

## **TEMARIO y TEMPORALIZACIÓN de "FÍSICA I: MECÁNICA". Grupos 5 y 7**

[Del *Lu 29 Enero* al *Vi 24 Mayo* de 2024: 15 semanas lectivas, con 2 (PA) + 2 (TP) horas presenciales por semana, en las que se incluyen 8 horas dedicadas a las prácticas de laboratorio.]

**TEMA 0: Repaso del álgebra de los vectores libres.** (2 horas de seminario voluntario)

**TEMA 1: Conceptos y Principios fundamentales. Estática de las partículas.** (10 horas presenciales: 1,5+0,5 clases TP en  $\frac{1}{4}$  1ª y  $\frac{1}{4}$  2ª semanas, y 3 clases PA en  $\frac{1}{2}$  2ª,  $\frac{1}{2}$  3ª y  $\frac{1}{2}$  4ª semanas)

**TEMA 2: Descripción y reducción de las fuerzas aplicadas al sólido rígido: Álgebra de los vectores deslizantes.** (7 horas presenciales: 2,5 clases TP en  $\frac{1}{4}$  2ª,  $\frac{1}{2}$  3ª y  $\frac{1}{2}$  4ª semanas, y 1 clase PA en  $\frac{1}{2}$  6ª semanas)

**TEMA 3: Reducción de fuerzas paralelas y de fuerzas distribuidas sobre el sólido rígido. Centros de masa.** (8 horas presenciales: 2 clases TP en  $\frac{1}{2}$  5ª y  $\frac{1}{2}$  6ª semanas, y 2 clases PA en  $\frac{1}{2}$  7ª y  $\frac{1}{2}$  8ª semanas)

----- [*1ª Parcial*: Miércoles 3 de Abril (en 9ª semana, 2 horas y 15 min. aprox.)] -----

**TEMA 4: Estática del sólido rígido: Condiciones de equilibrio, ligaduras y rozamiento.** (12 horas presenciales: 3,5 clases TP en  $\frac{1}{2}$  7ª,  $\frac{1}{2}$  8ª,  $\frac{1}{2}$  9ª y  $\frac{1}{4}$  10ª semanas, y 2+0,5 clases PA, en  $\frac{1}{2}$  9ª y  $\frac{1}{2}$  10ª semanas y repaso en  $\frac{1}{4}$  12ª semana)

**TEMA 5: Estática de sistemas de sólidos rígidos. Acciones internas en una sección (cortantes y flectores).** (10 horas presenciales: 1,5 clases TP en  $\frac{1}{4}$  10ª y  $\frac{1}{2}$  11ª semanas, y 3+0,5 clases PA, en  $\frac{1}{2}$  11ª y 14ª semanas y repaso en  $\frac{1}{4}$  12ª semana)

**TEMA 6: Estática del sólido elástico. Flexión de una viga y momentos de inercia.** (2,5 horas de las Prácticas de laboratorio, la P3)

----- [*2ª Parcial*: Lunes 27 de Mayo (en 16ª semana, 2 horas y 45 min.)] -----



## **TEMA 4: Estática del sólido rígido (SR): Condiciones de equilibrio, ligaduras y rozamiento.**

### 4.I.- Introducción

### 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO)

#### 4.II.0.- SR libre y SR ligado (recordatorio).

#### 4.II.1.- Definición de equilibrio del SR (macroscópica).

#### 4.II.2.- Condiciones Necesarias y Suficientes de equilibrio (macroscópicas).

#### 4.II.3.- Caso Plano ó 2D.

##### 4.II.3.A.- Definición de equilibrio. Condiciones Necesarias y Suficientes de equilibrio.

##### 4.II.3.B.- Importancia del caso plano.

### 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D)

#### 4.III.1.- Estudio de las ligaduras planas: tipos y reacciones de ligadura.

#### 4.III.2.- Definición de equilibrio y Condiciones Necesarias y Suficientes de equilibrio.

#### 4.III.3.- Teorema de las 2 fuerzas y teorema de las 3 fuerzas: Utilidades.

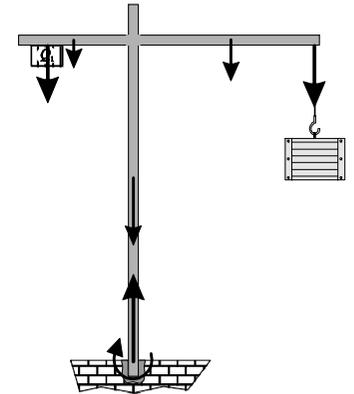
#### 4.III.4.- Grados de libertad y Estabilidad: SR mecanismo, SR isostático y SR hiperestático.

### 4.IV.- Rozamiento entre SRs. Estática con rozamiento

#### 4.IV.1.- Introducción: Características y tipos de rozamiento.

#### 4.IV.2.- Estudio del rozamiento seco. Leyes de Amontons-Coulomb.

#### 4.IV.3.- Nuevos problemas en Estática: Deslizamiento y vuelco inminentes.

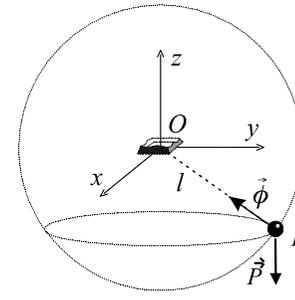




# 4.1.- Introducción

- Saber de dónde venimos y hacia dónde vamos:

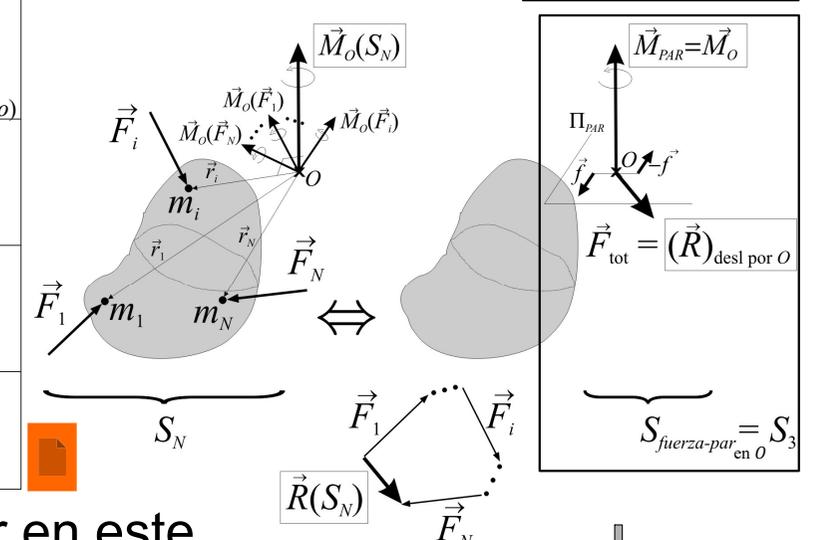
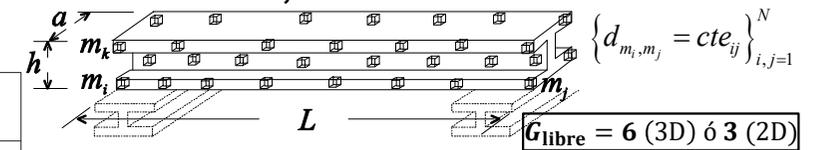
- Hemos estudiado el concepto de equilibrio y las condiciones necesarias y suficientes de equilibrio para un **punto material**, en el tema 1; los grados de libertad de un **sólido rígido (SR)** también en tema 1; y la reducción a un sistema fuerza-par de cualquier sistema de fuerzas aplicadas a un SR, en el tema 2



Partícula  $P$  en equilibrio si y solo si:  
 1°.  $\exists t_0$  tal que  $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$ .  
 2°.  $\forall t \geq t_0, \sum_i \vec{F}_i(t) = \vec{0}$ .

