94. **[Cabello-García Alcaine 96 c]**: A. Cabello, & G. García Alcaine, "Quantum mechanics and elements of reality inferred from joint measurements", *J. Phys. A* **30**, 2, 725-732 (1997).

95. **[Cabello-Santos 96]**: A. Cabello, & E. Santos, "Comment on 'Experimental demonstration of the violation of local realism without Bell inequalities'", *Phys. Lett. A* **214**, 5-6, 316-318 (1996). Comment a **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 95]**. Ver **[Garuccio 95 b]**. Respuesta: **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 96]**.

96. **[Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 a]**: A. Cabello, J. M. Estebaranz, & G. García Alcaine, "Bell-Kochen-Specker theorem: A proof with 18 vectors", *Phys. Lett. A* **212**, 4, 183-187 (1996). Ver **[Peres 91]**, **[Kernaghan 94]**.

97. **[Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 b]**: A. Cabello, J. M. Estebaranz, & G. García Alcaine, "New variants of the Bell-Kochen-Specker theorem", *Phys. Lett. A* **218**, 3-6, 115-118 (1996).

98. **[Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 c]**: A. Cabello, J. M. Estebaranz, & G. García Alcaine, "Recursive proof of the Bell-Kochen-Specker theorem in dimension $n > 3$", preprint, 1996.

99. **[Capasso-Fortunato-Selleri 70]**: V. Capasso, D. Fortunato, & F. Selleri, "Von Neumann's theorem and hidden variable models", *Rivista del Nuovo Cimento* ?, 11, 149-? (1970).

100. **[de Caro-Garuccio 94]**: L. de Caro, & A. Garuccio, "Reliability of Bell-inequality measurements using polarization correlations in parametric-down-conversion photon sources", *Phys. Rev. A* **50**, 4, R2803-R2805 (1994). Comment: **[Kwiat 95]**.

101. **[Cassinelli-Lahti 95]**: G. Cassinelli, & P. J. Lahti, "Quantum theory of measurement and the modal interpretations of quantum mechanics", *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 8, 1271-1281 (1995).

102. **[Cereceda 95]**: J. L. Cereceda, "The Kochen-Specker theorem and Bell's theorem: An algebraic approach", *Found. Phys.* **25**, 6, 925-949 (1995).

103. **[Cereceda 96 a]**: J. L. Cereceda, "An apparent paradox at the heart of quantum mechanics", *Am. J. Phys.* **64**, 4, 459-466 (1996).

104. **[Cereceda 96 b]**: J. L. Cereceda, "Maximally entangled states and the Bell inequality", *Phys. Lett. A* **212**, 3, 123-129 (1996). Ver **[Kar 95]**.

105. **[Cereceda 96 c]**: J. L. Cereceda, "Nonlocality without inequalities: Dealing with maximally entangled states", preprint, 1996.

106. **[Chefles-Barnett 96]**: A. Chefles, & S. M. Barnett, "Complementarity and Cirel'son's inequality", *J. Phys. A* **29**, 10, L237-L239 (1996).

107. **[Chiao-Kwiat-Steinberg 95]**: R. Y. Chiao, P. G. Kwiat, & A. M. Steinberg, "Quantum non-locality in two-photon experiments at Berkeley", *Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 3, 259-278 (1995). Contribución en el International Workshop on Laser and Quantum Optics (Nathiagali, Pakistan, 1994).

108. **[Chuang-Yamamoto 95]**: I. L. Chuang, & Y. Yamamoto, "Simple quantum computer", *Phys. Rev. A* **52**, 5, 3489-3496 (1995).

109. **[Cirac-Parkins 94]**: J. I. Cirac, & A. S. Parkins, "Schemes for atomic-state teleportation", *Phys. Rev. A* **50**, 6, R4441-R4444 (1994).

110. **[Cirac-Zoller 94]**: J. I. Cirac, & P. Zoller, "Preparation of macroscopic superpositions in many-atom systems", *Phys. Rev. A* **50**, 4, R2799-R2802 (1994).

111. **[Cirac-Zoller 95]**: J. I. Cirac, & P. Zoller, "Quantum computations with cold trapped ions", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 20, 4091-4094 (1995).

112. **[Cirel'son 80]**: B. S. Cirel'son, "Quantum generalizations of Bell's inequality", *Lett. Math. Phys.* **4**, 2, 93-100 (1980).

113. **[Clauser-Horne-Shimony-Holt 69]**: J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, & R. A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **23**, 15, 880-884 (1969). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 409-413.

114. **[Clauser 71 a]**: J. F. Clauser, "Von Neumann's informal hidden-variable argument", *Am. J. Phys.* **39**, 9, 1095-1096 (1971). Ver **[Wigner 70]**, **[Wigner 71]**, **[Clauser 71 b]**.

115. **[Clauser 71 b]**: J. F. Clauser, "Reply to Dr. Wigner's objections", *Am. J. Phys.* **39**, 9, 1098-1099 (1971). Ver **[Wigner 70]**, **[Wigner 71]**, **[Clauser 71 a]**.

116. **[Clauser-Horne 74]**: J. F. Clauser, & M. A. Horne, "Experimental consecuences of objective local theories", *Phys. Rev. D* **10**, 2, 526-535 (1974).

117. **[Clauser 76]**: J. F. Clauser, "Experimental investigation of a polarization correlation anomaly", *Phys. Rev. Lett.* **36**, 21, 1223-1226 (1976).

118. **[Clauser-Shimony 78]**: J. F. Clauser, & A. Shimony, "Bell's theorem: Experimental tests and implications", *Rep. Prog. Phys.* **41**, 12, 1881-1927 (1978) [h].

119. **[Clauser 92]**: J. F. Clauser, "Early history of Bell's theorem theory and experiment", en T. D. Black, M. Martín Nieto, H. S. Pilloff, M. O. Scully, & R. M. Sinclair (eds.), *Foundations of quantum mechanics. Workshop (Santa Fe, New Mexico, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1992, pp. 168-174.

120. **[Clifton-Redhead-Butterfield 91 a]**: R. K. Clifton, M. L. G. Redhead, & J. N. Butterfield, "Generalization of the Greenberger-Horne-Zeilinger algebraic proof of nonlocality", *Found. Phys.* **21**, 2, 149-184 (1991). Comment: **[Jones 91]**. Ver **[Clifton-Redhead-Butterfield 91 b]**.

121. **[Clifton-Redhead-Butterfield 91 b]**: R. K. Clifton, M. L. G. Redhead, & J. N. Butterfield, "A second look at a recent algebraic proof of nonlocality", *Found. Phys. Lett.* **4**, 4, 395-403 (1991) [g]. Respuesta a **[Jones 91]**. Ver **[Clifton-Redhead-Butterfield 91 a]**.

122. @ **[Clifton 91]**: R. K. Clifton, "Nonlocality in quantum mechanics: Signalling, counterfactuals, probability and causation", Ph. D. thesis, Cambridge University, 1991.

123. **[Clifton-Niemann 92]**: R. K. Clifton, & P. Niemann, "Locality, Lorentz invariance, and linear algebra: Hardy's theorem for two entangled spin-*s* particles", *Phys. Lett. A* **166**, 3-4, 177-184 (1992).

124. **[Clifton-Pagonis-Pitowsky 92]**: R. K. Clifton, C. Pagonis, & I. Pitowsky, "Relativity, quantum mechanics, and EPR", en D. Hall, M. Forbes, & K. Okruhlik (eds.), *Proceedings of the 1992 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, East Lansing, Michigan, 1992, Vol. 1, pp. 114-128 [(a)].

125. **[Clifton 93]**: R. K. Clifton, "Getting contextual and nonlocal elements-of-reality the easy way", *Am. J. Phys.* **61**, 5, 443-447 (1993). Comments: **[Bechmann Johansen 94]**, **[Vermaas 94]**.

126. **[Clifton 95 a]**: R. K. Clifton, "Independently motivating the Kochen-Dieks modal interpretation of quantum mechanics", *Brit. J. Phil. Sci.* **46**, 1, 33-57 (1995) [(m)].

127. **[Clifton 95 b]**: R. K. Clifton, "Why modal interpretations of quantum mechanics must abandon classical reasoning about physical properties", *Int. J. Theor. Phys.* **34**, 8, 1303-1312 (1995).

128. **[Clifton 95 c]**: R. K. Clifton. "Making sense of the Kochen-Dieks "no-collapse" interpretation of quantum mechanics independent of the measurement problem", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 570-578 (1995) [(b)].

129. **[Cohen-Hiley 95 a]**: O. Cohen, & B. J. Hiley, "Reexamining the assumption that elements of reality can be Lorentz invariant", *Phys. Rev. A* **52**, 1, 76-81 (1995). Ver **[Vaidman 93]**, **[Cohen-Hiley 96]**.

130. **[Cohen-Hiley 95 b]**: O. Cohen, & B. J. Hiley, "Retrodiction in quantum mechanics, preferred Lorentz frames, and nonlocal measurements", *Found. Phys.* **25**, 12, 1669-1698 (1995).

131. **[Cohen-Hiley 96]**: O. Cohen, & B. J. Hiley, "Elements of reality, Lorentz invariance, and the product rule", *Found. Phys.* **26**, 1, 1-15 (1996). Ver **[Vaidman 93]**, **[Cohen-Hiley 95 a]**.

132. **[Cohen Tannoudji-Diu-Laloë 73]**: C. Cohen Tannoudji, B. Diu, & F. Laloë, *Mécanique quantique*, 2 Vols., Hermann, Paris, 1973 (1ª edición), 1977 (2ª edición). Versión en inglés: *Quantum mechanics*, John Wiley & Sons-Hermann, Paris, 1977.

133. **[Collett-Loudon 87]**: M. J. Collett, & R. Loudon, "Analysis of a proposed crucial test of quantum mechanics", *Nature* **326**, 6114, 671-672 (1987). Ver **[Bedford-Selleri 85]**, **[Combourieu 92]**.

134. **[Combourieu 92]**: M. C. Combourieu, "Karl R. Popper, 1992: About the EPR controversy", *Found. Phys.* **22**, 10, 1303-1323 (1992). Ver **[Bedford-Selleri 85]**, **[Collett-Loudon 87]**.

135. **[Cooke-Keane-Moran 85]**: R. Cooke, M. S. Keane, & W. Moran, "An elementary proof of Gleason's theorem", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **98**, 1, 117-128 (1985) [(i)]. Reimpreso como apéndice en **[Hughes 89]**. Ver **[Gill-Keane 96]**.

136. **[Coxeter 48]**: H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Methuen, London, 1948 (1ª edición); Macmillan, New York, 1963 (2ª edición); Dover, New York, 1973 (3ª edición) [(i)]. Ver **[Hall 93]**, **[Manning 14]**, **[Sommerville 29]**, **[Dewdney 86]**.

137. **[Cushing 85]**: J. T. Cushing, "Comment on Angelidis's universality claim", *Phys. Rev. Lett.* **54**, 18, 2059 (1985). Comment a **[Angelidis 83]**.

138. **[Czachor 94]**: M. Czachor, "Bell theorem without inequalities: A single-particle formulation", *Phys. Rev. A* **49**, 4, 2231-2240 (1994).

139. **[Davidovich-Maali-Brune-Raimond-Haroche 93]**: L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond, & S. Haroche, "Quantum switches and nonlocal microwave fields", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 15, 2360-2363 (1993).

140. **[Davidovich-Zagury-Brune-Raimond-Haroche 94]**: L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond, & S. Haroche, "Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields", *Phys. Rev. A* **50**, 2, Part A, R895-R898 (1994).

141. **[Davies-Brown 86]**: P. C. W. Davies, & J. R. Brown (eds.), *The ghost in the atom. A discussion of the mysteries of quantum physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Versión en castellano: *El espíritu en el átomo. Una discusión sobre los misterios de la física cuántica*, Alianza, Madrid, 1989 [(a)].

142. **[Deltete-Guy 90]**: R. Deltete, & R. Guy, "Einstein's opposition to the quantum theory", *Am. J. Phys.* **58**, 7, 673-683 (1990). Ver **[Guy-Deltete 90]**.

143. **[Deltete-Guy 91]**: R. Deltete, & R. Guy, "Einstein and EPR", *Phil. Sci.* **58**, 3, 377-397 (1991) [(c), (o)]. Ver **[Howard 85]**, **[Fine 86]**, **[Fine 89]** (Sec. 1), **[Hájek-Bub 92]**, **[Combourieu 92]**.

144. @ **[Demopoulos 80]**: W. Demopoulos, "Locality and the algebraic structure of quantum mechanics", en **[Suppes 80]**, pp. 119-144. Comments: **[Humphreys 80]**, **[Bub 80]**.

145. **[Deutsch-Ekert 93]**: D. Deutsch, & A. K. Ekert, "Quantum communication moves into the unknown", *Phys. World* **6**, 6, 22-23 (1993).

146. **[Dewdney 86]**: A. K. Dewdney, "A program for rotating hypercubes induces four-dimensional dementia", *Sci. Am.* **254**, 4, 8-13 (1986). Versión en castellano: "Un programa que gira hipercubos induce demencia tetradimensional", *Investigación y Ciencia* 117, 98-104 (junio 1986). Ver **[Hall 93]**, **[Manning 14]**, **[Sommerville 29]**, **[Coxeter 48]**.

147. **[Dewdney-Holland-Kyprianidis 86]**: C. Dewdney, P. R. Holland, & A. Kyprianidis, "What happens in a spin measurement?", *Phys. Lett. A* **119**, 6, 259-267 (1986).

148. **[Dewdney 87]**: C. Dewdney, "Calculations in the causal interpretation of quantum mechanics", en W. M. Honig, D. W. Kraft, & E. Panarella, *Quantum uncertainties: Recent and future experiments and interpretations*, Plenum Press, New York, 1987, pp. 19-40.

149. **[Dewdney-Holland-Kyprianidis 87]**: C. Dewdney, P. R. Holland, & A. Kyprianidis, "A causal account of non-local Einstein-Podolsky-Rosen spin correlations", *J. Phys. A* **20**, 14, 4717-4732 (1987).

150. **[Dewdney-Holland 88]**: C. Dewdney, & P. R. Holland, "Particle trajectories and quantum correlations", en F. Selleri (ed.), *Quantum mechanics versus local realism: The Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Plenum Press, New York, 1988, pp. 301-325.

151. **[Dewdney-Holland-Kyprianidis-Vigier 88]**: C. Dewdney, P. R. Holland, A. Kyprianidis, & J. P. Vigier, "Spin and non-locality in quantum mechanics", *Nature* **336**, 6199, 536-544 (1988).

152. **[Dewdney 92]**: C. Dewdney, "Constraints on quantum hidden-variables and the Bohm theory", *J. Phys. A* **25**, 12, 3615-3626 (1992). Similar a **[Dewdney 93]**.

153. **[Dewdney 93]**: C. Dewdney, "Constraints on quantum hidden variables and the Bohm theory", en A. van der Merwe, & F. Selleri (eds.), *Bell's theorem and the foundations of modern physics. Proceedings of an international conference (Cesena, Italy, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 147-160 (h). Similar a **[Dewdney 92]**.

154. **[Dewdney-Malik 93]**: C. Dewdney, & Z. Malik, "Angular-momentum measurement and nonlocality in Bohm's interpretation of quantum theory", *Phys. Rev. A* **48**, 5, 3513-3524 (1993).

155. **[DeWitt-Graham 71]**: B. S. DeWitt, & R. N. Graham, "Resource letter IQM-1 on the interpretation of quantum mechanics", *Am. J. Phys.* **39**, 7, 724-738 (1971). Ver **[Ballentine 87]** (II).

156. **[Dicke 81]**: R. H. Dicke, "Interaction-free quantum measurements: A paradox?", *Am. J. Phys.* **49**, 10, 925-930 (1981).

157. **[Dieks 89]**: D. Dieks, "Resolution of the measurement problem through decoherence of the quantum state", *Phys. Lett. A* **142**, 8-9, 439-446 (1989).

158. **[Dieks 94]**: D. Dieks, "Modal interpretation of quantum mechanics, measurements, and macroscopic behavior", *Phys. Rev. A* **49**, 4, 2290-2300 (1994). Ver **[Elby 93 a]**.

159. **[Dieks 95]**: D. Dieks, "Physical motivation of the modal interpretation of quantum mechanics", *Phys. Lett. A* **197**, 5-6, 367-371 (1995).

160. **[Dirac 30]**: P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford University Press, Oxford, 1930 (1ª edición), 1958 (4ª edición). Versión en castellano: *Principios de mecánica cuántica*, Ariel, Barcelona, 1968.

161. **[Domokos-Raimond-Brune-Haroche 95]**: P. Domokos, J. M. Raimond, M. Brune, & S. Haroche, "Simple cavity-QED two-bit universal quantum logic gate: The principle and expected performances", *Phys. Rev. A* **52**, 5, 3554-3559 (1995).

162. **[Dove 95]**: C. Dove, "Quantum computers and possible wavefunction collapse", *Phys. Lett. A* **207**, 6, 315-319 (1995).

163. **[Drisch 79]**: T. Drisch, "Generalization of Gleason's theorem", *Int. J. Theor. Phys.* **18**, 4, 239-243 (1979).

164. **[Eberhard 93]**: P. H. Eberhard, "Background level and counter efficiences required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment", *Phys. Rev. A* **47**, 2, R747-R750 (1993).

165. **[Eberhard-Rosselet 95]**: P. H. Eberhard, & P. Rosselet, "Bell's theorem based on a generalized EPR criterion of reality", *Found. Phys.* **25**, 1, 91-111 (1995).

166. **[Eilers-Horst 75]**: M. Eilers, & E. Horst, "The theorem of Gleason for nonseparable Hilbert spaces", *Int. J. Theor. Phys.* **13**, 6, 419-424 (1975).

167. **[Einstein 05]**: A. Einstein, "Über die von molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen",

Annalen der Physik **17**, 549-560 (1905). Reimpreso en **[Fürth 22]**, pp. 5-15; **[Stachel 89]**, pp. 223-236. Versión en inglés: "On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular kinetic theory of heat", en la versión en inglés de **[Fürt 22]**, pp. 1-18. Ver **[Pais 82]**, Sec. 5d; **[Stachel 89]**, pp. 206-222.

168. **[Einstein 06]**: A. Einstein, "Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen", *Annalen der Physik* **19**, 289-305 (1906). Corrección: *Annalen der Physik* **34**, 591-592 (1911). Reimpreso en **[Fürth 22]**, pp. 25-40; **[Stachel 89]**, pp. 183-205. Versión en inglés: "A new determination of molecular dimensions", en la versión en inglés de **[Fürt 22]**, pp. 36-62. Ver **[Pais 82]**, Sec. 5c; **[Stachel 89]**, pp. 170-182.

169. **[Einstein-Podolsky-Rosen 35]**: A. Einstein, B. Podolsky, & N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", *Phys. Rev.* **47**, 10, 777-780 (1935) (ñ). Reimpreso en **[Toulmin 70]**, pp. 122-142; **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 138-141; **[Stroke 95]**.

170. @ **[Einstein 36]**: A. Einstein, "Physik und Realität" ("Physics and reality"), *J. Frankin Institute* **221**, ?, 313-347 (349-382) (1936). Otra traducción al inglés en A. Einstein, *Ideas and opinions*, Bonanza Books, New York, 1954, pp. 290-323.

171. **[Einstein 48]**: A. Einstein, "Quanten-Mechanik und Wirklichkeit", *Dialectica* **2**, 3, 320-324 (1948) (c). También en la carta del 5 de abril de 1948 en **[Born-Einstein 69]**.

172. **[Einstein 49]**: A. Einstein, "Autobiographisches" (páginas pares), "Autobiographical notes" (impares), en P. A. Schilpp (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-scientist*, Library of Living Philosophers, Open Court, La Salle, Illinois, 1949, Vol. 1, pp. 2-94. También Evanston, Illinois, 1949; Tudor, New York, 1949; Harper and Row, New York, 1959. Versión en castellano: *Notas autobiográficas*, Alianza, Madrid, 1984.

173. **[Ekert 91 a]**: A. K. Ekert, "Quantum cryptography based on Bell's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **67**, 6, 661-663 (1991).

174. **[Ekert 91 b]**: A. K. Ekert, "La mécanique quantique au secours des agents secrets", *La Recherche* **22**, 233, 790-791 (1991). Versión en castellano: "La mecánica cuántica en auxilio de los agentes secretos", *Mundo Científico* **11**, 116, 886-887 (1991).

175. **[Ekert 92]**: A. K. Ekert, "Beating the code breakers", *Nature* **358**, 6381, 14-15 (1992).

176. **[Ekert-Rarity-Tapster-Palma 92]**: A. K. Ekert, J. G. Rarity, P. R. Tapster, & G. M. Palma, "Practical quantum cryptography based on two-photon interferometry", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 9, 1293-1295 (1992).

177. **[Ekert-Knight 95]**: A. K. Ekert, & P. L. Knight, "Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition", *Am. J. Phys.* **63**, 5, 415-423 (1995).

178. **[Ekstrand 85]**: K. E. Ekstrand, en "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 136 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

179. **[Elby 90 a]**: A. Elby, "Nonlocality and Gleason's lemma. Part 2. Stochastic theories", *Found. Phys.* **20**, 11, 1389-1397 (1990). Ver **[Brown-Svetlichny 90]** (I).

180. **[Elby 90 b]**: A. Elby, "On the physical interpretation of Heywood and Redhead's algebraic impossibility theorem", *Found. Phys. Lett.* **3**, 3, 239-247 (1990) (g).

181. **[Elby 90 c]**: A. Elby, "Critique of Home and Sengupta's derivation of a Bell inequality", *Found. Phys. Lett.* **3**, 4, 317-324 (1990) (g). Crítica a **[Home-Sengupta 84]**. Comment: **[Home-Sengupta 91]**. Ver **[Elby 91]**.

182. **[Elby 91]**: A. Elby, "Reply: How is Home and Sengupta's noncontextuality condition related to locality", *Found. Phys. Lett.* **4**, 5, 455-457 (1991) (g). Respuesta a **[Home-Sengupta 91]**. Ver **[Home-Sengupta 84]**, **[Elby 90 c]**.

183. **[Elby-Jones 92]**: A. Elby, & M. R. Jones, "Weakening the locality conditions in algebraic nonlocality proofs", *Phys. Lett. A* **171**, 1-2, 11-16 (1992).

184. **[Elby 93 a]**: A. Elby, "Why 'modal' interpretations of quantum mechanics don't solve the measurement problem", *Found. Phys. Lett.* **6**, 1, 5-19 (1993) (g). Ver **[Dieks 94]**.

185. **[Elby 93 b]**: A. Elby, "Bell's *other* theorem and its connection with nonlocality, part 2", en A. van der Merwe, & F. Selleri (eds.), *Bell's theorem and the foundations of modern physics. Proceedings of an international conference (Cesena, Italy, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 184-193 (h).

186. **[Elby-Brown-Foster 93]**: A. Elby, H. R. Brown, & S. Foster, "What makes a theory physically 'complete'?", *Found. Phys.* **23**, 7, 971-985 (1993).

187. **[Elby-Bub 94]**: A. Elby, & J. Bub, "Triorthogonal uniqueness theorem and its relevance to the interpretation of quantum mechanics", *Phys. Rev. A* **49**, 5, 4213-4216 (1994). Ver **[Peres 95 b]**.

188. **[Elitzur-Vaidman 93]**: A. Elitzur, & L. Vaidman, "Quantum mechanical interaction-free measurements", *Found. Phys.* **23**, 7, 987-997 (1993). Ver **[Vaidman 94 b]**.

189. **[Englert-Schwinger-Scully 88]**: B.-G. Englert, J. Schwinger, & M. O. Scully, "Is spin coherence like Humpty-Dumpty? I. Simplified treatment", *Found. Phys.* **18**, 10, 1045-56 (1988) (h). Ver **[Schwinger-Scully-Englert 88]** (II), **[Scully-Englert-Schwinger 89]** (III).

190. **[Erlichson 72]**: H. Erlichson, "Bohr and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", *Am. J. Phys.* **40**, 4, 634-636 (1972). Comment a **[Hooker 70]**.

191. **[d'Espagnat 93]**: B. d'Espagnat, "One or two Bell theorems?", en A. van der Merwe, & F. Selleri (eds.), *Bell's theorem and the foundations of modern physics. Proceedings of an international conference (Cesena, Italy, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 139-146 (h).

192. **[Feingold-Peres 85]**: S. J. Feingold, & A. Peres, en "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 15 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

193. **[Fernández Huelga-Ferrero-Santos 94]**: S. G. Fernández Huelga, M. Ferrero, & E. Santos, "Atomic-cascade experiment with detection of the recoil atom", *Europhys. Lett.* **27**, 3, 181-186 (1994).

194. **[Fernández Huelga-Ferrero-Santos 95 a]**: S. G. Fernández Huelga, M. Ferrero, & E. Santos, "Loophole-free test of the Bell inequality", *Phys. Rev. A* **51**, 6, 5008-5011 (1995).

195. **[Fernández Huelga-Ferrero-Santos 95 b]**: S. G. Fernández Huelga, M. Ferrero, & E. Santos, "Proposed new polarization correlation test of local realism", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 429-437 (1995) [(b)].

196. **[Fernández Huelga-Marshall-Santos 95]**: S. G. Fernández Huelga, T. W. Marshall, & E. Santos, "Proposed test for realistic theories using Rydberg atoms coupled to a high-Q resonator", *Phys. Rev. A* **52**, 4, R2497-R2500 (1995).

197. @ **[Ferrero 86]**: M. Ferrero, "La desigualdad de Bell y los experimentos de cascada atómica: ¿Es posible el realismo local frente a la mecánica cuántica?", tesis doctoral, Universidad de Cantabria, 1986.

198. **[Feynman 65]**: R. P. Feynman, *The character of physical law*, M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1965. Edición en castellano: *El carácter de la ley física*, Orbis, Barcelona, 1987.

199. **[Fine-Teller 78]**: A. Fine, & P. Teller, "Algebraic constraints on hidden variables", *Found. Phys.* **8**, 7-8, 629-636 (1978) [(h)].

200. @ **[Fine 86]**: A. Fine, *The shaky game: Einstein, realism, and the quantum theory*, University of Chicago Press, Chicago, 1986. Crítica: **[Hájek-Bub 92]**. Ver **[Howard 85]**, **[Fine 89]** (Sec. 1), **[Deltete-Guy 91]**.

201. **[Fine 89]**: A. Fine, "Correlations and efficiency: Testing the Bell Inequalities", *Found. Phys.* **19**, 5, 453-478 (1989).

202. **[Fine 90]**: A. Fine, "Einstein and ensembles: Response", *Found. Phys.* **20**, 8, 967-989 (1990). Respuesta a **[Guy-Deltete 90]**.

203. **[Fleming 95]**: G. N. Fleming, "A GHZ argument for a single spinless particle", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 646-653 (1995) [(b)].

204. **[Franson 89]**: J. D. Franson, "Bell inequality for position and time", *Phys. Rev. Lett.* **62**, 19, 2205-2208 (1989).

205. **[Freedman-Clauser 72]**: S. J. Freedman, & J. F. Clauser, "Experimental test of local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **28**, 14, 938-941 (1972). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 414-417.

206. @ **[Freedman 72]**: S. J. Freedman, "Experimental test of local hidden-variable theories", Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, 1972.

207. **[Freyberger 95]**: M. Freyberger, "Simple example of nonlocality: Atoms interacting with correlated quantized fields", *Phys. Rev. A* **51**, 4, 3347-3350 (1995).

208. **[Freyberger-Aravind-Horne-Shimony 96]**: M. Freyberger, P. K. Aravind, M. A. Horne, & A. Shimony, "Proposed test of Bell's inequality without detection loophole by using entangled Rydberg atoms", *Phys. Rev. A* **53**, 3, 1232-1244 (1996).

209. **[Fry-Thompson 76]**: E. S. Fry, & R. C. Thompson, "Experimental test of local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8, 465-468 (1976). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 418-421.

210. **[Fry-Li 92]**: E. S. Fry, & S. Li, "Bell inequalities with nearly 100% efficient detectors", en T. D. Black, M. Martín Nieto, H. S. Pilloff, M. O. Scully, & R. M.

Sinclair (eds.), *Foundations of quantum mechanics. Workshop (Santa Fe, New Mexico, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1992, pp. 175-180.

211. ✹ **[Fry 93]**: E. S. Fry, "?", en C. P. Wang (ed.), *Proceedings of the International Conference on Lasers' 93 (?, 1993)*, STS Press, Mc Lean, VA, 1993, pp. ?-?.

212. **[Fry 94]**: E. S. Fry, "The strong Bell inequalities. A proposed experimental test", en D. Han, Y. S. Kim, N. H. Rubin, Y. Shih, & W. W. Zachary, *Third International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations (Baltimore, Maryland, 1993)*, NASA, 1994, pp. 575-580.

213. **[Fry 95]**: E. S. Fry, "Bell inequalities and two experimental tests with mercury", *Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 3, 259-278 (1995). Contribución en el International Workshop on Laser and Quantum Optics (Nathiagali, Pakistan, 1994).

214. **[Fry-Walther-Li 95]**: E. S. Fry, T. Walther, & S. Li, "Proposal for a loophole-free test of the Bell inequalities", *Phys. Rev. A* **52**, 6, 4381-4395 (1995).

215. **[Furry 36 a]**: W. H. Furry, "Note on the quantum-mechanical theory of measurement", *Phys. Rev.* **49**, 5, 393-399 (1936) (ñ). Ver **[Furry 36 b]**.

216. **[Furry 36 b]**: W. H. Furry, "Remarks on measurements in quantum theory", *Phys. Rev.* **49**, 6, 476 (1936) (ñ). Ver **[Furry 36 a]**.

217. **[Fürth 22]**: R. Fürth (ed.), *Untersuchungen über die Theorie der Brownschen Bewegung*, Akademische Verlags Gesellschaft, Leipzig, 1922. Versión en inglés: *Investigations on the theory of the Brownian movement*, Dover, New York, 1956 (a).

218. **[Galindo 74]**: A. Galindo, "Variables ocultas", *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid* **68**, 2, 195-207 (1974).

219. **[Galindo 75]**: A. Galindo, "Another proof of the Kochen-Specker paradox", en *Algunas cuestiones de Física Teórica*, G. I. F. T., Zaragoza, 1975, pp. 3-9.

220. **[Galindo-Pascual 78]**: A. Galindo, & P. Pascual, *Mecánica cuántica*, Alhambra, Madrid, 1978 (1ª edición); Eudema, Madrid, 1989 (2ª edición, 2 Vols.). Versión en inglés: *Quantum mechanics*, 2 Vols., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

221. **[García Alcaine-Álvarez 87]**: G. García Alcaine, & G. Álvarez, "Las mediciones cuánticas no violan la causalidad relativista", *Revista Española de Física* **1**, 2, 29-35 (1987).

222. **[García Alcaine 92]**: G. García Alcaine, "Una preparación de estados embrollados", mimeografía, Universidad Complutense, 1992.

223. **[Gardner 85]**: M. Gardner, en "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 136 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

224. **[Garg-Mermin 82 a]**: A. Garg, & N. D. Mermin, "Bell inequalities with a range of violation that does not diminish as the spin becomes arbitrarily large", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 13, 901-904 (1982). Errata: *Phys. Rev. Lett.* **49**, 17, 1294 (1982). Ver **[Mermin-Schwarz 82]**.

225. **[Garg-Mermin 82 b]**: A. Garg, & N. D. Mermin, "Correlation inequalities and hidden variables", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 17, 1220-1223 (1982). Ver **[Garg-Mermin 82 a]**. Comment: **[Horodecki-Horodecki 96]**.

226. **[Garg-Mermin 83]**: A. Garg, & N. D. Mermin, "Local realism and measured correlations in the spin-*s* Einstein-Podolsky-Rosen experiment", *Phys. Rev. D* **27**, 2, 339-348 (1983).

227. **[Garg 83]**: A. Garg, "Detector error and Einstein-Podolsky-Rosen correlations", *Phys. Rev. D* **28**, 4, 785-790 (1983). Ver **[Mermin-Schwarz 82]**, **[Garg-Mermin 87]**.

228. **[Garg-Leggett 84]**: A. Garg, & A. J. Leggett, "Comment on 'Bell's theorem: Does the Clauser-Horne inequality hold for all local theories?'", *Phys. Rev. Lett.* **53**, 10, 1019-1020 (1984). Comment a **[Angelidis 83]**.

229. **[Garg-Mermin 87]**: A. Garg, & N. D. Mermin, "Detector inefficiences in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment", *Phys. Rev. D* **35**, 12, 3831-3835 (1987). Ver **[Mermin-Schwarz 82]**, **[Garg 83]**.

230. **[Garrett 91]**: A. Garrett, "Ockham's razor", *Phys. World* **4**, 5, 39-42 (1991).

231. **[Garuccio 95 a]**: A. Garuccio, "Can the experiments based on parametric-down conversion disprove Einstein locality?", en M. Ferrero, & A. van der Merwe (eds.), *Fundamental problems in quantum physics. Proceedings of an international symposium (Oviedo, Spain, 1993)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1995, pp. 103-112.

232. **[Garuccio 95 b]**: A. Garuccio, "Hardy's approach, Eberhard's inequality, and supplementary assumptions", *Phys. Rev. A* **52**, 4, 2535-2537 (1995). Ver **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 95]**, **[Cabello-Santos 96]**, **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 96]**.

233. **[Gell-Mann 94]**: M. Gell-Mann, *The quark and the jaguar. Adventures in the simple and the complex*, ?, ?, 1994. Versión en castellano: *El quark y el jaguar. Aventuras en lo simple y lo complejo*, Tusquets, Barcelona, 1995.

234. **[Gerlach-Stern 21]**: W. Gerlach, & O. Stern, "Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms", *Zeitschrift für Physik* **8**, 110-111 (1921) (ñ).