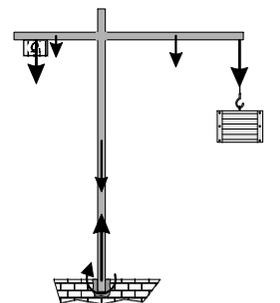
(Y también en el tema 2 las *reducciones adicionales* cuando ello es posible: ver tabla)

Tipo de Sistema $S$	Invariantes del Sistema $S$	Reducciones posibles del Sistema $S$ <sup>(*)</sup>
1°	$\vec{R}(S) \neq \vec{0}, \vec{M}_o(S) \cdot \vec{R}(S) \neq 0$ $\vec{R}(S) \neq \vec{0}, M_{\min}(S) \neq 0$	 $\vec{M}_E(S) = \vec{M}_{\min}$ $E \in (\text{Eje Central})$ (3 fuerzas, dos en un par) (idem; torsor canónico)
2°	$\vec{R}(S) \neq \vec{0}, \vec{M}_o(S) \cdot \vec{R}(S) = 0$ $\vec{R}(S) \neq \vec{0}, M_{\min}(S) = 0$	 $(\vec{M}_E(S) = \vec{M}_{\min} = \vec{0})$ $E \in (\text{Eje Central})$ (3 fuerzas, dos en un par) (¡sólo 1 fuerza!)
3°	$\vec{R}(S) = \vec{0}, (\Rightarrow \vec{M}_o(S) \cdot \vec{R}(S) = 0), \vec{M}_{\text{inv}}(S) \neq \vec{0}$ $\vec{R}(S) = \vec{0}, M_{\min}(S) = M_{\text{inv}}(S) \neq 0$	 $(\text{siempre 2 fuerzas en un par})$
4°	$\vec{R}(S) = \vec{0}, (\Rightarrow \vec{M}_o(S) \cdot \vec{R}(S) = 0), \vec{M}_{\text{inv}}(S) = \vec{0}$ $\vec{R}(S) = \vec{0}, M_{\min}(S) = M_{\text{inv}}(S) = 0$	<b>(Sistema Nulo ó Equilibrado)</b> 



- Tenemos entonces las herramientas para estudiar en este tema 4 lo que llamamos la *Estática del SR*, es decir:

- ¿Qué definimos como *equilibrio* para un SR?
- ¿Qué condiciones aseguran el equilibrio de un SR?  
(pero estudiando ambas cosas desde un punto de vista *macroscópico* o global)

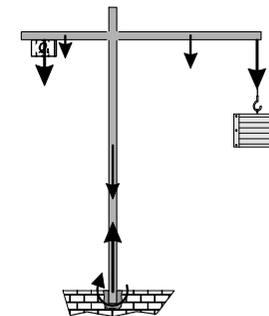
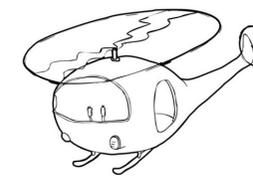


- Y como utilidad, de esas condiciones de eq. se podrán hallar las fuerzas de reacción en los vínculos con el exterior: apoyos, articulaciones, empotram...



## 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO)

### 4.II.0.- SR libre y SR ligado



Recordemos conceptos ya estudiados en el *tema 1*:

- SR *libre* es aquel que **NO tiene ligaduras externas** (aunque *sí* tiene entre sus partículas las ligaduras *internas* de rigidez,  $d_{ij} = cte$ , que aseguran su indeformabilidad).
- SR *ligado* es el que *sí tiene ligaduras externas*: apoyos, cables, articulaciones... a otros sólidos *exteriores*, las cuales limitan sus mov. indep.
- Número de *grados de libertad* (coord. libres o mov. indep.) de cada uno (en 3D):

$$G_{SR_{LIBRE}} = 3N_{partículas} - c_{num. coacc. INT} = \dots = \boxed{6} \quad (3 \text{ traslac. y } 3 \text{ rotaciones: } \{x_1, y_1, z_1; \theta_2, \varphi_2; \alpha_3\} \equiv \{q_i\}_{i=1}^6)$$

$$G_{SR_{LIGADO}} = 3N_{partículas} - (c_{num. coacc. INT} + c_{num. coacc. EXT}) = G_{SR_{LIBRE}} - c_{EXT} = \boxed{6 - c_{EXT}} \quad (< 6!!) \quad \blacktriangleright$$

(recordar que el  $n^\circ$  de coacciones coincide con el  $n^\circ$  de ecuaciones de ligadura y con el  $n^\circ$  de incógnitas de reacción:  $c = n = I$ )

### 4.II.1.- Definición de equilibrio del SR (macro, y 3D)

- “Un SR está en **equilibrio** si sus 6 g.l. *permanecen en reposo* (constantes) respecto del sist. de ref. *inercial* de observación”.

$$SR \text{ en equilibrio} \Leftrightarrow \{q_i(t)\}_{i=1}^6 = \{q_i^{eq}\}_{i=1}^6, \quad \forall t \Leftrightarrow \left\{ \dot{q}_i(t) \right\}_{i=1}^6 = \{0\}_{i=1}^6, \quad \forall t.$$

(Nota:  $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$  son las *velocidades* de los g.d.l.)

(  $\{x_1(t), y_1(t), z_1(t); \theta_2(t), \varphi_2(t), \alpha_3(t)\} = \{x_1^{eq}, y_1^{eq}, z_1^{eq}; \theta_2^{eq}, \varphi_2^{eq}, \alpha_3^{eq}\}$  )

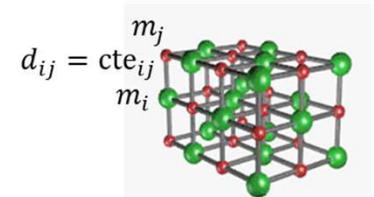
(Y las coordenadas de las  $N-3$  partículas restantes, dependientes de esos 6 g.l ó coordenadas de 3 partículas no alineadas, estarán por ello también en reposo. Sólo importan así las 3 partículas: ¡visión macro!) ▶

### 1.3.- Grados de libertad y ligaduras en los sistemas mecánicos

#### 1.3.5.- Grados de libertad del sólido rígido (libre y ligado)

**PARA UN SÓLIDO RÍGIDO CON LIGADURAS (EXTERNAS), su núm. de grados de libertad es:**

$$G_{SR\ ligado} = G_{SR\ libre} - \sum C_{(ext)} \quad , \text{ siendo: } G_{SR\ libre} = \begin{cases} 3 & (\text{en 2D}) \\ 6 & (\text{en 3D}) \end{cases}$$



, y  $\sum C_{(ext)}$  el nº de coacciones de las ligaduras (ext.) impuestas al SR, que se estudiarán en el Tema 4 (apoyo, articulación, biela, deslizaderas, soldadura...).

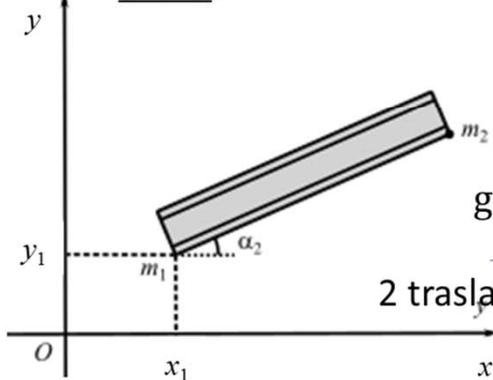
De modo que:

$$G_{SR\ ligado} = \begin{cases} 3 - \sum C & (\text{en 2D}) \\ 6 - \sum C & (\text{en 3D}) \end{cases}$$

#### Elección de los 3 ó 6 grados de libertad del SR libre:

En 2D:

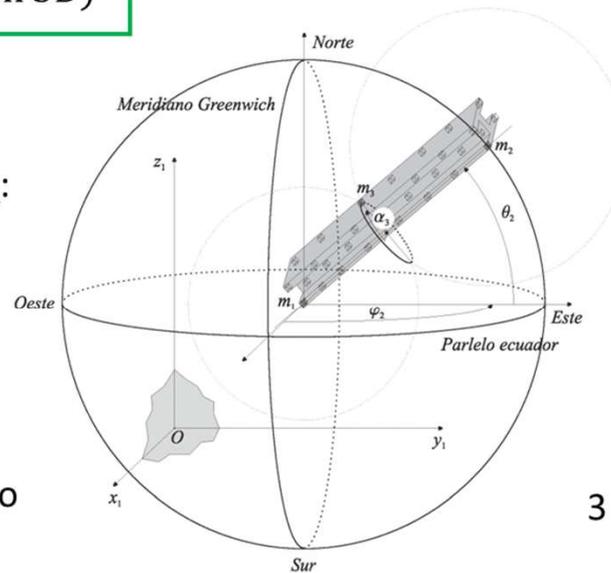
En 3D:



$$\text{g.d.l.} = \{x_1, y_1; \alpha_2\}$$

2 traslaciones

1 rotación o giro



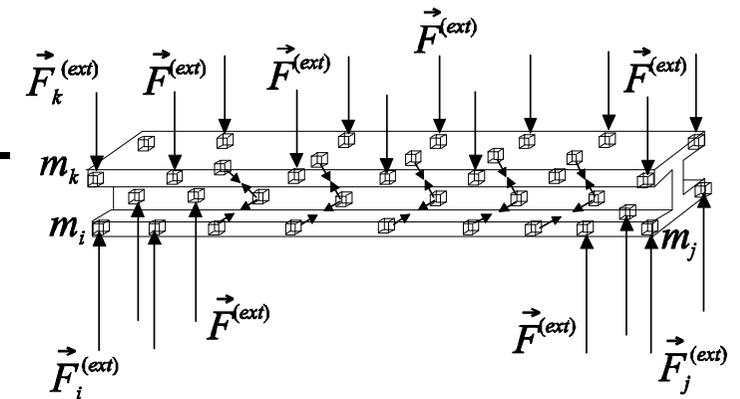
$$\text{g.d.l.} = \{x_1, y_1, z_1; \theta_2, \varphi_2; \alpha_3\}$$

3 traslaciones

1 rotación con eje fijo (el  $m_1-m_2$ )



## 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO) –cont.–



### 4.II.2.- Condiciones N. y S. de equilibrio (macro)

- “Dado un SR interactuando con su entorno mediante un sistema de fuerzas externas,  $\{\vec{F}_i^{(ext)}\}$ , estará aún en **equilibrio** si y sólo si: (a) Inicialmente las velocidades de sus 6 g.l. son nulas. Y (b) *El sistema de fuerzas es NULO o equilibrado* (tipo 4º) durante el tiempo de observación desde el sist. de ref. inercial de observación”.

SR en equilibrio  $\begin{cases} \text{(si i)} \\ \Leftrightarrow \\ \text{(Nec.)} \\ \Rightarrow \\ \text{(Suf.)} \\ \Leftarrow \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists t_0 \text{ tal que } \left\{ \dot{q}_i(t_0) \right\}_{i=1}^6 = \{0\}_{i=1}^6 \\ \text{(b) } \forall t \geq t_0 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \vec{0} \\ \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(ext)}) = \vec{0}, \forall O \in \text{SRI} \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x^{(e)} = 0 \\ \sum F_y^{(e)} = 0 \\ \sum F_z^{(e)} = 0 \\ \sum M_{O,x}^{(e)} = 0 \\ \sum M_{O,y}^{(e)} = 0 \\ \sum M_{O,z}^{(e)} = 0 \end{cases}$

(Sistema Nulo o tipo 4º:  $\vec{R} = \vec{0}$  y  $\vec{M}_O = \vec{0}$ )

¡ 6 condiciones de *fuerza y momento* nulos para 6 g.l!, reflejo de su *suficiencia*.

¡ No importan las *fuerzas internas* para el equilibrio del SR! como se dijo en T2

Y de las *externas* lo único que importa es su  $\vec{R}$  y su  $\vec{M}_O$ , para ver si son nulos: ¡*visión macroscópica* del sistema de fuerzas y del equilibrio!

## 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO) -cont.-

$$SR \text{ en equilibrio} \Rightarrow \begin{cases} \text{Nec.} & \sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})} = \vec{0} \\ \text{Suf.} & \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\text{ext})}) = \vec{0}, \forall O \in \text{SRI} \end{cases}$$

### 4.II.2.- Condiciones Necesarias y Suficientes de equilibrio (macro) -cont.-

- **Demostración:** Para demostrar la necesariedad ( $\Rightarrow$ ) de las condiciones de fuerza y momento, se utilizan las *condiciones de equilibrio* necesarias (y suficientes) para el *sistema de partículas* constituyentes del SR (tema 1). 

[Por un lado, se suman las ecs. de equilibrio para todas las partículas, para eliminar las fuerzas interiores (por la 3ª Ley de N.), dándonos la *ecuación de fuerzas*. Por otro lado, se multiplica vectorialmente la ecuación de equilibrio de cada partícula  $i$  por la posición de su correspondiente partícula,  $\vec{r}_i$ , resultando ecuaciones de *momento* nulo para cada partícula; al sumar esas nuevas ecuaciones para todas ellas, se eliminan los momentos de las fuerzas interiores (por la 3ª Ley de N.), y resulta la *ecuación de momentos* –referida al origen  $O$  desde el que se midieron las posiciones  $\vec{r}_i$  –.]

Para demostrar la suficiencia ( $\Leftarrow$ ) de las cond, se utiliza que la única información relevante de *cualquier* sistema de fuerzas que actúe sobre un SR se encuentra en su *resultante y momento resultante* (tema 2) [en cuerpos *deformables* no basta con ellos, se necesita más info]. 

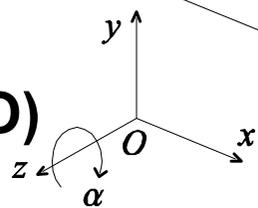
[Por “reducción al absurdo”: Se supone lo contrario, que con un sistema *nulo* o equilibrado sobre el SR, éste NO estuviera en equilibrio. Para lograr el equilibrio se debe añadir otro sistema al anterior, no-nulo para que sea relevante **para un SR**. En el equilibrio, *necesariamente* el sistema *conjunto* ha de ser nulo o equilibrado, según acabamos de ver. Pero de la nulidad de la *resultante conjunta* y del *momento conjunto*, se sigue que el sistema no-nulo añadido debe ser a la vez nulo, lo cual es una contradicción o *absurdo*. Así, la suposición de partida (“con un sistema nulo o equilibrado sobre el SR éste NO está en equilibrio”) es FALSA.]