235. **[Gerlach-Stern 22 a]**: W. Gerlach, & O. Stern, "Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld", *Zeitschrift für Physik* **9**, 349-352 (1922) (ñ).

236. **[Gerlach-Stern 22 b]**: W. Gerlach, & O. Stern, "Das magnetische Moment des Silberatoms", *Zeitschrift für Physik* **9**, 353-355 (1922) (ñ).

237. **[Gill-Keane 96]**: R. D. Gill, & M. S. Keane, "A geometric proof of the Kochen-Specker no-go theorem", *J. Phys. A* **29**, 12, L289-L291 (1996). Ver **[Cooke-Keane-Moran 85]**.

238. **[Gisin 91]**: N. Gisin, "Bell's inequality holds for all non-product states", *Phys. Lett. A* **154**, 5-6, 201-202 (1991). Corrección de algunos errores tipográficos en **[Barnett-Phoenix 92]**. Ver **[Kar 95]**.

239. **[Gisin-Peres 92]**: N. Gisin, & A. Peres, "Maximal violation of Bell's inequality for arbitrarirly large spin", *Phys. Lett. A* **162**, 1, 15-17 (1992).

240. **[Gisin 96]**: N. Gisin, "Nonlocality criteria for quantum teleportation", *Phys. Lett. A* **210**, 3, 157-159 (1996).

241. **[Gleason 57]**: A. M. Gleason, "Measures on the closed subspaces of a Hilbert space", *J. Math. Mech.* **6**, 6, 885-893 (1957) (i). Reimpreso en **[Hooker 75]**, pp. 123-134.

242. **[Gleason 66]**: A. M. Gleason, *Fundamentals of abstract analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966. pp. 77, 245-248.

243. **[Goldstein 94]**: S. Goldstein, "Nonlocality without inequalities for almost all entangled states for two particles", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 13, 1951 (1994). Ver **[Hardy 93]**.

244. **[Gonzalo 91]**: I. Gonzalo, "Efectos interferenciales clásicos y cuánticos de la luz", mimeografía, Universidad Complutense, 1991.

245. **[Grangier-Roger-Aspect 86]**: P. Grangier, G. Roger, & A. Aspect, "Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single photon interferences", *Europhys. Lett.* **1**, 4, 173-179 (1986). Comment **[Marshall-Santos 87]**.

246. **[Grangier-Potasek-Yurke 88]**: P. Grangier, M. J. Potasek, & B. Yurke, "Probing the phase coherence of parametrically generated photon pairs: A new test of Bell's inequalities", *Phys. Rev. A* **38**, 6, 3132-3135 (1988).

247. **[Greenberger-Horne-Zeilinger 89]**: D. M. Greenberger, M. A. Horne, & A. Zeilinger, "Going beyond Bell's theorem", en M. Kafatos (ed.), *Bell's theorem, quantum theory, and conceptions of the universe. Proceedings of a workshop (George Mason University, 1988)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1989, pp. 69-72 (d).

248. **[Greenberger-Horne-Shimony-Zeilinger 90]**: D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, & A. Zeilinger, "Bell's theorem without inequalities", *Am. J. Phys.* **58**, 12, 1131-1143 (1990).

249. **[Greenberger-Bernstein-Horne-Zeilinger 93]**: D. M. Greenberger, H. J. Bernstein, M. A. Horne, & A. Zeilinger, "A GHZ theorem for two spinless particles", en A. van der Merwe, & F. Selleri (eds.), *Bell's theorem and the foundations of modern physics. Proceedings of an international conference (Cesena, Italy, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 250-262 (h).

250. **[Greenberger-Horne-Zeilinger 93]**: D. M. Greenberger, M. A. Horne, & A. Zeilinger, "Multiparticle interferometry and the superposition principle", *Phys. Today* **46**, 8, 22-29 (1993).

251. **[Greenberger-Horne-Zeilinger 95]**: D. M. Greenberger, M. A. Horne, & A. Zeilinger, "Nonlocality of a single photon?", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 10, 2064 (1995). Comment a **[Hardy 94]**. Respuesta: **[Hardy 95 b]**.

252. **[Greenberger 95]**: D. M. Greenberger, "Two-particle versus three-particle EPR experiments", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 585-599 (1995) (b).

253. **[Gudder 68]**: S. P. Gudder, "Hidden variables in quantum mechanics reconsidered", *Rev. Mod. Phys.* **40**, 1, 229-231 (1968).

254. **[Guy-Deltete 90]**: R. Guy, & R. Deltete, "Fine, Einstein, and ensembles", *Found. Phys.* **20**, 8, 943-965 (1990). Ver **[Deltete-Guy 90]**, **[Fine 90]**.

255. **[Hájek-Bub 92]**: A. Hájek, & J. Bub, "EPR", *Found. Phys.* **22**, 3, 313-332 (1992). Crítica a **[Fine 86]**. Ver **[Howard 85]**, **[Fine 89]** (Sec. 1), **[Deltete-Guy 91]**, **[Combourieu 92]**.

256. **[Hall 93]**: T. P. Hall, "The projection of fourfold figures upon a three-flat", *Am. J. Math.* **15**, 179-189 (1893); reimpreso en 1966 [(i)]. Ver **[Manning 14]**, **[Sommerville 29]**, **[Coxeter 48]**, **[Dewdney 86]**.

257. **[Hardy 91 a]**: L. Hardy, "*N*-measurement Bell inequalities, *N*-atom entangled states, and the nonlocality of one photon", *Phys. Lett. A* **160**, 1, 1-8 (1991).

258. **[Hardy 91 b]**: L. Hardy, "A new way to obtain Bell inequalities", *Phys. Lett. A* **161**, 1, 21-25 (1991).

259. **[Hardy 92 a]**: L. Hardy, "Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz-invariant realistic theories", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 20, 2981-2984 (1992). Comments: **[Berndl-Goldstein 94]**, **[Schauer 94]**. Ver **[Clifton-Niemann 92]**, **[Vaidman 93]**, **[Cohen-Hiley 95 a]**, **[Cohen-Hiley 96]**.

260. **[Hardy 92 b]**: L. Hardy, "A quantum optical experiment to test local realism", *Phys. Lett. A* **167**, 1, 17-23 (1992).

261. **[Hardy 92 c]**: L. Hardy, "Source of photons with correlated polarisations and correlated directions", *Phys. Lett. A* **161**, 4, 326-328 (1992).

262. @ **[Hardy 92 d]**: L. Hardy, "Nonlocality, violation of Lorentz invariance, and wave-particle duality in quantum theory", Ph. D. thesis, University of Durham, 1992.

263. **[Hardy-Squires 92]**: L. Hardy, & E. J. Squires, "On the violation of Lorentz-invariance in deterministic hidden-variable interpretations of quantum theory", *Phys. Lett. A* **168**, 3, 169-173 (1992).

264. **[Hardy 93]**: L. Hardy, "Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 11, 1665-1668 (1993). Ver **[Goldstein 94]**.

265. **[Hardy 94]**: L. Hardy, "Nonlocality of a single photon revisited", *Phys. Rev. Lett.* **73**, 17, 2279-2283 (1994). Ver **[Peres 95 a]**. Comments: **[Vaidman 95 a]**, **[Greenberger-Horne-Zeilinger 95]**.

266. **[Hardy 95 a]**: L. Hardy, "The EPR argument and nonlocality without inequalities for a single photon", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler*, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 600-615 (1995) [(b)].

267. **[Hardy 95 b]**: L. Hardy, "Hardy replies [to comments on 'Nonlocality of a single photon revisited']", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 10, 2065-2066 (1995). Respuesta a **[Vaidman 95 a]**, **[Greenberger-Horne-Zeilinger 95]**. Ver **[Hardy 94]**.

268. **[Healey 89]**: R. Healey, *The philosophy of quantum mechanics: An interactive interpretation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

269. **[Heisenberg 30]**: W. Heisenberg, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, Hirzel, Leipzig, 1930. Versión en inglés: *The physical principles of the quantum theory*, University of Chicago Press, Chicago, 1930; Reeditado por Dover, New York.

270. **[Herbert 75]**: N. Herbert, "Cryptographic approach to hidden variables", *Am. J. Phys.* **43**, 4, 315-316 (1975). Ver **[Stapp 85]**, **[Mermin 89]**.

271. **[Herbut 92]**: F. Herbut, "On Pitowssky's 'The relativity of quantum predictions'", *Phys. Lett. A* **163**, 1-2, 5-6 (1992). Comment a **[Pitowsky 91]**. Respuesta: **[Pitowsky 92]**.

272. ♦ @ **[Hermann 35]**: G. Hermann, "Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik (Anzug)", *Abhandlungen de Freis'schen Schule* **6**, ?, 75-152 (1935).

273. **[Herzog-Kwiat-Weinfurter-Zeilinger 95]**: T. J. Herzog, P. G. Kwiat, H. Weinfurter, A. Zeilinger, "Complementarity and the quantum eraser", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 17, 3034-3037 (1995).

274. **[Heywood-Redhead 83]**: P. Heywood, & M. L. G. Redhead, "Nonlocality and the Kochen-Specker paradox", *Found. Phys.* **13**, 5, 481-499 (1983) (k).

275. **[Hnilo 93]**: A. A. Hnilo, "On the convenience of using Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) states for testing quantum mechanics (QM) vs. objective local theories (OLT)", en A. van der Merwe, & F. Selleri (eds.), *Bell's theorem and the foundations of modern physics. Proceedings of an international conference (Cesena, Italy, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 285-292 (h). Versión reducida de **[Hnilo 94]**.

276. **[Hnilo 94]**: A. A. Hnilo, "On testing objective local theories by using Greenberger-Horne-Zeilinger states", *Found. Phys.* **24**, 1, 139-162 (1994).

277. **[Holland 88]**: P. R. Holland, "Causal interpretation of a system of two spin-1/2 particles", *Phys. Rep.* **169**, 5, 293-327 (1988).

278. @ **[Holland 93]**: P. Holland, *The quantum theory of motion. An account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

279. **[Home-Sengupta 84]**: D. Home, & S. Sengupta, "Bell's inequality and non-contextual dispersion-free states", *Phys. Lett. A* **102**, 4, 159-162 (1984). Ver **[Elby 90 c]**, **[Home-Sengupta 91]**, **[Elby 91]**.

280. **[Home-Sengupta 91]**: D. Home, & S. Sengupta, "A comment on 'Critique of Home and Sengupta's derivation of a Bell inequality'", *Found. Phys. Lett.* **4**, 5, 451-454 (1991) (g). Comment a **[Elby 90 c]**. Respuesta: **[Elby 91]**. Ver **[Home-Sengupta 84]**.

281. **[Home-Selleri 91]**: D. Home, & F. Selleri, "Bell's theorem and the EPR paradox", *Rivi. Nuovo Cimento* **14**, 9, 1-95 (1991).

282. **[Home-Agarwal 95]**: D. Home, & G. S. Agarwal, "Quantum nonlocality of a single photon states", *Phys. Lett. A* **209**, 1-2, 1-5 (1995).

283. **[Hong-Ou-Mandel 87]**: C. K. Hong, Z. Y. Ou, & L. Mandel, "Measurements of subpicosecond time intervals between two photons by interference", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 18, 2044-2046 (1987).

284. **[Hong-yi-Klauder 94]**: F. Hong-yi, & J. R. Klauder, "Eigenvectors of two particles' relative position and total momentum", *Phys. Rev. A* **49**, 2, 704-707 (1994).

285. **[Hong-yi-Xiong 95]**: F. Hong-yi, & Y. Xiong, "Common eigenstates of two particles' center-of-mass coordinates and mass-weighted relative momentum", *Phys. Rev. A* **51**, 4, 3343-3346 (1995).

286. **[Hooker 70]**: C. A. Hooker, "Concerning Einstein's, Podolsky's, and Rosen's objection to quantum theory", *Am. J. Phys.* **38**, 7, 851-857 (1970). Comments: **[Schlegel 71]**, **[Erlichson 72]**. Ver **[Hooker 72]**.

287. **[Hooker 75]**: C. A. Hooker (ed.), *The logico-algebraic approach to quantum mechanics. Volume I: Historical evolution*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1975 (f), (h).

288. **[Hooker 79]**: C. A. Hooker (ed.), *The logico-algebraic approach to quantum mechanics. Volume II. Contemporary consolidation*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1979.

289. **[Horgan 93]**: J. Horgan, "The artist, the physicist and the waterfall", *Sci. Am.* **268**, 2, 12 (1993). Versión en castellano: "Escher y Penrose junto a la cascada", *Investigación y Ciencia* 198, 36-37 (marzo 1993).

290. @ **[Horne 70]**: M. A. Horne, "Experimental consequences of local hidden variables theories", Ph. D. thesis, Boston University, 1970.

291. **[Horne-Shimony 84]**: M. A. Horne, & A. Shimony, "Comment on 'Bell's theorem: Does the Clauser-Horne inequality hold for all local theories?'", *Phys. Rev. Lett.* **53**, 13, 1296 (1984). Comment a **[Angelidis 83]**.

292. ♦ @ **[Horne-Zeilinger 85]**: M. A. Horne, & A. Zeilinger, "A Bell-type EPR experiment using linear momenta", en P. Lahti, & P. Mittelstaedt (eds.), *Symposium on the Foundations of Modern Physics (?, ?)*, World Scientific, Singapore, 1985, pp. 435-439.

293. **[Horne-Zeilinger 86]**: M. A. Horne, & A. Zeilinger, "Einstein-Podolsky-Rosen interferometry", en D. M. Greenberger (ed.), *New techniques and ideas in quantum measurement theory. Proceedings of an international conference (New York, 1986), Ann. New York Acad. Sci.* **480**, New York, 1986, pp. 469-474.

294. **[Horne-Zeilinger 88]**: M. A. Horne, & A. Zeilinger, "A possible spin-less experimental test of Bell's inequality", en A. van der Merwe, F. Selleri, & G. Tarozzi (eds.), *Microphysical reality and quantum formalism. Proceedings of an international conference (Urbino, Italy, 1985)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1988, Vol. 2, pp. 401-411.

295. **[Horne-Shimony-Zeilinger 89]**: M. A. Horne, A. Shimony, & A. Zeilinger, "Two particle interferometry", *Phys. Rev. Lett.* **62**, 19, 2209-2212 (1989).

296. **[Horne-Shimony-Zeilinger 90]**: M. A. Horne, A. Shimony, & A. Zeilinger, "Two-particle interferometry", *Nature* **347**, 6292, 429-430 (1990).

297. **[Horodecki-Horodecki-Horodecki 95]**: R. Horodecki, P. Horodecki, & M. Horodecki, "Violating Bell inequality by mixed spin-1/2 states: necessary and sufficient condition", *Phys. Lett. A* **200**, 5, 340-344 (1995). Ver **[Aravind 95]**.

298. **[Horodecki 96]**: R. Horodecki, "Two spin-1/2 mixtures and Bell's inequalities", *Phys. Lett. A* **210**, 4-5, 223-226 (1996).

299. **[Horodecki-Horodecki 96]**: P. Horodecki, & R. Horodecki, "Comment on 'Correlation inequalities and hidden variables'", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 12, 2196-2197 (1996). Comment a **[Garg-Mermin 82 b]**.

300. **[Howard 85]**: D. Howard, "Einstein on locality and separability", *Stud. Hist. Phil. Sci.* **16**, 3, 171-201 (1985). Ver **[Fine 86]**, **[Fine 89]** (Sec. 1), **[Deltete-Guy 91]**, **[Hájek-Bub 92]**, **[Combourieu 92]**.

301. @ **[Howard 89]**: D. Howard, "Holism, separability, and the metaphysical implications of the Bell experiments", en J. Cushing, & E. McMullin (eds.), *Philosophical consequences of quantum theory: Reflections on Bell's theorem*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1989, pp. 224-253.

302. @ **[Hughes 89]**: R. I. G. Hughes, *The structure and interpretation of quantum mechanics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1989.

303. **[Hultgren-Shimony 77]**: B. O. Hultgren III, & A. Shimony, "The lattice of verifiable propositions of the spin-1 system", *J. Math. Phys.* **18**, 3, 381-394 (1977).

304. @ **[Humphreys 80]**: P. Humphreys, "A note on Demopoulos' paper 'Locality and the algebraic structure of quantum mechanics'", en **[Suppes 80]**, pp. 145-147. Comment a **[Demopoulos 80]**. Ver **[Bub 80]**.

305. **[Huttner-Imoto-Gisin-Mor 95]**: B. Huttner, N. Imoto, N. Gisin, & T. Mor, "Quantum cryptography with coherent states", *Phys. Rev. A* **51**, 3, 1863-1869 (1995).

306. **[Jammer 66]**: M. Jammer, *The conceptual development of quantum mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1966. Segunda edición: Tomash Publishers, American Institute of Physics, New York, 1989.

307. **[Jammer 74]**: M. Jammer, *The philosophy of quantum mechanics: The interpretations of quantum mechanics in historical perspective*, Wiley, New York, 1974.