- Deducimos de la demostración que las condiciones de sistema NULO de fuerzas (resultante y momento nulos), con respecto al equilibrio, son:
  - Necesarias para cualquier sistema o conjunto de partículas (no sólo para las de un SR); por ejemplo, para las que constituyen un *sólido deformable* (elástico o plástico) en eq, o para las que constituyen un *fluido*, líquido o gas, o para cualquier porción de estos sólidos y fluidos en eq.
  - Suficientes sólo para un SR (contraejemplo: barra elástica). Además, sólo para el SR se da el que haya una ec. de equilibrio por cada g.l; para los sólidos deformables y los fluidos, como tienen más de 6 g.l, las 6 ecs. no pueden ser suficientes.



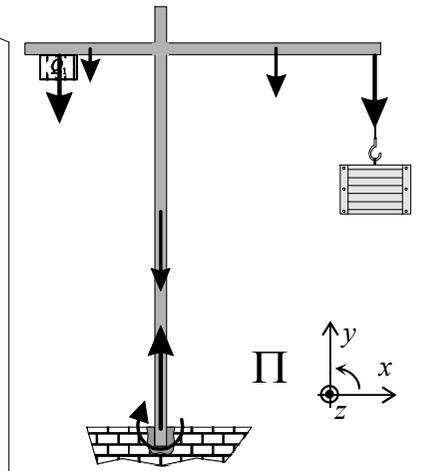
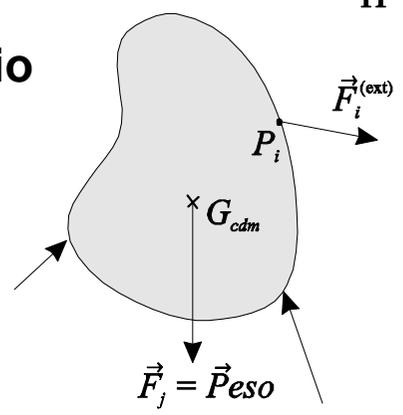
## 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO)

-cont.-



### 4.II.3.- Caso Plano ó 2D

#### 4.II.3.A.- Definición y Condiciones N. y S. de equilibrio



- En principio se trata de la siguiente situación, *más simple* que la 3D:

- El SR sólo se puede mover en el plano  $\Pi$  ( $= OXY$ ) que *lo contiene*, y sólo recibe fuerzas contenidas en  $\Pi$  (si entre ellas están las f. gravitatorias  $\Rightarrow \Pi_{\text{vertical}}$ ) Después (en 4.II.3.B) veremos otras situaciones *más realistas*, con SR y fuerzas en 3D pero que son *reducibles a esa situación plana 2D*. ▶

- El número de grados de libertad del SR 2D libre disminuye de 6 a 3: dos traslaciones y una rotación.  $G_{SR_{\text{PLANO LIBRE}}} = 3$  g. l. =  $\{x_G, y_G; \alpha_P\} \equiv \{q_i\}_{i=1}^3$  ▶

- **Definición de equilibrio:** “Un SR PLANO está en **equilibrio** si sus 3 g.l. se observan en reposo (ctes) durante el tiempo de observación desde el sist. ref. inercial.”

SR PLANO en equilibrio  $\Leftrightarrow \{q_i(t)\}_{i=1}^3 = \{q_i^{\text{eq}}\}_{i=1}^3, \forall t \Leftrightarrow \{\dot{q}_i(t)\}_{i=1}^3 = \{0\}_{i=1}^3, \forall t.$  (Nota:  $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$  son las velocidades de los g.d.l.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_G = 0, \dot{y}_G = 0; \dot{\alpha}_P = 0 \end{array} \right\}, \forall t$$

Y las coordenadas de las  $N-2$  partículas restantes, *dependientes de esos 3 g.l* ó coordenadas de 2 partículas, estarán por ello también en reposo. Sólo importan así las 2 partículas: ¡visión macro!

$$SR \text{ en equilibrio} \begin{cases} \xRightarrow{Nec.} \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \vec{0} \\ \xleftarrow{Suf.} \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(ext)}) = \vec{0}, \forall O \in SRI \end{cases}$$

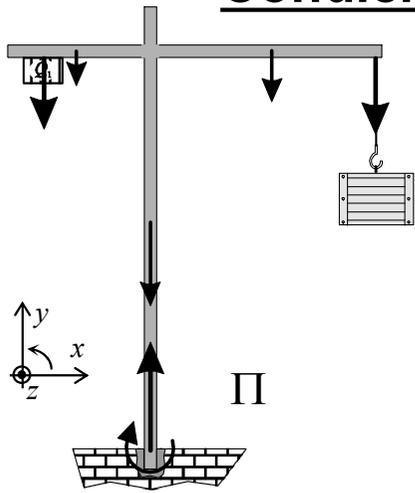
## 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO)

### 4.II.3.- Caso Plano ó 2D –cont.–

–cont.–

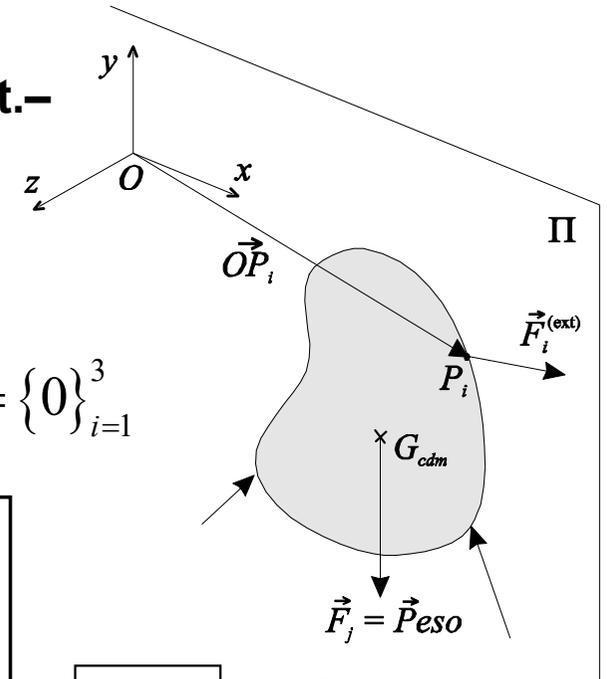
#### 4.II.3.A.- Definición y Condiciones N. y S. de equilibrio –cont.–

##### Condiciones (Necesarias y Suficientes) de equilibrio:



SR PLANO (si i) en equilibrio  $\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists t_0 \text{ tal que } \left\{ \dot{q}_i(t_0) \right\}_{i=1}^3 = \{0\}_{i=1}^3 \\ \text{(b) } \forall t \geq t_0 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x^{(e)} = 0 \\ \sum F_y^{(e)} = 0 \\ \sum M_{O,z}^{(e)} = 0 \end{array} \right. , \forall O \in \Pi \text{ (y al SRI)} \end{array} \right.$$



( ¡ 3 ecs. de equilibrio para 3 g.d.l: es una muestra de su suficiencia ! )



- Demostración:** Partimos de las condiciones N. y S. de equilibrio válidas en 3D.

En los ejes dados:  $\vec{F}_i^{(ext)} = (F_{x,i}^{(e)}, F_{y,i}^{(e)}, 0)$

$$\text{Si } O \in \Pi, \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(ext)}) = \overline{OP}_i \wedge \vec{F}_i^{(ext)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ F_{x,i}^{(e)} & F_{y,i}^{(e)} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, M_{Oz,i}^{(e)})$$

Entonces:  $\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \left( \sum_i F_{x,i}^{(e)}, \sum_i F_{y,i}^{(e)}, 0 \right) \\ \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(ext)}) = \left( 0, 0, \sum_i M_{Oz,i}^{(e)} \right) \end{array} \right.$ , de donde se siguen las 3 ecs. de equilibrio en 2D.



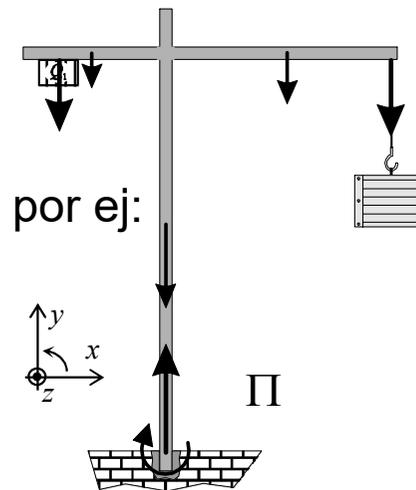
## 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO) –cont.–

### 4.II.3.- Caso Plano ó 2D –cont.–

#### 4.II.3.A.- Definición y Condiciones N. y S. de equilibrio –cont.–

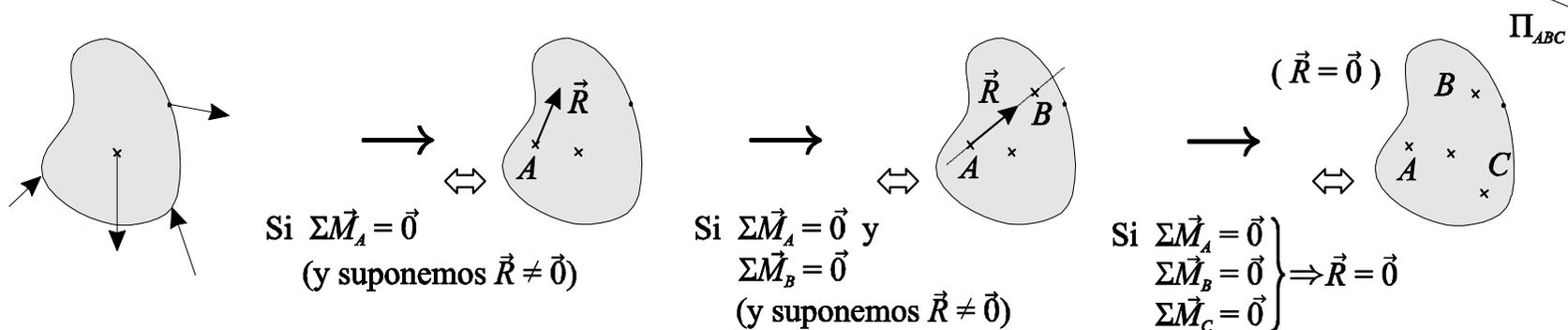
- Existen otras *condiciones* de equilibrio *equivalentes* en el caso plano; por ej:

SR PLANO en equilibrio  $\Leftrightarrow$  (si i)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists t_0 \text{ tal que } \left\{ \dot{q}_i(t_0) \right\}_{i=1}^3 = \{0\}_{i=1}^3 \\ \text{(b) } \forall t \geq t_0 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{array} \right. , \forall A, B, C \in \Pi \text{ y NO alineados.} \end{array} \right.$



◀ (De nuevo 3 ecs. de equilibrio para 3 g.d.l, aunque ahora todas son ecs. de momento)

- Demostración:** Para que un SR (en 2D ó 3D) esté en equilibrio hace falta que el sistema de fuerzas que recibe sea nulo (tipo 4º). Sabemos que en ese caso, automáticamente el momento es cero en **◀ todos los puntos del espacio. Pues bien, basta ver que es cero sólo en tres puntos no alineados:**



▶ Eso supone  $3 \times 3 = 9$  ecs. escalares de equilibrio en 3D (más de 6, redundantes entonces) ¡Pero en 2D son  $3 \times 1 = 3$  ecs. escalares, justo *lo necesario y suficiente para el equilibrio de sus 3 g.d.l!* c.q.d.

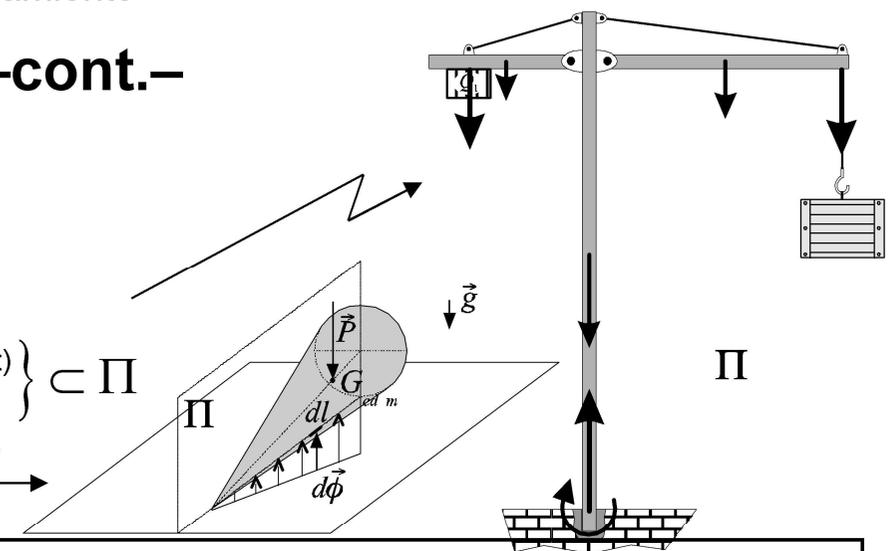
## 4.II.- Equilibrio del SR (LIBRE o LIGADO) –cont.–