308. **[Jammer 80]**: M. Jammer, "Le paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen", *La Recherche* **11**, 111, 510-519 (1980).

309. **[Jammer 90]**: M. Jammer, "John Stewart Bell and his work —On the occasion of his sixtieth birthday", *Found. Phys.* **20**, 10, 1139-1145 (1990).

310. **[Jammer 93]**: M. Jammer, "John Stewart Bell and the debate on the significance of his contributions to the foundations of quantum mechanics", en A. van der Merwe, & F. Selleri (eds.), *Bell's theorem and the foundations of modern physics. Proceedings of an international conference (Cesena, Italy, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1993, pp. 1-23 (h).

311. **[Jauch-Piron 63]**: J. M. Jauch, & C. Piron, "Can hidden variables be excluded in quantum mechanics?", *Helv. Phys. Acta* **36**, 7, 827-837 (1963) (ñ).

312. **[Jauch-Piron 68]**: J. M. Jauch, & C. Piron, "Hidden variables revisited", *Rev. Mod. Phys.* **40**, 1, 228-229 (1968).

313. **[Jauch 68]**: J. M. Jauch, *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.

314. **[Jones 91]**: M. R. Jones, "Some difficulties for Clifton, Redhead, and Butterfield's recent proof of nonlocality", *Found. Phys. Lett.* **4**, 4, 385-394 (1991) (g). Comment a **[Clifton-Redhead-Butterfield 91 a]**. Ver **[Clifton-Redhead-Butterfield 91 b]**.

315. **[Jones-Adelberger 94]**: R. T. Jones, & E. G. Adelberger, "Quantum mechanics and Bell's inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 17, 2675-2677 (1994). Comment: **[Santos 96 b]**. Ver **[Santos 91]**.

316. **[Jordan 85]**: T. M. Jordan, "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 11 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

317. **[Jordan 93]**: T. F. Jordan, "Disappearance and reapperance of macroscopic quantum interference", *Phys. Rev. A* **48**, 3, 2449-2450 (1993).

318. **[Jordan 94 a]**: T. F. Jordan, "Testing Einstein-Podolsky-Rosen assumptions without inequalities with two photons or particles with spin 1/2", *Phys. Rev. A* **50**, 1, 62-66 (1994).

319. **[Jordan 94 b]**: T. F. Jordan, "Quantum mysteries explored", *Am. J. Phys.* **62**, 10, 874-880 (1994).

320. **[Kar-Roy 95]**: G. Kar, & S. Roy, "Unsharp spin-1/2 observables and CHSH inequalities", *Phys. Lett. A* **199**, 1-2, 12-14 (1995).

321. **[Kar 95]**: G. Kar, "Noncommuting spin-1/2 observables and the CHSH inequality", *Phys. Lett. A* **204**, 2, 99-101 (1995). Ver **[Cereceda 96 b]**.

322. **[Kar 96]**: G. Kar, "A simple proof of the converse of Hardy's nonlocality theorem", preprint, 1996 [(a)].

323. **[Kernaghan 94]**: M. Kernaghan, "Bell-Kochen-Specker theorem for 20 vectors", *J. Phys. A* **27**, 21, L829-L830 (1994). Ver **[Peres 91]**, **[Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 a]**.

324. **[Kernaghan-Peres 95]**: M. Kernaghan, & A. Peres, "Kochen-Specker theorem for eight-dimensional space", *Phys. Lett. A* **198**, 1, 1-5 (1995).

325. **[Kernaghan 95]**: M. Kernaghan, "The Kochen-Specker paradox. A doctoral dissertation in the History and Philosophy of Science", Ph. D. thesis, University of Western Ontario, London, Canada, 1995 (disponible en http://www.ark.com/~mkernagh/kospec/root.html).

326. **[Kiess-Shih-Sergienko-Alley 93]**: T. E. Kiess, Y. H. Shih, A. V. Sergienko, & C. O. Alley, "Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by type-II parametric down-conversion", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 24, 3893-3897 (1993).

327. **[Kiess-Shih-Sergienko-Alley 95]**: T. E. Kiess, Y. H. Shih, A. V. Sergienko, & C. O. Alley, "Tunable Bell-inequality violations by non-maximally-violating states in type-II parametric down-conversion", *Phys. Rev. A* **52**, 4, 3344-3347 (1995).

328. **[Klyshko 93]**: D. N. Klyshko, "The Bell and GHZ theorems: A possible three-photon interference experiment and the question of nonlocality", *Phys. Lett. A* **172**, 6, 399-403 (1993).

329. **[Koç 80]**: Y. Koç, "A non-completeness argument for quantum mechanics (analysis of the EPR paper)", *Phys. Lett. A* **79**, 1, 9-12 (1980). Ver **[Koç 81]**, **[Koç 82]**.

330. **[Koç 81]**: Y. Koç, "A critical analysis of N. Bohr's reply to the EPR argument", *Phys. Lett. A* **81**, 8, 436-440 (1981). Comment: **[Madsen 81]**. Ver **[Koç 80]**, **[Koç 82]**.

331. **[Koç 82]**: Y. Koç, "Some remarks on the 'no-interaction' assumption in the Einstein-Podolsky-Rosen argument", *Phys. Lett. A* **90**, 9, 451-454 (1982). Ver **[Koç 80]**, **[Koç 81]**.

332. **[Kochen-Specker 65 a]**: S. Kochen, & E. P. Specker, "Logical structures arising in quantum theory", en J. W. Addison *et al.* (eds.), *The theory of models,*

1963 Symposium at Berkeley, North-Holland, Amsterdam, Holland, 1965, pp. 177-189. Reimpreso en **[Hooker 75]**, pp. 263-276.

333. **[Kochen-Specker 65 b]**: S. Kochen, & E. P. Specker, "The calculus of partial propositional functions", en Y. Bar-Hillel (ed.), *Logic, methodology and philosophy of science. Proceedings of the 1964 International Congress at Jerusalem*, 1965, pp. 45-57 (i). Reimpreso en **[Hooker 75]**, pp. 277-292.

334. **[Kochen-Specker 67]**: S. Kochen, & E. P. Specker, "The problem of hidden variables in quantum mechanics", *J. Math. Mech.* **17**, 1, 59-87 (1967) (i). Reimpreso en **[Hooker 75]**, pp. 293-328.

335. ♦ @ **[Kochen 85]**: S. Kochen, "A new interpretation of quantum mechanics", en P. Lahti, & P. Mittelstaedt (eds.), *Symposium on the Foundations of Modern Physics (?, ?)*, World Scientific, Singapore, 1985, pp. 151-169.

336. **[Kocher-Commins 67]**: C. A. Kocher, & E. D. Commins, "Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade", *Phys. Rev. Lett.* **18**, 15, 575-577 (1967).

337. **[Krenn-Zeilinger 95]**: G. Krenn, & A. Zeilinger, "Entangled entanglement", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 873-876 (1995) (b).

338. **[Krips 74]**: H. Krips, "Foundations of quantum theory. Part I", *Found. Phys.* **4**, 2, 181-193 (1974).

339. **[Krips 77]**: H. Krips, "Quantum theory and measures on Hilbert space", *J. Math. Phys.* **18**, 5, 1015-1021 (1977).

340. **[Krips 87]**: H. Krips, *The metaphysics of quantum theory*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

341. **[Kuhn 77]**: T. S. Kuhn, *The essential tension. Selected studies in scientific tradition and change*, University of Chicago Press, Chicago, 1977. Versión en castellano: *La tensión esencial. Estudios selectos sobre la tradición y el cambio en el ámbito de la ciencia*, Fondo de Cultura Económica, México, 1982.

342. **[Kwiat-Vareka-Hong-Nathel-Chiao 90]**: P. G. Kwiat, W. A. Vareka, C. K. Hong, H. Nathel, & R. Y. Chiao, "Correlated two-photon interference in a dual-beam Michelson interferometer", *Phys. Rev. A* **41**, 5, 2910-2913 (1990).

343. **[Kwiat-Eberhard-Steinberger-Chiao 94]**: P. G. Kwiat, P. H. Eberhard, A. M. Steinberger, & R. Y. Chiao, "Proporsal for a loophole-free Bell inequality experiment", *Phys. Rev. A* **49**, 5, Part A, 3209-3220 (1994).

344. **[Kwiat-Steinberger-Chiao 94]**: P. G. Kwiat, A. M. Steinberger, & R. Y. Chiao, "Three proposed 'quantum erasers'", *Phys. Rev. A* **49**, 1, 61-68 (1994).

345. **[Kwiat 95]**: P. G. Kwiat, "Comment on 'Reliability of Bell-inequality measurements using polarization correlations in parametric-down-conversion photon sources'", *Phys. Rev. A* **52**, 4, 3380-3381 (1995). Comment a **[de Caro-Garuccio 94]**.

346. **[Kwiat-Mattle-Weinfurter-Zeilinger-Sergienko-Shih 95]**: P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, & Y. Shih, "New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 24, 4337-4341 (1995).

347. **[Lahti 90]**: P. J. Lahti, "Quantum theory of measurement and the polar decomposition of an interaction", *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 4, 339-350 (1990).

348. **[Lamehi Rachti-Mittig 76]**: M. Lamehi Rachti, & W. Mittig, "Quantum mechanics and hidden variables: A test of Bell's inequality by the measurement of the spin correlation in low-energy proton-proton scattering", *Phys. Rev. D* **14**, 10, 2543-2555 (1976). Reimpreso en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 422-434.

349. **[Lenard 74]**: A. Lenard, "A remark on the Kochen-Specker theorem", en C. P. Enz, & J. Mehra (eds.), *Physical reality and mathematical description*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1974, pp. 226-233 (m).

350. **[Lloyd 95]**: S. Lloyd, "Quantum-mechanical computers", *Sci. Am.* **273**, 4, 44-50. Versión en castellano: "Computación mecánico-cuántica", *Investigación y Ciencia* 231, 20-26 (diciembre 1995).

351. **[Lo-Shimony 81]**: T. K. Lo, & A. Shimony, "Proposed molecular test of local hidden-variables theories", *Phys. Rev. A* **23**, 6, 3003-3012 (1981). Comment: **[Santos 84]**. Ver **[Shimony 84 b]**.

352. **[Locher 71]**: J. L. Locher (ed.), *?*, Meulenhoff, Amsterdam, 1971. Versión en inglés: *The world of M. C. Escher*, Abradale Press, Harry N. Abrams, New York, 1988 (l).

353. **[Mackey 57]**: G. Mackey, "Quantum mechanics and Hilbert space", *Am. Math. Monthly* **64**, 10, part II, 45-57 (1957) (i).

354. @ **[Mackey 60]**: G. W. Mackey, *Lecture notes on the mathematical foundations of quantum mechanics*, mimeografía, Harvard University, Cambridge, Mass., 1960. Origen de **[Mackey 63]**.

355. **[Mackey 63]**: G. W. Mackey, *The mathematical foundations of quantum mechanics*, Benjamin, New York, 1963.

356. @ **[Maczynski 71 a]**: M. J. Maczynski, "Boolean properties of observables in axiomatic quantum mechanics", *Rep. Math. Phys.* **2**, 2, 135-150 (1971).

357. @ **[Maczynski 71 b]**: M. J. Maczynski, "On representing observables in axiomatic quantum mechanics by point mappings", *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Aston. Phys.* **19**, 4, 335-339 (1971).

358. **[Madsen 81]**: J. Madsen, "Reply to 'A critical analysis of N. Bohr's reply to the EPR argument'", *Phys. Lett. A* **83**, 3, 103-104 (1981). Comment a **[Koç 81]**.

359. **[Majorana 32]**: E. Majorana, "Atomi orientati in campo magnetico variabile", *Nuovo Cimento* **9**, 43-50 (1932).

360. **[Mann-Nakamura-Revzen 92]**: A. Mann, K. Nakamura, & M. Revzen, "Bell's inequality for mixed states", *J. Phys. A* **25**, 13, L851-L854 (1992).

361. **[Mann-Sanders-Munro 95]**: A. Mann, B. C. Sanders, & W. J. Munro, "Bell's inequality for an entanglement of nonorthogonal states", *Phys. Rev. A* **51**, 2, 989-991 (1995).

362. **[Manning 14]**: H. P. Manning, *Geometry of four dimensions*, Macmillan, New York, 1914; Dover, New York, 1956. Ver **[Hall 93]**, **[Sommerville 29]**, **[Coxeter 48]**, **[Dewdney 86]**.

363. **[Marmet 93]**: P. Marmet, "Quantum mechanics and its paradox: A realistic solution to Mermin's EPR apparatus", *Phys. Essays* **6**, 3, 436-439 (1993) (ñ). Ver **[Mermin 81 a]**, **[Mermin 81 b]**, **[Mermin 85]**.

364. **[Marshall-Santos-Selleri 83]**: T. W. Marshall, E. Santos, & F. Selleri, "Local realism has not been refuted by atomic cascade experiments", *Phys. Lett. A* **98**, 1-2, 5-9 (1983).

365. **[Marshall-Santos 85]**: T. W. Marshall, & E. Santos, en "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 9-11 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

366. **[Marshall-Santos 87]**: T. W. Marshall, & E. Santos, "Comment on 'Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences'", *Europhys. Lett.* **3**, 3, 293-296 (1987). Comment a **[Grangier-Roger-Aspect 86]**.

367. **[Marshall-Santos 89]**: T. W. Marshall, & E. Santos, "Stochastic optics: A local realistic analysis of optical tests of Bell inequalities", *Phys. Rev. A* **39**, 12, 6271-6283 (1989).

368. **[Martens-de Muynck 93]**: H. Martens, & W. M. de Muynck, "Single and joint spin measurements with a Stern-Gerlach device", *J. Phys. A* **26**, 8, 2001-2010 (1993). Ver **[Martens-de Muynck 94]**.

369. **[Martens-de Muynck 94]**: H. Martens, & W. M. de Muynck, "On the possibility of measuring the electron spin in an inhomogeneous magnetic field", *Found. Phys. Lett.* **7**, 4, 343-352 (1994) (g). Ver **[Martens-de Muynck 93]**.

370. **[Mashaal 95]:** M. Mashaal, "Zoologie des nombres", *La Recherche* **26**, 278, 724-726 (1995). Versión en castellano: "Zoología de los números", *Mundo Científico* **15**, 161, 806-810 (1995).

371. **[Maudlin 94]**: T. Maudlin, *Quantum non-locality and relativity*, Blackwell, Oxford, 1994 (e).

372. **[McGrath 78]**: J. H. McGrath, "A formal statement of the Einstein-Podolsky-Rosen argument", *Int. J. Theor. Phys.* **17**, 7, 557-571 (1978).

373. **[Mermin 80]**: N. D. Mermin, "Quantum mechanics vs local realism near the classical limit: A Bell inequality for spin *s*", *Phys. Rev. D* **22**, 2, 356-361 (1980).

374. **[Mermin 81 a]**: N. D. Mermin, "Bringing home the atomic world: Quantum mysteries for anyone", *Am. J. Phys.* **49**, 10, 940-943 (1981). Ver **[Mermin 81 b]**, **[Mermin 85]**, **[Allen 92]**, **[Marmet 93]**.

375. **[Mermin 81 b]**: N. D. Mermin, "Quantum mysteries for anyone", *J. Phil.* **78**, ?, 397-408 (1981). Reimpreso en **[Mermin 90 e]**, pp. 81-94.

376. **[Mermin-Schwarz 82]**: N. D. Mermin, & G. M. Schwarz, "Joint distributions and local realism in the higher-spin Einstein-Podolsky-Rosen experiment", *Found. Phys.* **12**, 2, 101-135 (1982) (k). Ver **[Garg-Mermin 82 a]**, **[Garg-Mermin 83]**, **[Garg 83]**, **[Garg-Mermin 87]**.

377. **[Mermin 85]**: N. D. Mermin, "Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 4, 38-47 (1985). Comments: **[Aspect 85]**, **[Marshall-Santos 85]**, **[Rohrlich 85]**, **[Feingold-Peres 85]**, **[Mirman 85]**, **[Gardner 85]**, **[Ekstrand 85]**. Ver **[Mermin 81 a]**, **[Mermin 81 b]**, **[Allen 92]**, **[Marmet 93]**.

378. @ **[Mermin 86 a]**: N. D. Mermin, "Generalizations of Bell's theorem to higher spins and higher correlations", en L. M. Roth, & A. Inomata (eds.), *Fundamental questions in quantum mechanics. Proceedings of a conference (Albany, New York, 1984)*, Gordon & Breach, London, 1986, pp. 7-20.

379. **[Mermin 86 b]**: N. D. Mermin, "The EPR experiment—Thoughts about the 'loophole'", en D. M. Greenberger (ed.), *New techniques and ideas in quantum measurement theory. Proceedings of an International Conference (New York, 1986), Ann. New York Acad. Sci.* **480**, New York, 1986, pp. 422-427.