### 4.II.3.- Caso Plano ó 2D –cont.–

#### 4.II.3.B.- Importancia del caso plano

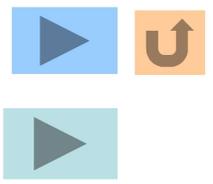
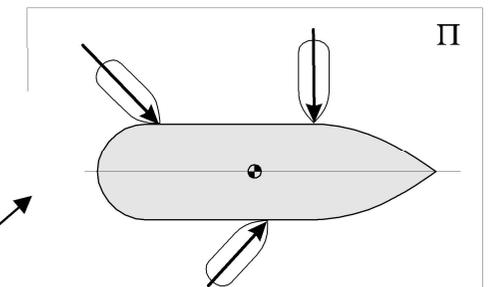
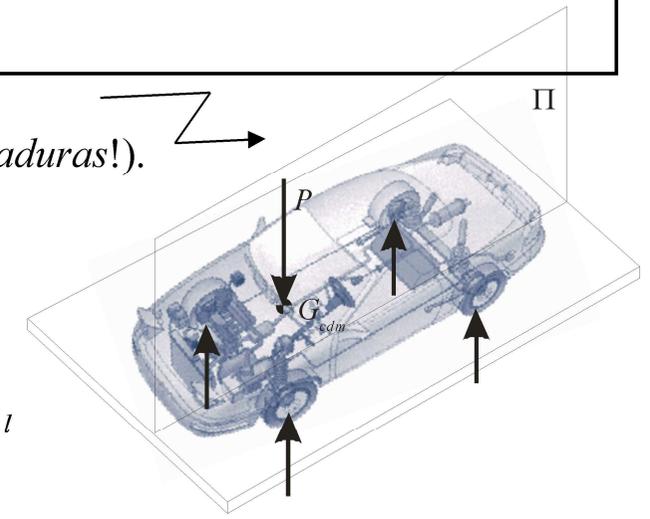
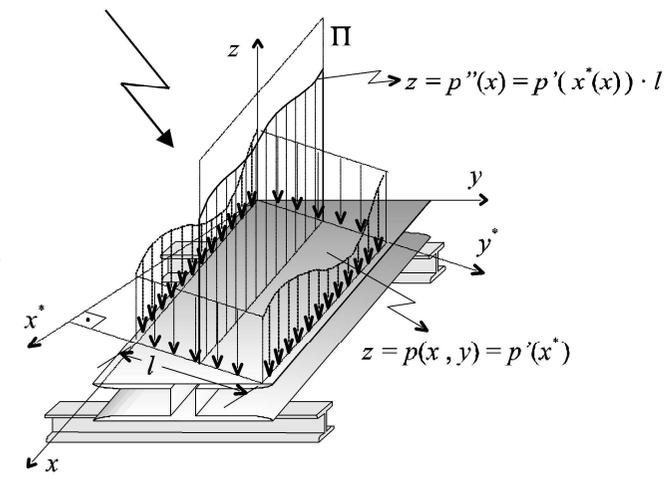
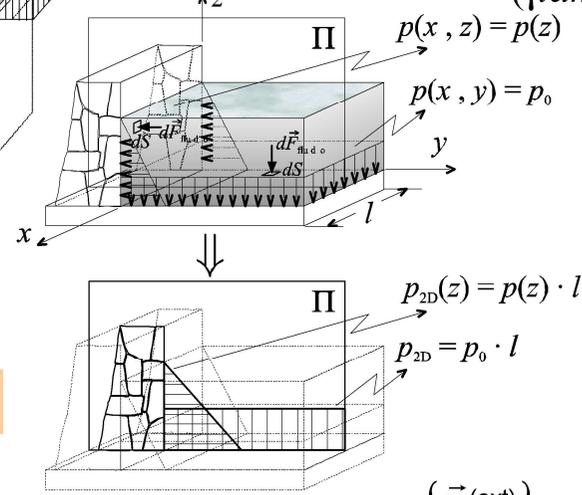
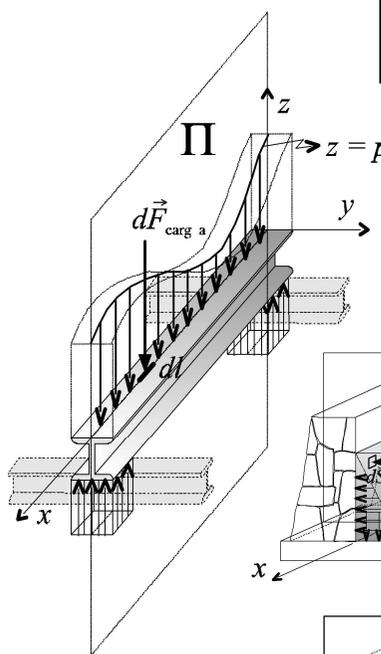
- **Casos reducibles a estudio plano:**

- El caso ya estudiado:  $SR \subset \Pi$  y  $\{\vec{F}_i^{(ext)}\} \subset \Pi$
- Un SR 3D pero con  $\{\vec{F}_i^{(ext)}\} \subset \Pi$



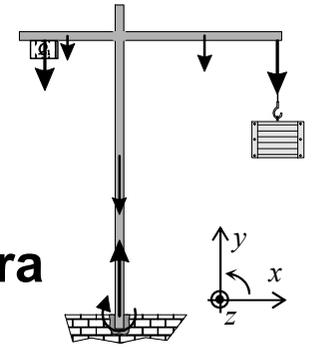
Un SR 3D con  $\{\vec{F}_i^{(ext)}\}$  en 3D pero REDUCIBLES a un sistema de fuerzas coplanarias en  $\Pi$ :  $\{\vec{F}_i^{(ext)}\} \Leftrightarrow S_{fuerzas} \subset \Pi$

- Ejemplo 1: Fuerzas distribuidas simétricamente respecto de un plano  $\Pi$  (¡también las ligaduras!).
- Ejemplo 2: Fuerzas distribuidas con simetría traslacional respecto de un plano  $\Pi$ . (¡también las ligaduras!) (Engloba al Ej.1).



➤ Un SR 3D con  $\{\vec{F}_i^{(ext)}\}$  en 3D NO reducibles a un sistema coplanario, pero al que se le estudia sólo las fuerzas contenidas en cierto plano  $\Pi$ .

¡En este caso la cond. equilibrio plano NO es suficiente para las 3D, sólo es necesaria!



## 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D)

### 4.III.1.- Estudio de las ligaduras planas: tipos y reacciones de ligadura

- Recordemos que **SR ligado** es el SR con ligaduras externas, no consideradas en el SR *libre* (que sí tiene ligaduras *internas*, las de *rigidez*).
- **Ligaduras (externas) en el SR:** Cualquier *limitación o restricción* a alguno/s de sus 3 g.l. ó mov. indep. en 2D (ó a sus 6 g.l. ó m. i. en 3D)



Aunque desde el punto de vista de las fuerzas... son las *interacciones de contacto* con cuerpos *rígidos* del *ext.* que *limitan* los valores posibles de los g.l.

- ¿Cuáles son esas ligaduras? Pueden implementarse de múltiples formas, pero sus efectos limitadores siempre serán equivalentes a alguno/s de los ocho casos “simbólicos” de la **tabla de ligaduras** (2D) siguiente (*¡verla!*).



[En ella se está despreciando el *rozamiento* en los contactos. Deben **revisarse y completarse** tras estudiar el apdo. 4.IV.]

- *Clasificación y descripción de las ligaduras*: Están hechas en dicha tabla. Nos basamos en que las ligaduras tienen dos efectos íntimamente relacionados, que son como las dos caras de una misma moneda:



- a) Efecto *limitador* o reductor de *g.d.l.* o *mov. elementales*. (enfoque o efecto cinemático). Son las **coacciones**.
- b) Efecto de producir una *distribución de fuerzas de reacción vincular*, pasivas e incógnitas, en la *zona de contacto*, para impedir esos movimientos elementales. (enfoque o efecto dinámico o de las fuerzas). Es el *P<sup>pio</sup> de Liberación*.



## 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

### 4.III.1.- Estudio de las ligaduras planas: tipos y reacciones de ligadura –cont.–

- a) **Efecto cinemático:** Se recoge en el concepto ya estudiado de coacción (ver T1): es cada *limitación* de *uno* de los posibles movimientos independientes o elementales –es decir, *uno de los posibles g.d.l.*– originada por una ligadura.

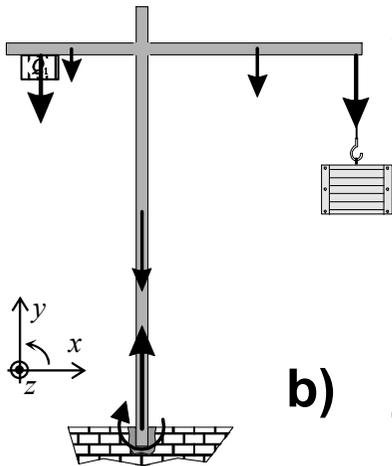
Si llamamos  $c$  al número de coacciones que produce una sola ligadura, ya podemos clasificar las ligaduras :

Ligaduras	Simple: $c = 1$
	Dobles: $c = 2$
	Triples: $c = 3$

Y para un SR con sólo esa ligadura, será  $G = 3 - c$  ¡Ver la tabla!