380. **[Mermin 89]**: N. D. Mermin, "Can you help your team tonight by watching on TV? More experimental methaphysics from Einstein, Podolsky, and Rosen", en J. T. Cushing, & E. McMullin (eds.), *Philosophical consequences of quantum theory: Reflections on Bell's theorem*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1989, pp. ?-?. Reimpreso en **[Mermin 90 e]**, pp. 95-109. Ver **[Herbert 75]**, **[Stapp 85]**.

381. **[Mermin 90 a]**: N. D. Mermin, "What's wrong with these elements of reality?", *Phys. Today* **43**, 6, 9-11 (1990). Comments: **[Sawicki 90]**, **[Santos 90]**.

382. **[Mermin 90 b]**: N. D. Mermin, "Quantum mysteries revisited", *Am. J. Phys.* **58**, 8, 731-734 (1990). Comment: **[Sen 91]**.

383. **[Mermin 90 c]**: N. D. Mermin, "Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 15, 1838-1840 (1990).

384. **[Mermin 90 d]**: N. D. Mermin, "Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 27, 3373-3376 (1990).

385. **[Mermin 90 e]**: N. D. Mermin, *Boojums all the way through: Communicating science in a prosaic age*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990 [(a)].

386. **[Mermin 93 a]**: N. D. Mermin, "Some simple unified versions of the two theorems of John Bell", en M. A. del Olmo, M. Santander, & J. Mateos Guilarte (eds.), *Group theoretical methods in physics. Proceedings of the XIX International Colloquium (Salamanca, Spain, 1992)*, Ciemat-Real Sociedad Española de Física, Madrid, 1993, Vol. 2, pp. 3-17. Coincide esencialmente con **[Mermin 93 b]**.

387. **[Mermin 93 b]**: N. D. Mermin, "Hidden variables and the two theorems of John Bell", *Rev. Mod. Phys.* **65**, 3, 803-815 (1993). Coincide esencialmente con **[Mermin 93 a]**.

388. **[Mermin 94 a]**: N. D. Mermin, "What's wrong with this temptation?", *Phys. Today* **47**, 6, 9-11 (1994). Errata: *Phys. Today* **47**, 11, 119 (1994).

389. **[Mermin 94 b]**: N. D. Mermin, "Quantum mysteries refined", *Am. J. Phys.* **62**, 10, 880-887 (1994).

390. **[Mermin 95 a]**: N. D. Mermin, "The best version of Bell's theorem", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 616-623 (1995) [(b)].

391. **[Mermin 95 b]**: N. D. Mermin, "Limits to quantum mechanics as a source of magic tricks: Retrodiction and the Bell-Kochen-Specker theorem", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 6, 831-834 (1995). Ver **[Vaidman-Aharonov-Albert 87]**.

392. **[Messiah 64]**: A. Messiah, *Mécanique quantique*, 2 Vols, Dunod, Paris, 1964. Versión en castellano: *Mecánica cuántica*, 2 Vols., Tecnos, Madrid, 1965. Versión en inglés: *Quantum mechanics*, Wiley, NewYork, 1966.

393. **[Miller-Wheeler 84]**: W. A. Miller, & J. A. Wheeler, "Delayed-choice experiments and Bohr's elementary quantum phenomenon", en S. Kamefuchi et al. (eds.), *Foundations of quantum mechanics in the light of new technology. Proceedings of a conference (Kokubunji, Tokyo, 1983)*, Physical Society of Japan, Tokyo, 1984, pp. 140-151.

394. **[Mirman 85]**: R. Mirman, en "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 15 y 136 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

395. **[Misra 67]**: B. Misra, "When can hidden variables be excluded in quantum mechanics?", *Nuovo Cimento A* **47**, 4, 841-859 (1967).

396. **[Muller-Breguet-Gisin 93]**: A. Muller, J. Breguet, & N. Gisin, "Experimental demonstration of quantum cryptography using polarized photons in optical fibre over more than 1 km.", *Europhys. Lett.* **23**, 6, 383-388 (1993).

397. **[Muller-Zbinden-Gisin 95]**: A. Muller, H. Zbinden, & N. Gisin, "Underwater quantum coding", *Nature* **378**, 6556, 449 (1995).

398. **[Munro-Reid 94]**: W. J. Munro, & M. D. Reid, "Multiparticle and higher-spin tests of quantum mechanics using parametric down-conversion", *Phys. Rev. A* **50**, 5, 3661-3681 (1994).

399. @ **[Neumark 54]**: M. A. Neumark, "Operatorenalgebren im Hilbertschen Raum", en *Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis*, Verlag Kultur und Fortschritt, Berlin, 1954. El teorema de von Neumann-Neumark está en la p. 227; ver **[Von Neumann 31]**, **[Park-Margenau 68]**, **[Peres 90 b]**.

400. **[Nogueira-dos Aidos-Caldeira-Domingos 92]**: F. Nogueira, F. D. dos Aidos, M. H. Caldeira, & J. M. Domingos, "Expectation values and non-commuting operators", *Eur. J. Phys.* **13**, 6, 284-285 (1992).

401. **[de Obaldia-Shimony-Wittel 88]**: E. de Obaldia, A. Shimony, & F. Wittel, "Amplification of Belinfante's argument for the nonexistence of dispersion-free states", *Found. Phys.* **18**, 10, 1013-1021 (1988) [(h)].

402. **[Ochs 72]**: W. Ochs, "On Gudder's hidden-variable theorems", *Nuovo Cimento B* **10**, 1, 172-184 (1972).

403. **[Ögren 83]**: M. Ögren, "Some evaluations of Bell's inequality for particles of arbitrary spin", *Phys. Rev. D* **27**, 8, 1766-1773 (1983).

404. **[Ou-Hong-Mandel 87]**: Z. Y. Ou, C. K. Hong, & L. Mandel, "Relation between input and output states for a beam splitter", *Opt. Commun.* **63**, 2, 118-122 (1987).

405. **[Ou-Zou-Wang-Mandel 90]**: Z. Y. Ou, X. Y. Zou, L. J. Wang, & L. Mandel, "Observation of nonlocal interference in separated photon channels", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3, 321-324 (1990).

406. **[Ou-Pereira-Kimble-Peng 92]**: Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, & K. C. Peng, "Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 25, 3663-3666 (1992).

407. **[Pagonis-Redhead-Clifton 91]**: C. Pagonis, M. L. G. Redhead, & R. K. Clifton, "The breakdown of quantum non-locality in the classical limit", *Phys. Lett. A* **155**, 8-9, 441-444 (1991).

408. **[Pagonis-Clifton 92]**: C. Pagonis, & R. K. Clifton, "Hardy's nonlocality theorem for n spin-1/2 particles", *Phys. Lett. A* **168**, 2, 100-102 (1992). Ver **[Wu-Xie 96]**.

409. **[Pagonis-Clifton 95]**: C. Pagonis, & R. K. Clifton, "Unremarkable contextualism: Dispositions in the Bohm theory", *Found. Phys.* **25**, 2, 281-296 (1995).

410. **[Pais 82]**: A. Pais, *"Subtle is the Lord...". The science and the life of Albert Einstein*, Oxford University Press, New York, 1982. Versión en castellano: *"El Señor es sutil...". La ciencia y la vida de Albert Einstein*, Ariel, Barcelona 1984.

411. **[Pais 86]**: A. Pais, *Inward bound. Of matter and forces in the physical world*, Oxford University Press, New York, 1986.

412. **[Pais 91]**: A. Pais, *Niel's Bohr times, in physics, philosophy, and polity*, Oxford University Press, Oxford, 1991.

413. **[Papaliolios 67]**: C. Papaliolios, "Experimental test of a hidden-variable quantum theory", *Phys. Rev. Lett.* **18**, 15, 622-625 (1967).

414. **[Park-Margenau 68]**: J. L. Park, & H. Margenau, "Simultaneous measurement in quantum theory", *Int. J. Theor. Phys.* **1**, 3, 211-283 (1968). Ver **[Von Neumann 31]**, **[Neumark 54]**.

415. **[Parkins-Marte-Zoller-Kimble 93]**: A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, & H. J. Kimble, "Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of Zeeman coherence", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 19, 3095-3098 (1993).

416. **[Particle Data Group 94]**: Particle Data Group, "Review of particle properties", *Phys. Rev. D* **50**, 3, Part I, 1173-1825 (1994). Tablas de partículas que se publican cada dos años.

417. **[Paty 95]**: M. Paty, "The nature of Einstein's objections to the Copenhagen interpretation of quantum mechanics", *Found. Phys.* **25**, 1, 183-204 (1995).

418. **[Pauli 26]**: W. Pauli, "Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren", *Zeitschrift für Physik* **31**, 765-? (1926) (ñ).

419. **[Pauli 27]**: W. Pauli, "Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons", *Zeitschrift für Physik* **43**, 601-623 (1926) (ñ). Reimpreso en **[Biedenharn-Van Dam 65]**, pp. 14-36.

420. **[Pauli 33]**: W. Pauli, *Handbuch der Physik*, Vol. 24/1, Springer, Berlin, 1933 (2ª edición).

421. **[Peacock 92]**: K. A. Peacock, "Comment on 'Tests of signal locality and Einstein-Bell locality for multiparticle systems'", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 18, 2733 (1992). Comment a **[Roy-Singh 91]**.

422. **[Pellizzari-Gardiner-Cirac-Zoller 95]**: T. Pellizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac, & P. Zoller, "Decoherence, continuous observation, and quantum computing: A cavity QED model", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 21, 3788-3791 (1995).

423. ♦ @ **[Penrose-Penrose 58]**: L. S. Penrose, & R. Penrose, "Impossible objects: a special type of visual illusion", *British Journal of Psychology* **49**, 2 (?), ?-? (1958).

424. **[Penrose-Rindler 84]**: R. Penrose, & W. Rindler, *Spinors and space-time. Volume 1. Two-spinor calculus and relativistic fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

425. @ **[Penrose-Rindler 86]**: R. Penrose, & W. Rindler, *Spinors and space-time. Volume 2. Spinor and twistor methods in space-time geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

426. **[Penrose 89]**: R. Penrose, *The emperor's new mind: Concerning computers, minds, and the laws of physics*, Oxford University Press, Oxford, 1989. Versión en castellano: *La nueva mente del emperador*, Mondadori, Madrid, 1991.

427. **[Penrose 92]**: R. Penrose, "On Bell non-locality without probabilities: Some curious geometry", preprint, Mathematical Institute, Oxford, 1992 [(a)]. Prevista su publicación en J. Ellis, & A. Amati (eds.), *Quantum reflections. (?) in honour of J. S. Bell*, Cambridge University Press, Cambridge. Ver **[Zimba-Penrose 93]**.

428. **[Penrose 93]**: R. Penrose, "Quantum non-locality and complex reality", en G. F. R. Ellis, A. Lanza, & J. Miller (eds.), *The renaissance of general relativity and cosmology: A survey to celebrate the 65th birthday of Dennis Sciama*, Cambridge University Press, New York, 1993, pp. 314-325 [(a)].

429. ♦ @ **[Penrose 94 a]**: R. Penrose, "Non-locality and objectivity in quantum state reduction", en J. Anandan, & J. L. Safko (eds.), *Fundamental aspects of quantum theory*, World Scientific, Singapore, pp. ?-?.

430. **[Penrose 94 b]**: R. Penrose, *Shadows of the mind: A search for the missing science of consciousness*, Oxford University Press, Oxford, 1994. Versión en castellano: *Las sombras de la mente. Hacia una comprensión científica de la consciencia*, Mondadori, Barcelona, 1996.

431. **[Peres-Singer 60]**: A. Peres, & P. Singer, "On possible experimental tests for the paradox of Einstein, Podolsky and Rosen", *Nuovo Cimento* **15**, 6, 907-915 (1960). Ver **[Bohm-Aharonov 60]**.

432. **[Peres 78]**: A. Peres, "Unperformed experiments have no results", *Am. J. Phys.* **46**, 7, 745-747 (1978).

433. **[Peres-Ron 88]**: A. Peres, & A. Ron, "Cryptodeterminism and quantum theory", en A. van der Merwe, F. Selleri, & G. Tarozzi (eds.), *Microphysical reality and quantum formalism. Proceedings of an international conference (Urbino, Italy, 1985)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1988, Vol. 2, pp. 115-123.

434. **[Peres 89]**: A. Peres, "The logic of quantum nonseparability", en M. Kafatos (ed.), *Bell's theorem, quantum theory, and conceptions of the universe. Proceedings of a workshop (George Mason University, 1988)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1989, pp. 51-60 [(d)]. Ver **[Peres 93]** (Sec. 7. 4).

435. **[Peres 90 a]**: A. Peres, "Incompatible results of quantum measurements", *Phys. Lett. A* **151**, 3-4, 107-108 (1990).

436. **[Peres 90 b]**: A. Peres, "Neumark's theorem and quantum inseparability", *Found. Phys.* **20**, 12, 1441-1453 (1990). Ver **[Neumark 54]**.

437. **[Peres 91]**: A. Peres, "Two simple proofs of the Kochen-Specker theorem", *J. Phys. A* **24**, 4, L175-L178 (1991). Ver **[Peres 93]** (Sec. 7. 3), **[Kernaghan 94]**, **[Cabello-Estebaranz-García Alcaine 96 a]**.

438. **[Peres 92 a]**: A. Peres, "Recursive definition for elements of reality", *Found. Phys.* **22**, 3-4, 357-361 (1992).

439. **[Peres 92 b]**: A. Peres, "Emergence of local realism in fuzzy observations of correlated quantum systems", *Found. Phys.* **22**, 6, 819-828 (1992).

440. **[Peres 92 c]**: A. Peres, "An experimental test for Gleason's theorem", *Phys. Lett. A* **163**, 4, 243-245 (1992).

441. **[Peres 92 d]**: A. Peres, "Finite violation of a Bell inequality for arbitrarly large spin", *Phys. Rev. A* **46**, 7, 4413-4414 (1992).

442. **[Peres 93]**: A. Peres, *Quantum theory: Concepts and methods*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1993, 1995 (1ª reimpresión con correcciones).

443. **[Peres 95 a]**: A. Peres, "Nonlocal effects in Fock space", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2, 4571 (1995). Ver **[Hardy 94]**.

444. **[Peres 95 b]**: A. Peres, "Higher order Schmidt decompositions", *Phys. Lett. A* **202**, 1, 16-17 (1995). Ver **[Elby-Bub 94]**.

445. **[Peres 96 a]**: A. Peres, "Nathan Rosen 1909-95", *Phys. World* **9**, 2, 49 (1996).

446. **[Peres 96 b]**: A. Peres, "Generalized Kochen-Specker theorem", *Found. Phys.* **26**, 6, 807-812 (1996).

447. **[Perrie-Duncan-Beyer-Kleinpoppen 85]**: W. Perrie, A. J. Duncan, H. J. Beyer, & H Kleinpoppen, "Polarization correlation of the two photons emitted by metastable atomic deuterium: A test of Bell's inequality", *Phys. Rev. Lett.* **54**, 16, 1790-1793 (1985).

448. **[Phoenix 93]**: S. J. D. Phoenix, "Quantum cryptography without conjugate coding", *Phys. Rev. A* **48**, 1, 96-102 (1993).

449. @ **[Pipkin 78]**: F. M. Pipkin, "Atomic physics tests of the basic concepts in quantum mechanics", en D. R. Bates, & B. Bederson (eds.), *Advances in Atomic and Molecular Physics*, Academic Press, New York, 1978, Vol. 14, pp. 281-340.

450. **[Piron 72]**: C. Piron, "Survey of general quantum physics", *Found. Phys.* **2**, 4, 287-314 (1972). Reimpreso en **[Hooker 75]**, pp. 513-544.

451. **[Piron 76]**: C. Piron, *Foundations of quantum physics*, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1976.

452. **[Pitowsky 82]**: I. Pitowsky, "Substitution and truth in quantum logic", *Phil. Sci.* **49**, 3, 380-401 (1982) (o).

453. **[Pitowsky 91]**: I. Pitowsky, "The relativity of quantum predictions", *Phys. Lett. A* **156**, 3-4, 137-139 (1991). Comment: **[Herbut 92]**. Ver **[Pitowsky 92]**.

454. **[Pitowsky 92]**: I. Pitowsky, "Reply to Herbut's comment on 'The relativity of quantum predictions'", *Phys. Lett. A* **166**, 3-4, 292 (1992). Respuesta a **[Herbut 92]**. Ver **[Pitowsky 91]**.

455. **[Pittman-Shih-Sergienko-Rubin 95]**: T. B. Pittman, Y. H. Shih, A. V. Sergienko, & M. H. Rubin, "Experimental tests of Bell's inequalities based on space-time and spin variables", *Phys. Rev. A* **51**, 5, 3495-3498 (1995).

456. **[Pittman 95]**: T. B. Pittman, "On the use of double entanglement in four-photon experiments", *Phys. Lett. A* **204**, 3-4, 193-197 (1995).

457. **[Platt 92]**: D. E. Platt, "A modern analysis of the Stern-Gerlach experiment", *Am. J. Phys.* **60**, 4, 306-308 (1992).

458. **[Popescu-Rohrlich 92]**: S. Popescu, & D. Rohrlich, "Which states violate Bell's inequality maximally?", *Phys. Lett. A* **169**, 6, 411-414 (1992).

459. **[Rae 92]**: A. I. M. Rae, "Comment on 'Does quantum mechanics violate the Bell inequalities?'", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 17, 2700. Comment a **[Santos 91]**.

460. **[Rarity-Tapster 90]**: J. G. Rarity, & P. R. Tapster, "Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 21, 2495-2498 (1990).

461. **[Reck-Zeilinger-Bernstein-Bertani 94]**: M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein, & P. Bertani, "Experimental realization of any discrete unitary operator", *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1, 58-61 (1994).

462. **[Redhead 81]**: M. L. G. Redhead, "Experimental tests of the sum rule", *Phil. Sci.* **48**, 1, 50-64 (1981) (o).

463. **[Redhead 87]**: M. L. G. Redhead, *Incompleteness, nonlocality, and realism*, Oxford University Press, New York, 1987.

464. **[Reid-Munro 92]**: M. D. Reid, & W. J. Munro, "Macroscopic boson states exhibiting the Greenberger-Horne-Zeilinger contradiction with local realism", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 7, 997-1001 (1992).

465. **[Rohrlich 85]**: F. Rohrlich, en "Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 11, 11-15 (1985). Comment a **[Mermin 85]**.

466. **[Rosen 94]**: N. Rosen, "Bell's theorem and quantum mechanics", *Am. J. Phys.* **62**, 2, 109-110 (1994).

467. **[Roy-Singh 91]**: S. M. Roy, & V. Singh, "Tests of signal locality and Einstein-Bell locality for multiparticle systems", *Phys. Rev. Lett.* **67**, 20, 2761-2764 (1991). Comment: **[Peacock 92]**.

468. **[Roy-Singh 93]**: S. M. Roy, & V. Singh, "Quantum violation of stochastic noncontextual hidden-variable theories", *Phys. Rev. A* **48**, 4, 3379-3381 (1993).

469. **[Ruetsche 95]**: L. Ruetsche, "Measurement error and the Albert-Loewer problem", *Found. Phys. Lett.* **8**, 4, 327-344 (1995) (g). Ver **[Albert-Loewer 91]**.

470. **[Sakurai 85]**: J. J. Sakurai, & S. F. Tuan (ed.), *Modern quantum mechanics*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1985. Edición revisada: Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.

471. **[Santos 84]**: E. Santos, "Comment on 'Proposed molecular test of local hidden-variables theories'", *Phys. Rev. A* **30**, 4, 2128-2129 (1984). Comment a **[Lo-Shimony 81]**. Ver **[Shimony 84 b]**.

472. **[Santos 86]**: E. Santos, "The Bell inequalities as tests of classical logic", *Phys. Lett. A* **115**, 8, 363-365 (1986).

473. **[Santos 88]**: E. Santos, "The search for hidden variables in quantum mechanics", en F. Selleri (ed.), *Quantum mechanics versus local realism: The Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Plenum Press, New York, 1988, pp. 365-390.

474. **[Santos 90]**: E. Santos, en "Can demolition of the 'elements of reality' proceed on schedule?", *Phys. Today* **43**, 12, 11-13 (1990). Comment a **[Mermin 90 a]**.

475. **[Santos 91]**: E. Santos, "Does quantum mechanics violate the Bell inequalities?", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 11, 1388-1390 (1991). Comments: **[Rae 92]**, **[Ben Aryeh-Postan 92]**. Contraejemplo: **[Jones-Adelberger 94]**. Ver **[Santos 92 b]**.

476. **[Santos 92 a]**: E. Santos, "Comment on 'Nonlocality of a single photon'", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 6, 894 (1992). Comment a **[Tan-Walls-Collett 91]**.

477. **[Santos 92 b]**: E. Santos, "Reply to comments on 'Does quantum mechanics violate the Bell inequalities?'", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 17, 2702-2703 (1992). Respuesta a **[Rae 92]**, **[Ben Aryeh-Postan 92]**.

478. **[Santos 92 c]**: E. Santos, "Critical analysis of the empirical tests of local hidden-variable theories", *Phys. Rev. A* **46**, 7, 3646-3656 (1992).

479. **[Santos 95]**: E. Santos, "Constraints for the violation of the Bell inequality in Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiments", *Phys. Lett. A* **200**, 1, 1-6 (1995).

480. **[Santos 96 a]**: E. Santos, "Unreliability of performed tests of Bell's inequality using parametric down-converted photons", *Phys. Lett. A* **212**, 1-2, 10-14 (1996).

481. **[Santos 96 b]**: E. Santos, "Comment on 'Quantum mechanics and Bell's inequalities'", preprint, 1995. Comment a **[Jones-Adelberger 94]**.

482. **[Sanz-Sánchez Gómez 90]**: A. L. Sanz, & J. L. Sánchez Gómez, "The classical, high-spin limit of the Bell-Mermin inequality", *Anales de Física A* **86**, 1, 77-84 (1990).

483. **[Sanz 90]**: A. L. Sanz, "Algunas cuestiones de fundamentación de la teoría cuántica: Separabilidad y aspectos estocásticos", tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid, 1990.

484. **[Sawicki 90]**: M. Sawicki, en "Can demolition of the 'elements of reality' proceed on schedule?", *Phys. Today* **43**, 12, 11-13 (1990). Comment a **[Mermin 90 a]**.

485. **[Schauer 94]**: D. L. Schauer, "Comment on 'Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz-invariant realistic theories'", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 5, 782 (1994). Comment a **[Hardy 92 a]**.

486. **[Schiff 49]**: L. I. Schiff, *Quantum mechanics*, McGraw-Hill, New-York, 1949 (1ª edición), 1968 (3ª edición). Versión (bilingue) en castellano (de la 2ª edición): *Mecánica cuántica*, McGraw-Hill (?), New-York (?), ?.

487. **[Schlegel 71]**: R. Schlegel, "The Einstein-Podolsky-Rosen paradox", *Am. J. Phys.* **39**, 4, 458 (1971). Comment a **[Hooker 70]**. Ver **[Erlichson 72]**.

488. **[Schlienz-Mahler 95]**: J. Schlienz, & G. Mahler, "Description of entanglement", *Phys. Rev. A* **52**, 6, 4396-4404 (1995).

489. **[Schmidt 07 a]**: E. Schmidt, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener", *Math. Ann.* **63**, 433-476 (1907) (i).

490. **[Schmidt 07 b]**: E. Schmidt, "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Zweite Abhandlung: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung", *Math. Ann.* **64**, 161-174 (1907) (i).

491. **[Schrödinger 35 a]**: E. Schrödinger, "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften* **23**, 48, 807-812; 49, 823-828; 50, 844-849 (1935) (ñ). Traducción inglesa: J. D. Trimmer, "The present situation in quantum mechanics: A translation of Schrödinger's 'cat paradox'", *Proc. Am. Phil. Soc.* **124**, 5, 323-338 (1980) (o). Reproducido en **[Wheeler-Zurek 83]**, pp. 152-167.

492. **[Schrödinger 35 b]**: E. Schrödinger, "Discussion of probability relations between separated systems", *Proc. Camb. Phil. Soc.* **31**, 555-563 (1935) (n).

493. **[Schrödinger 36]**: E. Schrödinger, "Probability relations between separated systems", *Proc. Camb. Phil. Soc.* **32**, 446-452 (1936) (n).

494. **[Schwinger-Scully-Englert 88]**: J. Schwinger, M. O. Scully, & B.-G. Englert, "Is spin coherence like Humpty-Dumpty? II. General theory", *Zeitschrift für Physik D* **10**, 2-3, 135-144 (1988) (ñ). Ver **[Englert-Schwinger-Scully 88]** (I), **[Scully-Englert-Schwinger 89]** (III).

495. **[Scully-Englert-Schwinger 89]**: M. O. Scully, B.-G. Englert, & J. Schwinger, "Spin coherence and Humpty-Dumpty. III. The effects of observation", *Phys. Rev. A* **40**, 4, 1775-1784 (1989). Ver **[Englert-Schwinger-Scully 88]** (I), **[Schwinger-Scully-Englert 88]** (II).

496. **[Scully-Englert-Walther 91]**: M. O. Scully, B.-G. Englert, & H. Walther, "Quantum optical tests of complementarity", *Nature* **351**, 6322, 111-116 (1991).

497. **[Selleri 85]**: F. Selleri, "Local realistic photon models and EPR-type experiments", *Phys. Lett. A* **108**, 4, 197-202 (1985).

498. **[Selleri 88]**: F. Selleri, "History of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", en F. Selleri (ed.), *Quantum mechanics versus local realism: The Einstein-Podolsky-Rosen paradox*, Plenum Press, New York, 1988, pp. 1-61.

499. **[Selleri 90]**: F. Selleri, *Quantum paradoxes and physical reality*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1990.

500. **[Sen 91]**: A. Sen, "Comment on 'Quantum mysteries revisited', by N. David Mermin [*Am. J. Phys.* **58**, 731-734 (1990)]", *Am. J. Phys.* **59**, 8, 761 (1991). Comment a **[Mermin 90 b]**.

501. **[Shih-Rubin 93]**: Y. H. Shih, & M. H. Rubin, "Four photon interference experiment for the testing of the Greenberger-Horne-Zeilinger theorem", *Phys. Lett. A* **182**, 1, 16-22 (1993).

502. **[Shimony 84 a]**: A. Shimony, "Contextual hidden variables theories and Bell's inequalities", *Brit. J. Phil. Sci.* **35**, 1, 25-45 (1984) (o). Reimpreso en **[Shimony 93]**, pp. 104-129 (con un comment sobre GHZ).

503. **[Shimony 84 b]**: A. Shimony, "Response to 'Comment on "Proposed molecular test of local hidden-variables theories"'", *Phys. Rev. A* **30**, 4, 2130-2131 (1984). Respuesta a **[Santos 84]**. Ver **[Lo-Shimony 81]**.

504. **[Shimony 93]**: A. Shimony, *Search for a naturalistic world view. Vol II: Natural science and metaphysics*, Cambridge University Press, New York, 1993.

505. **[Shimony 95]**: A. Shimony, "Degree of entanglement", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 675-679 (1995) [b].

506. **[Shor 95]**: P. W. Shor, "Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory", *Phys. Rev. A* **52**, 4, R2493-R2496 (1995).

507. **[Shore-Knight 93]**: B. W. Shore, & P. L. Knight, "The Jaynes-Cummings model", *J. Mod. Opt.* **40**, 7, 1195-1238 (1993).

508. **[Sleator-Weinfurter 95]**: T. Sleator, & H. Weinfurter, "Realizable universal quantum logic gates", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 20, 4087-4090 (1995).

509. **[Sommerville 29]**: D. M. Y. Sommerville, *An introduction to the geometry of n dimensions*, Methuen, London, 1929; Dover, New York, 1958 [i]. Ver **[Hall 93]**, **[Manning 14]**, **[Sommerville 29]**, **[Coxeter 48]**, **[Dewdney 86]**.

510. **[Specker 60]**: E. P. Specker, "Die Logik nicht gleichzeitig entscheidbarer Aussagen", *Dialectica* **14**, 54-55, 239-246 (1960) [c]. Traducción inglesa: "The logic of propositions which are not simultaneously decidable", en **[Hooker 75]**, pp. 135-140.

511. @ **[Squires 94 b]**: E. J. Squires, *The mysteries of the quantum world*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994 (2ª edición).

512. **[Stachel 89]**: J. Stachel (ed.), *The collected papers of Albert Einstein. Volume 2. The Swiss years: Writings, 1900-1909*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989 [i].

513. @ **[Stairs 78]**: A. Stairs, "Quantum mechanics, logic and reality", Ph. D. dissertation, University of Western Ontario, 1978.

514. **[Stairs 83]**: A. Stairs, "Quantum logic, realism, and value definiteness", *Phil. Sci.* **50**, 4, 578-602 (1983) [c].

515. **[Stapp 75]**: H. P. Stapp, "Bell's theorem and world process", *Nuovo Cimento B* **29**, 2, 270-276 (1975).

516. **[Stapp 91]**: H. P. Stapp, "EPR and Bell's theorem: A critical review", *Found. Phys.* **21**, 1, 1-23 (1991).

517. **[Stapp 92]**: H. P. Stapp, "Noise-induced reduction of wave packets and faster-than-light influences", *Phys. Rev. A* **46**, 11, 6860-6868 (1992).

518. **[Stapp 93 a]**: H. P. Stapp, "Significance of an experiment of the Greenberger-Horne-Zeilinger kind", *Phys. Rev. A* **47**, 2, 847-853 (1993).

519. **[Stapp 93 b]**: H. P. Stapp, *Mind, matter, and quantum mechanics*, Springer, New York, 1993 [f].

520. **[Stapp 94]**: H. P. Stapp, "Strong versions of Bell's theorem", *Phys. Rev. A* **49**, 5, Part A, 3182-3187 (1994).

521. **[Streater-Wightman 64]**: R. F. Streater, & A. S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, Benjamin, New York, 1964.

522. **[Stroke 95]**: H. H. Stroke (ed.), *The Physical Review: The first hundred years. A selection of seminal papers and comentaries*, American Institute of Physics Press, Woodbury, New York, 1995.

523. **[Styer 96]**: D. F. Styer, "Common misconceptions regarding quantum mechanics", *Am. J. Phys.* **64**, 1, 31-34 (1996). Errata: *Am. J. Phys.* **64**, 9, 1202 (1996).

524. @ **[Suppes 80]**: P. Suppes (ed.), *Studies in the foundations of quantum mechanics*, East Lansing, Michigan, 1980.

525. **[Suppes-Zanotti 91]**: P. Suppes, & M. Zanotti, "New Bell-type inequalities for $N > 4$ necessary for existence of a hidden variable", *Found. Phys. Lett.* **4**, 1, 101-107 (1991) (g).

526. **[Svetlichny-Redhead-Brown-Butterfield 88]**: G. Svetlichny, M. L. G. Redhead, H. Brown, & J. Butterfield, "Do the Bell inequalities require the existence of joint probability distributions?", *Phil. Sci.* **55**, 2, 387-401 (1988) (c).

527. **[Swift-Wright 80]**: A. R. Swift, & R. Wright, "Generalized Stern-Gerlach experiments and the observability of arbitrary spin operators", *J. Math. Phys.* **21**, 1, 77-82 (1980).

528. **[Tan-Walls-Collett 91]**: S. M. Tan, D. F. Walls, & M. J. Collett, "Nonlocality of a single photon", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3, 252-255 (1991). Comment: **[Santos 92 a]**.

529. **[Tapster-Rarity-Owens 94]**: P. R. Tapster, J. G. Rarity, & P. C. M. Owens, "Violation of Bell's inequality over 4 km of optical fiber", *Phys. Rev. Lett.* **73**, 14, 1923-1926 (1994).

530. **[Thompson-Rempe-Kimble 92]**: R. J. Thompson, G. Rempe, & H. J. Kimble, "Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 8, 1132-1135 (1992).

531. **[Torgerson-Branning-Mandel 95]**: J. R. Torgerson, D. Branning, & L. Mandel, "A method for demonstrating violation of local realism with a two-photon downconverter without use of Bell iniequalities", *Appl. Phys. B* **60**, 2-3, 267-269 (1995). Ver **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 95]**.

532. **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 95]**: J. R. Torgerson, D. Branning, C. H. Monken, & L. Mandel, "Experimental demonstration of the violation of local realism without Bell inequalities", *Phys. Lett. A* **204**, 5-6, 323-328 (1995). Ver **[Torgerson-Branning-Mandel 95]**, **[Garuccio 95 b]**. Comment: **[Cabello-Santos 96]**. Respuesta: **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 96]**.

533. **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 96]**: J. R. Torgerson, D. Branning, C. H. Monken, & L. Mandel, "Reply to the comment by Cabello and Santos on 'Experimental demonstration of the violation of local realism without Bell inequalities'", *Phys. Lett. A* **214**, 5-6, 319-320 (1996). Respuesta a **[Cabello-Santos 96]**. Ver **[Torgerson-Branning-Monken-Mandel 95]**, **[Garuccio 95 b]**.

534. **[de la Torre 94]**: A. C. de la Torre, "Contextuality in quantum systems", *Am. J. Phys.* **62**, 9, 808-812 (1994). Ver **[de la Torre-Dotson 96]**.

535. **[de la Torre-Dotson 96]**: A. C. de la Torre, & A. C. Dotson, "An entangled opinion on the interpretation of quantum mechanics", *Am. J. Phys.* **64**, 2, 174 (1996). Ver **[de la Torre 94]**.

536. @ **[Toulmin 70]**: S. Toulmin (ed.), *Physical reality*, Harper and Row, Evanstone & London, 1970.

537. **[Vaidman-Aharonov-Albert 87]**: L. Vaidman, Y. Aharonov, & D. Z. Albert, "How to ascertain the values of σ_x, σ_y, and σ_z of a spin-1/2 particle", *Phys, Rev. Lett.* **58**, 14, 1385-1387 (1987). Ver **[Mermin 95 b]**.