- b) **Efecto dinámico:** Como las *distribuciones* de fuerza de reacc. vincular actúan en un SR, éstas son deslizantes y, por tanto, reducibles en  $g^{ral}$  a un sistema fuerza-par o tursor, definido por su resultante y su momento respecto al pto.  $E$  de reducción –en  $g^{ral}$  el “pto.” de *contacto*–:  $\{\vec{\phi}, \vec{\mu}_E\}$  (ello es el  $P^{pio}$  de Liberación). El módulo, dirección y sentido de  $\vec{\phi}$  y el módulo y sentido de  $\vec{\mu}_E$  serán incógnitos en general: 3 incóg. Pero en muchos casos no son desconocidos los 3 atributos, de modo que el número de incógnitas que aporta cada ligadura,  $l$ , será  $l \leq 3$  :

Ver que  $l = c$  siempre. ¡Ver la tabla!





### 1.3.- Grados de libertad y ligaduras en los sistemas mecánicos

1.3.2 y 1.3.5.- Ligaduras y coacciones

#### EXPLICACIÓN FÍSICA de las LIGADURAS:

**1.3.2. Ligaduras CUERPOS INVOLUCRADOS EN SU DESC. DINÁMICA**

Ligadura: Plano inclinado. Cuerpo obligado a moverse sobre su superficie.

Ligadura: Pared. Clavo obligado a permanecer en un punto fijo.

Ligadura: Cable en tensión. Partículas obligadas a estar a una distancia fija.

Ligadura: Alambre. Anilla obligada a moverse según una parábola.

Ligadura: Articulación. Un punto del sólido rígido obligado a permanecer fijo.

Figura 1.3

Figura 1.5



**1.3.2. Ligaduras DESCRIPCIÓN ESTÁTICA / CINEMÁTICA**

Ecuaciones de ligadura  $\varphi(x_i, y_i, z_i) = 0$

Ligadura: Plano inclinado. Cuerpo obligado a moverse sobre su superficie.

Ligadura: Pared. Clavo obligado a permanecer en un punto fijo.

Ligadura: Cable en tensión. Partículas obligadas a estar a una distancia fija.

Ligadura: Alambre. Anilla obligada a moverse según una parábola.

Ligadura: Articulación. Un punto del sólido rígido obligado a permanecer fijo.

$Ax_p + By_p + Cz_p + D = 0$  (1.3)

$x_p = x_0$   
 $y_p = y_0$   
 $z_p = z_0$

$y_p = ax_p^2 + b$  (1.4)

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - d^2 = 0$  (1.5)

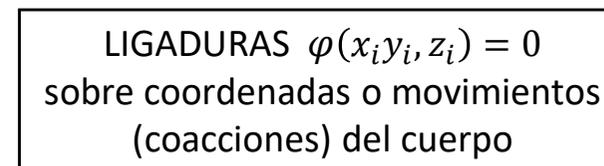
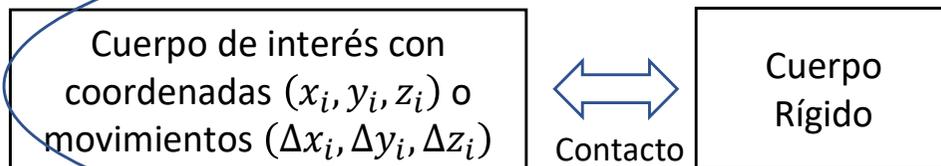
$x_p = x_q$  (1.6)  
 $y_p = y_q$  (1.7)

Figura 1.3

Figura 1.5

Nos preguntamos: ¿Por qué y quién produce esos *impedimentos, coacciones o relaciones* entre las coord.  $(x_i, y_i, z_i)$  ó los movimientos  $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$  de la configuración del sistema, expresadas por *ecuaciones de ligadura*  $\varphi(x_i, y_i, z_i) = 0$  ?

Son las *interacciones o fuerzas de contacto* de los cuerpos del sistema con cuerpos rígidos: suelos, paredes, techos, guías, raíles, cables, pernos... Pues como éstos no pueden deformarse, *impiden* el movimiento libre de aquellos, los cuerpos del sistema, en contacto con estos cuerpos rígidos.



¡Las fuerzas de reacción **vincular**  $\vec{\phi}$  que se estudiarán en el apdo. 1.4.2 son esas fuerzas de contacto!

Descripción dinámica de las *ligaduras*: por *fuerzas*, de contacto.

Descrip. estática/cinemática de las *ligaduras*: por ecuaciones  $\varphi = 0$  o coacc.

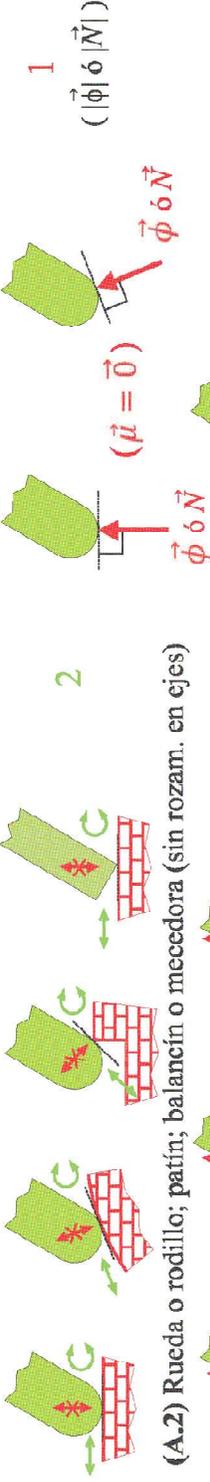
# TABLA DE VÍNCULOS PARA SÓLIDOS RÍGIDOS PLANOS (*sin rozamiento*)

**SÍMBOLO y COACCIONES**

**Nº GRADOS de LIBERTAD que quedan,  $G = 3 - c$**  **FUERZA y PAR de REACC. VINCULAR,  $\{\vec{\phi}, \vec{\mu}\}$ , que ejerce  $I = c$**  **Nº INCÓG. de REACC. de REACC. VINCULAR,**

**(A) LIGADURAS SIMPLES:  $c = 1$**

(A.1) Apoyos simples: puntuales y sin rozamiento



(A.2) Rueda o rodillo; patín; balancín o mecedora (sin rozam.. en ejes)



(A.3) Deslizaderas en *ranura* o en *árbol* 'lisos' (sin rozamientos)



(A.4) Cable o cuerda (tensos); Biela o eslabón ligero



**(B) LIGADURAS DOBLES:  $c = 2$**

(B.1) Articulación, perno o pasador (sin rozamiento en eje)



(B.2) Deslizaderas rígidas (sin rozamiento).



(B.3) Apoyo extenso pero sin rozam.



**(C) LIGADURAS TRIPLES:  $c = 3$**

(C.1) Empotramiento; soldadura



(\*):  $\{0 \leq x_E \leq b\}$  : ver apartado 4.VI,  $\{0 \leq \mu \leq N b\}$  sobre el rozamiento.

**TABLA DE VÍNCULOS PARA SÓLIDOS RÍGIDOS PLANOS (sin rozamiento)**

**SÍMBOLO y COACCIONES**

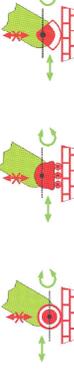
**Nº GRADOS de LIBERTAD que quedan,  $G = 3 - c$**   
**Nº INCÓG. de REACC. de REACC. VINCULAR,  $I = c$**   
**REACC. VINCULAR,  $\{\vec{\phi}, \vec{\mu}\}$ , que ejerce**

**(A) LIGADURAS SIMPLES:  $c = 1$**

(A.1) Apoyos simples: puntuales y sin rozamiento



(A.2) Rueda o rodillo; patín; balancín o mecedora (sin rozam. en ejes)



(A.3) Deslizaderas en ranura o en árbol 'lisos' (sin rozamientos)



(A.4) Cable o cuerda (tensos); Biela o eslabón ligero



**(B) LIGADURAS DOBLES:  $c = 2$**

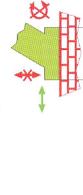
(B.1) Articulación, perno o pasador (sin rozamiento en eje)



(B.2) Deslizaderas rígidas (sin rozamiento).