538. **[Vaidman 88]**: L. Vaidman, "Meaning and measurability of nonlocal quantum states", en A. van der Merwe, F. Selleri, & G. Tarozzi (eds.), *Microphysical reality and quantum formalism. Proceedings of an international conference (Urbino, Italy, 1985)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1988, Vol. 1, pp. 81-88.

539. **[Vaidman 93]**: L. Vaidman, "Lorentz-invariant 'elements of reality' and the joint measurability of commuting observables", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 22, 3369-3372 (1993). Ver **[Cohen-Hiley 95 a]**, **[Cohen-Hiley 96]**.

540. **[Vaidman 94 a]**: L. Vaidman, "Teleportation of quantum states", *Phys. Rev. A* **49**, 2, 1473-1476 (1994).

541. **[Vaidman 94 b]**: L. Vaidman, "On the realization of interaction-free measurements", *Quantum Opt.* **6**, 3, 119-126 (1994). Ver **[Elitzur-Vaidman 93]**.

542. **[Vaidman 95 a]**: L. Vaidman, "Nonlocality of a single photon revisited again", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 10, 2063 (1995). Comment a **[Hardy 94]**. Respuesta: **[Hardy 95 b]**.

543. **[Vaidman 95 b]**: L. Vaidman, "Nonlocal measurements and teleporation of quantum states", en M. Ferrero, & A. van der Merwe (eds.), *Fundamental problems in quantum physics. Proceedings of an international symposium (Oviedo, Spain, 1993)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1995, pp. 347-356.

544. **[Vaidman 96]**: L. Vaidman, "Weak-measurement elements of reality", *Found. Phys.* **26**, 7, 895-906 (1996).

545. @ **[Van Fraassen 73]**: B. C. Van Fraassen, "Semantic analysis of quantum logic", en C. A. Hooker (ed.), *Contemporary research in the foundations and philosophy of quantum theory*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1973, pp. 80-113.

546. **[Van Fraassen 79]**: B. C. Van Fraassen, "Hidden variables and the modal interpretation of quantum theory", *Synthese* **42**, 1, 155-165 (1979) (i), (m).

547. **[Van Fraassen 91]**: B. C. Van Fraassen, *Quantum mechanics: An empiricist view*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

548. **[Varadarajan 62]**: V. S. Varadarajan, "Probability in physics and a theorem on simultaneous observability", *Comm. on Pure and Appl. Math.* **15**, 2, 189-217 (1962) (i). Errata: *Comm. on Pure and Appl. Math.* **18**, 4, 757 (1965) (i). También —incompleto— en **[Hooker 75]**, pp. 171-204, la parte que falta está en **[Hooker 79]**, pp. xvii-xix.

549. **[Varadarajan 68]**: V. S. Varadarajan, *Geometry of quantum theory*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1968 (1ª edición, 2 vols.), Springer-Verlag, New York, 1985 (2ª edición, 1 vol.) (i).

550. **[Vermaas 94]**: P. E. Vermaas, "Comment on 'Getting contextual and nonlocal elements-of-reality the easy way', by Rob Clifton [*Am. J. Phys.* **61**, 443-447 (1993)]", *Am. J. Phys.* **62**, 7, 658-660 (1994). Comment a **[Clifton 93]**.

551. **[Vermaas-Dieks 95]**: P. E. Vermaas, & D. Dieks, "The modal interpretation of quantum mechanics and its generalization to density operators", *Found. Phys.* **25**, 1, 145-158 (1995).

552. **[Vogel-Akulin-Schleich 93]**: K. Vogel, V. M. Akulin, & W. P. Schleich, "Quantum state engineering of the radiation field", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 12, 1816-1819 (1993).

553. **[Vogt 89]**: A. Vogt, "Bell's theorem and Mermin's gedanken experiment", en M. Kafatos (ed.), *Bell's theorem, quantum theory, and conceptions of the universe. Proceedings of a workshop (George Mason University, 1988)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1989, pp. 61-63 (d).

554. **[Von Neumann 31]**: J. von Neumann, "Über Funktionen von Funktionaloperatoren", *Ann. of Math.* **32**, 191-226 (1931) (i). Reimpreso en **[Von Neumann 61]**, Vol. 2, pp. 177-212. Ver **[Von Neumann 32]**, Cap. II, Sec. 10, pp. 124-127 en la versión en castellano; **[Neumark 54]**, **[Park-Margenau 68]**.

555. **[Von Neumann 32]**: J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Spinger, Berlín, 1932. Versión en castellano: *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, C. S. I. C., Madrid, 1949, 1991. Versión en inglés: *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1955.

556. @ **[Von Neumann 61]**: J. von Neumann, *Collected works*, A. H. Taub (ed.), Pergamon Press, New York, 1961.

557. **[Walther 92]**: H. Walther, "Experiments on cavity quantum electrodynamics", *Phys. Rep.* **219**, 3-6, 263-281 (1992) (ñ).

558. **[Wheeler-Zurek 83]**: J. A. Wheeler, & W. H. Zurek (eds.), *Quantum theory and measurement*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.

559. **[Wick-Wightman-Wigner 52]**: G. C. Wick, A. S. Wightman, & E. P. Wigner, "The intrinsic parity of elementary particles", *Phys. Rev.* **88**, 1, 101-105 (1952).

560. **[Wigner 70]**: E. P. Wigner, "On hidden variables and quantum mechanical probabilities", *Am. J. Phys.* **38**, 8, 1005-1009 (1970). Ver **[Clauser 71 a]**, **[Wigner 71]**, **[Clauser 71 b]**.

561. **[Wigner 71]**: E. P. Wigner, "Rejoinder", *Am. J. Phys.* **39**, 9, 1097-1098 (1971). Ver **[Wigner 70]**, **[Clauser 71 a]**, **[Clauser 71 b]**.

562. **[Wódkiewicz 92]**: K. Wódkiewicz, "On the Bell's inequalities for arbitrary spin and many particles", en T. D. Black, M. Martín Nieto, H. S. Pilloff, M. O. Scully, & R. M. Sinclair (eds.), *Foundations of quantum mechanics. Workshop (Santa Fe, New Mexico, 1991)*, World Scientific, Singapore, 1992, pp. 276-282.

563. **[Wódkiewicz-Wang-Eberly 93]**: K. Wódkiewicz, L. Wang, & J. H. Eberly, "Perfect correlations of three-particle entangled states in cavity QED", *Phys. Rev. A* **47**, 4, Part B, 3280-3284 (1993).

564. **[Wu-Xie 96]**: X. Wu, & R. Xie, "Hardy's nonlocality theorem for three spin-half particles", *Phys. Lett. A* **211**, 3, 129-133 (1996). Ver **[Pagonis-Clifton 92]**.

565. **[Wu-Xie-Huang-Hsia 96]**: X. Wu, R. Xie, X. Huang, & Y. Hsia, "Local realism violations in two-particle interferometry", *Phys. Rev. A* **53**, 4, R1927-R1930 (1996).

566. **[Yurke-Stoler 92 a]**: B. Yurke, & D. Stoler, "Einstein-Podolsky-Rosen effects from independent particle sources", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 9, 1251-1254 (1992).

567. **[Yurke-Stoler 92 b]**: B. Yurke, & D. Stoler, "Bell's-inequality experiments using independent-particle sources", *Phys. Rev. A* **46**, 5, 2229-2234 (1992).

568. **[Yurke-Stoler 93]**: B. Yurke, & D. Stoler, "Using the Pauli exclusion principle to exhibit local-realism violations in overlapping interferometers", *Phys. Rev. A* **47**, 3, 1704-1707 (1993).

569. ♉ @ **[Zeilinger-Zukowski-Horne-Bernstein-Greenberger 94]**: A. Zeilinger, M. Zukowski, M. A. Horne, H. J. Bernstein, & D. M. Greenberger, "Einstein-Podolsky-Rosen correlations in higher dimensions", en J. Anandan, & J. L. Safko (eds.), *Fundamental aspects of quantum theory*, World Scientific, Singapore, 1994, pp. ?-?.

570. @ **[Zimba 93]**: J. R. Zimba, "Finitary proofs of contextuality and non-locality using Majorana representation of spin-3/2 states", M. Sc. thesis, Oxford University, 1993.

571. **[Zimba-Penrose 93]**: J. R. Zimba, & R. Penrose, "On Bell non-locality without probabilities: More curious geometry", *Stud. Hist. Phil. Sci.* **24**, 5, 697-720 (1993). Ver **[Penrose 92]**.

572. **[Zukowski-Zeilinger 91]**: M. Zukowski, & A. Zeilinger, "Test of the Bell inequality based on phase and linear momentum as well as spin", *Phys. Lett. A* **155**, 2-3, 69-72 (1991).

573. **[Zukowski 91 a]**: M. Zukowski, "Definite values for observables versus quantum predictions: A 'GHZ-like' test", *Phys. Lett. A* **157**, 4-5, 198-202 (1991).

574. **[Zukowski 91 b]**: M. Zukowski, "GHZ correlations in quadrature phase measurements", *Phys. Lett. A* **157**, 4-5, 203-208 (1991).

Índice de acrónimos

BKS	Bell-Kochen-Specker
B-11	DPS con 11 vectores, subconjunto del propuesto por Bell, p. 44
B-13	DPS con 13 vectores propuesto por Bell, p. 44
CEG	Cabello-Estebaranz-García Alcaine
CEG-18	TNCS crítico con 18 vectores en dimensión 4 propuesto por CEG, p. 80
CG	Cabello-García Alcaine
CG-14	DPS con 14 vectores propuesto por CG, p. 45
CG-16	DPS con 16 vectores propuesto por CG, p. 45
CK-31	TNCS crítico con 31 vectores en dimensión 3 propuesto por Conway y Kochen, p. 61
CFD	Definitud contrafacual (CounterFactual Definiteness)
CH	Clauser-Horne
CHSH	Clauser-Horne-Shimony-Holt
CS	Cabello-Santos
DPS	Conjunto con una predicción definida (Definite Prediction Set), p. 36
EPR	Einstein-Podolsky-Rosen
ER	Elemento de Realidad
GHSZ	Greenberger-Horne-Shimony-Zeilinger
GHZ	Greenberger-Horne-Zeilinger
K-20	TNCS crítico con 20 vectores en dimensión 4 propuesto por Kernaghan, p. 80
KP-36	TNCS crítico con 36 vectores en dimensión 8 propuesto por Kernaghan y Peres, p. 115
KS	Kochen-Specker
KS-8	DPS con 8 vectores propuesto por Kochen y Specker, p. 37
KS-10	DPS con 10 vectores propuesto por Kochen y Specker, p. 39
KS-117	TNCS con 117 vectores propuesto por Kochen y Specker, p. 42
MC	Mecánica cuántica
PNCS	Conjunto parcialmente no-coloreable (Partially Non-Colourable Set), p. 39
P-24	TNCS con 24 vectores en dimensión 4 propuesto por Peres, p. 74
P-33	TNCS crítico con 33 vectores en dimensión 3 propuesto por Peres, p. 52
Q-40	TNCS con 40 vectores en dimensión 4 propuesto por Penrose, p. 66
SER	Elemento de realidad fuerte (Strong Element of Reality), p. 169
SG	Stern-Gerlach
TBM	Torgerson-Branning-Mandel
TBMM	Torgerson-Branning-Monken-Mandel

TNCS	Conjunto totalmente no-coloreable (Totally Non-Colourable Set), p. 41
VN	Von Neumann
VO	Variables ocultas
Z-28	TNCS crítico con 28 vectores en dimensión 4 propuesto por Zimba, p. 73

Índice analítico

A

Abellanas, L., 259
Acrónimos, 301
Aditiva, demostración, 107
Álgebra booleana, 33, 41
Algebraicas, demostraciones, 5, 152
Álvarez, G., 11
Ardehali, M., 246
Aspect, A., 145, 248, 249
Átomos en interacción con cavidades, 221, 222, 237
Áurea, razón, 161, 238

B

B-11, 44, 62, 63
B-13, 44, 62, 63
Balian, R., 17
Ballentine, L. E., 17, 19, 132, 133, 135
Beamsplitter, 219, 224, 231, 234
Bechmann Johansen, H., 119
Belinfante, F. J., 22, 38, 47, 105, 119
Bell, J. S., 5, 19, 20, 24, 25, 26, 29, 30, 43, 46, 66, 119, 139, 144, 181
Bell, desigualdades de, 7, 140, 142
Bell-EPR, teorema de, 139, 174-176
Bell-Kochen-Specker (BKS), teorema de, 25, 27, 28
Ben-Aryeh, Y., 141, 207
Bohm, D., 5, 28, 48, 110, 128, 136, 168
Bohm-Aharonov, 136
Bohr, N., 4, 29, 121, 133
Booleana, álgebra, 33, 41
Born, M., 4, 5
Borrado cuántico, 4
Braunstein-Mann, 247
Braunstein-Mann-Revzen, 246
Brown-Svetlichny, 177, 183, 184, 185
Bub, J., 47, 62, 83, 102, 103, 177, 183

C

Cabello, A., 27, 40, 42, 118, 119
Cabello-Estebaranz-García Alcaine (CEG), 78, 81, 83, 87, 119, 180, 197
Cabello-García Alcaine (CG), 27, 43, 47, 51, 87, 119, 151, 167
Cabello-Santos (CS), 209, 243
Cascada (Escher), 61
Casi-adyacentes, vértices, 67
Casi-casi-adyacentes, vértices, 68

Cavidades, 221, 222, 237
CEG-18, 65, 80, 82, 99, 100, 188, 189, 191, 192, 198
CG-14, 45
CG-16, 45
Cirac, J. I., 208
Cirac-Zoller, 221
Cirel'son, desigualdad de, 149
CK-31, 61, 64, 99, 119
CK-33, 61, 64
CK-37, 61, 64
Clauser-Horne (CH), desigualdades de, 146, 249, 250
Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH), desigualdades de, 143, 149, 165, 248, 250
Clauser-Shimony, 130, 173
Clifton, R. K., 11, 37, 41, 51, 83, 90, 104, 119, 188, 194
Clifton-Niemann, 166
Clifton-Redhead-Butterfield, 121, 246
Colores, equivalencia entre valores y, 35
Completitud de una teoría física, 126
Computación cuántica, 208
Conjunto con una predicción definida (DPS), 36, 43, 50, 89, 94, 188, 198, 201
Conjunto de instrucciones, 150
Conjunto parcialmente no-coloreable (PNCS), 39, 92, 94, 188, 192, 202
Conjunto totalmente no-coloreable (TNCS), 41, 93, 94, 98, 101, 102, 188
Contextualidad, 27, 84
Continua, demostración, 33, 38, 46
Contrafactual, definitud, 132, 168, 170
Conway, J. H., 52, 55, 61, 62, 104
Correlación, función de, 141
Correlación, índice de, 165
Coxeter, H. S. M., 76, 77
Criptografía cuántica, 208
Crítico, conjunto, 54
Cuna del gato ("cat's cradle"), 42, 54
Czachor, M., 127

D

Débiles, desigualdades, 145
Débiles, elementos de realidad, 145, 153
Definitud a priori, 27
Definitud contrafactual ("counterfactual definiteness", CFD), 132, 168, 170
Degenerado, operador, 181
Demostración de KS, 31
Dependiente del estado, demostración, 41
Descomposición de Schmidt, 162
Desigualdad de Cirel'son, 149
Desigualdad de Eberhard, 250
Desigualdad de Herbert, 151
Desigualdades de Bell, 7, 140-148
Desigualdades de CH, 146, 249, 250
Desigualdades de CHSH, 143, 149, 165, 248, 250
Desigualdades débiles, 145
Desigualdades fuertes, 145
Desigualdades homogéneas, 148
Desigualdades inhomogéneas, 148
Desigualdades para dos partículas de espín *s*, 148
Desigualdades para *n* partículas, 149, 246, 247
Desigualdades y la demostración de GHZ, 245
Desigualdades y la demostración de Hardy, 249
Deterministas, variables ocultas, 27, 147
Dewdney, C., 29

DPS, 36, 43, 50, 89, 94, 188, 198, 201
Diagramas de KS, 36, 57, 60
Diagramas de ortogonalidad, 57
Direcciones, equivalencia entre proposiciones y, 34
Direcciones relevantes de un cubo, 56, 74
Direcciones relevantes de un teseracto, 76
Divina proporción, 161
Dodecaedro mágico, 65, 66

E

Eberhard, desigualdad de, 250
Eficiencias de los detectores, 144, 145, 246, 247, 249, 250
Einstein, A., 5, 124, 128, 129, 138, 168
Einstein-Podolsky-Rosen (EPR), argumento de 124-138, 170-173
Elby-Jones, 183, 184
Electrón-positrón en interferómetros solapados, 223
Elementos de realidad (ER), 126
Elementos de realidad recursivos, 154
Elementos de realidad fuertes (SER), 129, 168
Elementos de realidad fuertes conjuntos, 169
Elementos de realidad invariantes Lorentz, 156
Elementos de realidad primarios, 155
Elementos de realidad secundarios, 155
Elitzur-Vaidman, dispositivo de, 223
Entangled, estado, 164
Entropía, 165
Epstein, P. S., 124
Escher, M. C., 55, 61
d'Espagnat, B., 130, 173
Estocásticas, variables ocultas, 7, 146
Estrella de Mermin, 110, 112, 115
Espín-estadística, teorema de conexión, 160
Experimentos ideales, 6, 146, 207, 210, 223
Experimentos loophole-free, 146, 247
Experimentos reales, 145, 239
Explícita, proposición, 68

F

Factorizable, estado, 164, 189
Fair sampling, 145, 241, 246, 250
Feynman, R. P., 4, 151
Fibonacci, sucesión de, 161
Fidelidad de la medida (Faithful measurement), 48
Filotaxia, 161
Fine, A., 124, 129
Fine-Teller, 47
Finita, demostración, 8, 33
Fotón, no-localidad con un solo, 233
Freyberger, M., 237
Friedberg, R., 119
Fuertes, desigualdades, 145
Fuertes, elementos de realidad, 129, 168
Función de correlación, 141
Furry, W. H., 136

G

Galileo, G., 6
Galindo, A., 38, 47, 119
Galindo-Pascual, 4, 17
García Alcaine, G., 155, 164, 190
Garg-Mermin, 145
Garuccio, A., 250
Gell-Mann, M., 3, 4
Generalización de la estrella de Mermin, 112

Generalizaciones del argumento de Hardy, 166
GHZ, estado de, 153, 173, 202, 210, 216, 246
GHZ-Mermin, demostración de, 152, 202
Gill, R., 47
Gill-Keane, 47, 119
Gleason, A., 21, 26, 119
Gleason, teorema de, 21
Global, contradicción, 112
Greenberger, D. M., 248
Greenberger-Horne-Shimony-Zeilinger (GHSZ), 129, 130, 133, 152, 210, 215, 245
Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ), 110, 152, 210, 233
Gudder, S. P., 22, 182
Gudder, teorema de, 182

H

Hájek-Bub, 131
Hamilton, W. R., 182
Hardy, L., 83, 104, 156, 174, 197, 223, 227, 233, 247, 249
Hardy, demostración de, 156, 172
Hardy, estado de, 157, 164, 172
Heisenberg, W., 4
Heywood-Redhead, 179, 183, 184
Hipercubo, 75
Hnilo, A. A., 248
Home-Selleri, 145, 148
Homogéneas, desigualdades, 148
Hooker, C. A., 126
Horgan, J., 55
Howard, D., 122, 128, 132
Hultgren-Shimony, 119

I

Implícita, proposición, 68
Inhomogéneas, desigualdades, 148
Interferometría con fuentes independientes, 218
Interferometría de tres partículas, 215
Interferómetro de Mach-Zehnder, 224, 230
Interferómetro de Stern-Gerlach, 160
Interferómetros ópticos solapados, 227

J

Jammer, M., 3, 24, 124, 125
Jauch, J. M., 24, 106
Jauch-Piron, 24, 25
Jaynes-Cummings, hamiltoniano de, 221

K

K-20, 80
Kar, G., 197
Kernaghan, M., 47, 57, 63, 65, 78, 80, 81, 83, 99, 103, 104, 119
Kernaghan-Peres, 32, 41, 50, 119, 189, 193, 196
Kochen, S., 26, 52, 55, 61, 62
Kochen-Specker, 20, 26, 33, 37, 41, 105, 119
Kochen-Specker, demostración de, 31
Kochen-Specker, teorema de, 25
KP-36, 115, 189, 202
KP-40, 115
KS-8, 37, 54, 56, 62, 200
KS-10, 39, 54
Kuhn, T. S., 6

L

Localidad, 128, 129, 185
Loophole-free, experimentos, 146, 247

M

Mach-Zehnder, interferómetro de, 224, 230
Mackey, G. W., 21, 24
Maczynski, teorema de, 181
Majorana, representación de, 65, 66
Manning, H. P., 75, 77
Matriciales, variables ocultas, 150, 248
Matriz densidad reducida, 164
Máximamente entangled, estado, 157, 165
Medición ideal de primera especie, 190
Medida de probabilidad, 21
Mermin, N. D., 5, 11, 25, 42, 47, 54, 108, 110, 114, 121, 149, 151, 156, 172, 174, 177, 205, 245, 246, 247, 249, 250
Mermin, demostración estadística de, 149
Mermin, estrella de, 110, 112, 115
Messiah, A., 31
Mixta, colectividad, 16
Multiplicativa, demostración, 107

N

Navaja de Ockham, 182
No-contextualidad, 27, 84, 181
No-enhancement, 148, 250
No-maximal, operador, 181
Número áureo, 161

O

de Obaldia-Shimony-Wittel, 119
de Ockham, G., 182
Ou-Pereira-Kimble-Peng, 149

P

P-24, 65, 74, 79, 99, 101, 114, 191, 198
P-33, 52, 187
Pagonis-Clifton, 166
Pagonis-Redhead-Clifton, 112
Pais, A., 131, 138
Parametric down conversion, 147, 227, 239
Pascal, B., 1
Paty, M., 129
Pauli, principio de exclusión de, 137, 160, 230, 231
Penrose, R., 54, 55, 61, 65, 66, 77, 119
Peres, A., 1, 19, 32, 47, 52, 54, 55, 65, 77, 78, 83, 99, 100, 103, 107, 108, 110, 114, 119, 154, 192, 233
Peres, la demostración de, 154, 192
Peres-Mermin, tabla de, 108, 114
Peres-Ron, 30, 119
Pitowsky, I., 131
PNCS, 39, 92, 94, 188, 192, 202
Podolsky, B., 124, 125
Poliedro cuántico, 52, 54, 59, 61
Politopo, 75
Popper, K. R., 125
Primarios, elementos de realidad, 155
Probabilística, demostración, 50, 198
Product rule, 107
Programa de ordenador, 54, 55, 61, 73, 77, 99, 103, 115
Proposiciones, 23

Proposiciones, equivalencia entre direcciones y, 34
Pura, colectividad, 16

Q

Q-40, 65, 66

R

Rabi, oscilaciones de, 222
Razón áurea, 161, 238
Redhead, M. L. G., 22, 42, 127, 131, 182
Regla de la suma, 83, 107
Regla del producto, 107
Rosen, N., 124, 125
Rosenfeld, L., 121
Roy-Singh, 246
Ruido, 247

S

Sánchez Ron, J. M., 5, 15, 18
Santos, E., 48, 66, 122, 140, 146, 173, 205, 207, 243, 250
Schmidt, descomposición de, 162
Schrödinger, E., 125, 164
Schütte, K., 62
Science Citation Index, 138
Sección áurea, 161
Secundarios, elementos de realidad, 155
Sentido débil, 130
Sentido fuerte, 129
Separabilidad, 128, 185
Shimony, A., 130, 173, 184
Sin desigualdades, demostraciones, 6, 152
Singlete, 136, 185, 195, 207, 221
Sommerville, D. M. Y., 76, 77
Specker, E. P., 1, 25, 62
Stairs, A., 1, 25, 51, 110, 119, 179, 184
Stapp, H. P., 121, 133
Stern-Gerlach, 28, 50, 160
Stern-Gerlach generalizados, 33, 106
Sturgeon, ley de, 253
Styer, D. F., 4
Sucesión de Fibonacci, 161
Sucesos conjuntos excluidos, 185
Sum rule, 83, 107
Suppes-Zanotti, 248
Svozil, K., 62
Swift-Wright, 33, 106

T

Teleportación, 208
Teorema de Bell-EPR, 139
Teorema de Bell-Kochen-Specker, 25, 27, 28
Teorema de BKS con localidad, 181, 185
Teorema de conexión espín-estadística, 160
Teorema de Gleason, 21
Teorema de Gudder, 182
Teorema de Kochen-Specker, 25
Teorema de Maczynski, 181
Teorema de Von Neumann-Neumark, 106
Teorema de Von Neumann-Varadarajan, 106
Teseracto, 75, 81, 198
Teseracto cuántico, 65, 74
Tetraedro, 68
TNCS, 41, 93, 94, 98, 101, 102, 188
Todo o nada, demostraciones, 5
Tolkien, J. R. R., 253
Torgerson-Branning-Monken-Mandel (TBMM), experimento de, 209, 239-245, 250
Torre, A. C. de la, 135

Triplete, 165

V

Vaidman, L., 233
Van Fraassen, B. C., 182
Variables ocultas, 5
24-celdas, 77, 104
Vermaas, P. E., 37, 119
Von Neumann, J., 6, 15, 24
Von Neumann, prueba de imposibilidad
de variables ocultas de, 15
Von Neumann-Neumark, teorema de, 106
Von Neumann-Varadarajan, teorema de,
106

W

Wagensberg, J., 11
Weak embeddability, 41

Y

Yurke-Stoler, 218, 230

Z

Z-28, 65, 73
Zimba, J., 65, 66, 89
Zimba-Penrose, 65, 66, 87, 89, 119
Zimba-Penrose, teorema sobre
construcción de TNCSs, 87
Zukowski, M., 47, 121

Postscriptum

Esta tesis doctoral fue defendida el viernes 12 de julio de 1996 en la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM) ante un tribunal formado por:

D. Alberto Galindo Tixaire, Catedrático del Departamento de Física Teórica I de la UCM (presidente).

D. Antonio Fernández Rañada y Menéndez Luarca, Catedrático del Departamento de Física Teórica I de la UCM.

D. Emilio Santos Corchero, Catedrático del Departamento de Física Moderna de la Universidad de Cantabria.

D. José Luis Sánchez Gómez, Catedrático del Departamento de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid.

D. Gabriel Álvarez Galindo, Profesor Titular del Departamento de Física Teórica II de la UCM (secretario).

Obtuvo la máxima calificación: "Apto cum laude por unanimidad".

A continuación se comentan algunos trabajos directamente relacionados con la tesis publicados con posterioridad a la finalización de la misma, así como algunas referencias anteriores que fueron omitidas, sin querer, en la primera versión. Ordenadas por secciones son:

2. 4. 2. g. *CEG-18.* En [Cabello 97 a] se incluye, como novedad respecto a otras publicaciones, la interpretación geométrica explícita de CEG-18 que aparece en la tesis.

3. 4. 4. e. *Generalizaciones del argumento de Hardy.* En [Hardy 97] se presenta una generalización con m observables (para cada una de las dos partículas de espín 1/2). En el límite m infinito, la probabilidad de obtener estados que violen el realismo local es 1/2 (frente a 9/100 en el caso $m = 2$). En [Kar 96 b] se muestra que para sistemas de $n \geq 3$ partículas de espín 1/2 existen estados mezcla que admiten un argumento de tipo Hardy.

4. 3. 4. *Una demostración con 5 proposiciones y el singlete.* [García Alcaine 97] es un resumen de lo contenido en la correspondiente sección de la tesis.

5. 2. *Experimentos ideales de tipo GHZ.* Nuevas referencias son: [Wódkiewicz-Wang-Eberly 93 b][1], [Haroche 95] (GHZ en el contexto de la electrodinámica cuántica de cavidades), [Gerry 96 a, b, c] (realización de estados de GHZ con cavidades).

5. 4. *Experimentos reales.* Según dijo Hardy en el *II International Symposium on Fundamental Problems in Quantum Physics*, celebrado en Oviedo del 21 al 26 de julio de 1996, un grupo experimental de Roma había realizado un experimento de tipo Hardy y sometido sus resultados para su publicación en *Phys. Lett. A.* En [Kwiat 97] se hace una propuesta experimental para producir estados de Hardy —y otros estados— que se basa en una fuente, descrita en [Kwiat-Mattle-Weinfurter-Zeilinger-Sergienko-Shih 95], que permite preparar pares de fotones entangled en polarización. En el simposium de Oviedo, Kwiat dijo que el experimento se iba a llevar a cabo "en 2 ó 3 meses en Los Alamos".

5. 5. 3. *Desigualdades y la demostración de Hardy.* [Hardy 97] también contiene una nueva derivación de las desigualdades de CH, similar a la que se proponía en [Hardy 91b] de las desigualdades de CHSH.

Imposibilidad de variables ocultas para dos partículas de espín 1/2 pre- y post-seleccionadas en estados no-entangled. La misma estructura de relaciones de ortogonalidad entre proposiciones que aparece en la figura 4. 1 (es decir, el mismo DPS que hay detrás de las demostraciones del teorema de BKS y del argumento de Hardy),

[1] [Wódkiewicz-Wang-Eberly 93] —que ahora debería llamarse [Wódkiewicz-Wang-Eberly 93 a]— estaba en la bibliografía de la primera versión pero no aparecía citada en el texto principal al hablar de experimentos ideales de tipo GHZ.

permite obtener un nuevo resultado muy interesante[2] que se recoge en [Cabello 97 b]. Lo que sigue es el resumen de este trabajo:

"Es bien conocido que todas las predicciones de la MC sobre el estado de cualquier sistema físico representable por un espacio de Hilbert bidimensional siempre pueden duplicarse mediante un modelo de variables ocultas no-contextuales. En [Cabello 97 b] muestro que, en algunos casos, cuando se considera otro sistema bidimensional *independiente* (no-entangled), la descripción cuántica del sistema cuántico resultante no puede reproducirse mediante variables ocultas no-contextuales. En particular, se presenta una demostración de imposibilidad de variables ocultas para dos partículas de espín 1/2 individuales pre-seleccionadas en un estado no-correlacionado $|A\rangle\otimes|B\rangle$ y post-seleccionadas en otro estado no-correlacionado $|a\rangle\otimes|B\rangle$, siendo $|B\rangle$, el mismo estado para la segunda partícula tanto en la pre- como en la post-selección."

Majadahonda, Diciembre de 1996.

El desarrollo posterior de estos temas puede seguirse en: A. Cabello, "Bibliographic guide to the foundations of quantum mechanics and quntum information", `http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0012089`.

Majadahonda, Marzo de 2001.

[2] En palabras de Peres: "Your results are very fine and 'paradoxical' (that is, they surprise even an old hand like me)." Comunicación particular del 20 de octubre de 1996.

574. **[Cabello 97 a]**: A. Cabello, "A proof with 18 vectors of the Bell-Kochen-Specker theorem", en M. Ferrero, & A. van der Merwe (eds.), *New developments on fundamental problems in quantum physics (Oviedo, Spain, 1996)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1997, pp. 59-62.

575. **[Cabello 97 b]**: A. Cabello, "No-hidden-variables proof for two spin-1/2 particles preselected and postselected in unentangled states", *Phys. Rev. A* **55**, 6, 4109-4111 (1997).

576. **[García Alcaine 97]**: G. García Alcaine, "A simple state-dependent proof of the BKS theorem", en M. Ferrero, & A. van der Merwe (eds.), *New developments on fundamental problems in quantum physics (Oviedo, Spain, 1996)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1997, pp. 133-136.

577. **[Gerry 96 a]**: C. C. Gerry, "Preparation of multiatom entangled states through dispersive atom–cavity-field interactions", *Phys. Rev. A* **53**, 4, 2857-2860 (1996).

578. **[Gerry 96 b]**: C. C. Gerry, "Preparation of a four-atom Greenberger-Horne-Zeilinger state", *Phys. Rev. A* **53**, 6, 4591-4593 (1996).

579. **[Gerry 96 c]**: C. C. Gerry, "Proposal for a mesoscopic cavity QED realization of the Greenberger-Horne-Zeilinger state", *Phys. Rev. A* **54**, 4, R2529-R2532 (1996).

580. **[Hardy 97]**: L. Hardy, "A bigger contradiction between quantum theory and locality for two particles without inequalities", en M. Ferrero, & A. van der Merwe (eds.), *New developments on fundamental problems in quantum physics (Oviedo, Spain, 1996)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1997, pp. 163-170.

581. **[Haroche 95]**: S. Haroche, "Atoms and photons in high-Q cavities: New tests of quantum theory", en D. M. Greenberger, & A. Zeilinger, *Fundamental problems in quantum theory: A conference held in honor of professor John A. Wheeler, Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755**, 73-86 (1995) [(b)].

582. **[Kar 96 b]**: G. Kar, "Testing Hardy's nonlocality with n spin-1/2 particles", *Phys. Rev. A* **56**, 1, 1023-1024 (1997).

583. **[Kwiat 97]**: P. G. Kwiat, "Production and uses of hyper-entangled states", en M. Ferrero, & A. van der Merwe (eds.), *New developments on fundamental problems in quantum physics (Oviedo, Spain, 1996)*, Kluwer Academic, Dordrecht, Holland, 1997, pp. 189-202. Ver **[Kwiat-Mattle-Weinfurter-Zeilinger-Sergienko-Shih 95]**.

584. ** @ **[Wódkiewicz-Wang-Eberly 93 b]**: K. Wódkiewicz, L. Wang, & J. H. Eberly, "?", en F. Ehlotzky (ed.), *Fundamentals of quantum optics III*, Springer, Berlin, 1993, pp. 306-?. Ver **[Wódkiewicz-Wang-Eberly 93 a]**.