(B.3) Apoyo extenso pero sin rozam.

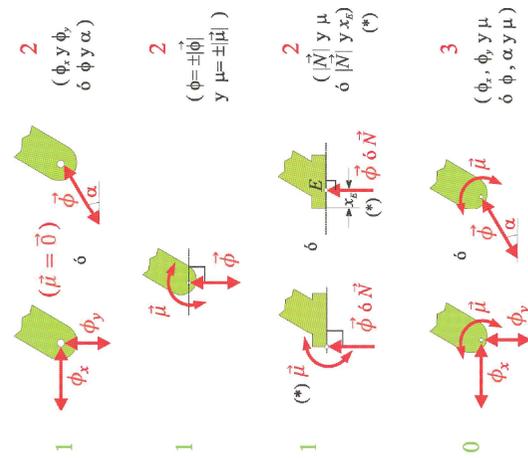
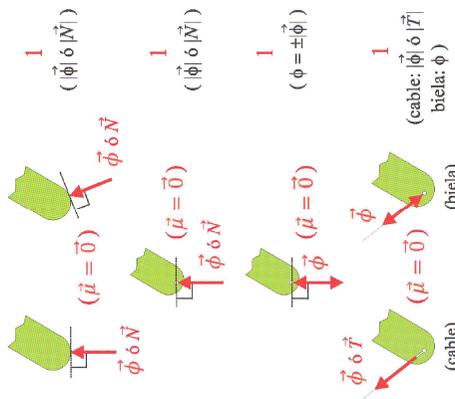


**(C) LIGADURAS TRIPLES:  $c = 3$**

(C.1) Empotramiento; soldadura



(\*) :  $\{0 \leq x_c \leq b\}$ ; ver anexo 4.VI, sobre el rozamiento.



**Dos 'reglas de oro' como conclusión de observar y estudiar la tabla de vínculos o Principio de liberación:**

**1.- Por cada coacción de traslación de una ligadura ésta producirá una *componente (incógnita)  $\phi_{\parallel}$  de fuerza de reacción vincular en la misma dirección (paralela) de la traslación.***

Por eso, las fuerzas de reacción de ligaduras *simples* ( $c = 1$ ), son las que tienen la dirección conocida: la de dicha coacción. Sólo tienen desconocido su módulo, y en las ligaduras *bilaterales* (deslizaderas y biela) también su sentido.

**2.- Por cada coacción de rotación o giro debe aparecer un *momento de par (incógnito)  $\mu$  de reacción vincular.***

Las ligaduras cuyo contacto con el SR de interés es *puntual*, mediante pernos, amarres, apoyos... de dimensiones tan relativamente pequeñas que se pueden modelar por un punto C (son todas las de la tabla excepto las tres últimas: deslizaderas rígidas, apoyo extenso y el empotramiento/soldadura) tienen siempre un m<sup>to</sup> de par de reacc. vincular nulo,  $\mu = 0$ .

¿Por qué? (A) Porque no pueden realizar la coacción de giro respecto de C al ser el contacto C puntual, sin dimensiones.

(B) Porque la distribución de fuerzas en el contacto será concurrente en C, de modo que el m<sup>to</sup>  $\mu$  que produce en C será nulo.



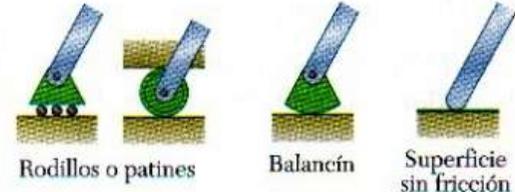
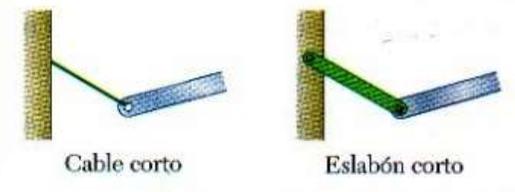
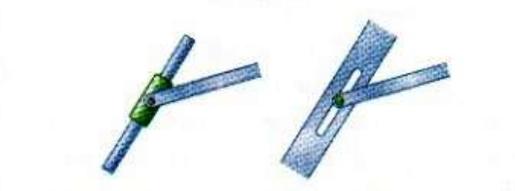
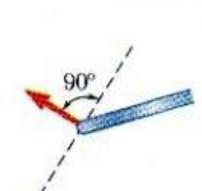
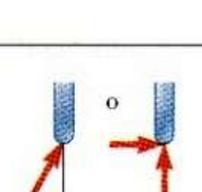
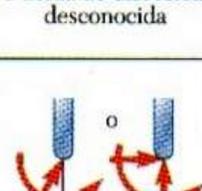
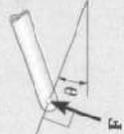
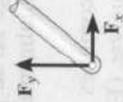
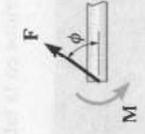
Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
 <p>Rodillos o patines      Balancín      Superficie sin fricción</p>	 <p>Fuerza con línea de acción conocida</p>	1
 <p>Cable corto      Eslabón corto</p>	 <p>Fuerza con línea de acción conocida</p>	1
 <p>Collarín sobre una barra sin fricción      Perno sin fricción en una ranura lisa</p>	 <p>Fuerza con línea de acción conocida</p>	1
 <p>Perno sin fricción, articulación o bisagra      Superficie rugosa</p>	 <p>Fuerza de dirección desconocida</p>	2
 <p>Apoyo fijo</p>	 <p>Fuerza y par</p>	3

Figura 4.1 Reacciones en apoyos y conexiones.

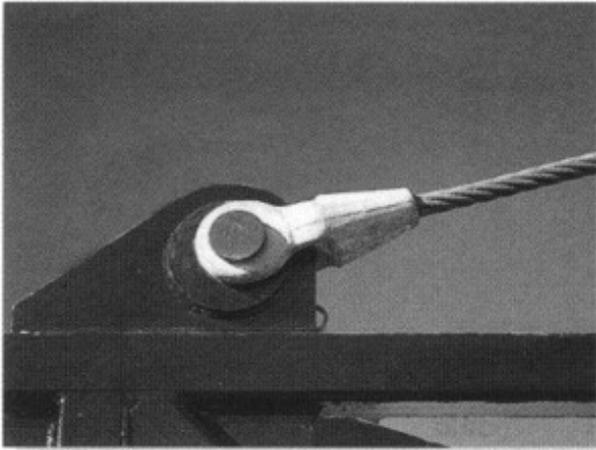
- 1. Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida.** Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos, balancines, superficies sin fricción, eslabones o bielas y cables cortos, collarines sobre barras sin fricción y pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos mencionados anteriormente junto con las reacciones que producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción; dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.
- 2. Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.** Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados, articulaciones o bisagras y superficies rugosas*. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran *dos incógnitas* que usualmente se representan por sus componentes  $x$  y  $y$ . En el caso de una superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.
- 3. Reacciones equivalentes a una fuerza y un par.** Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran *tres incógnitas*, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y en el momento del par.

TABLA 5-1 • Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas bidimensionales de fuerza

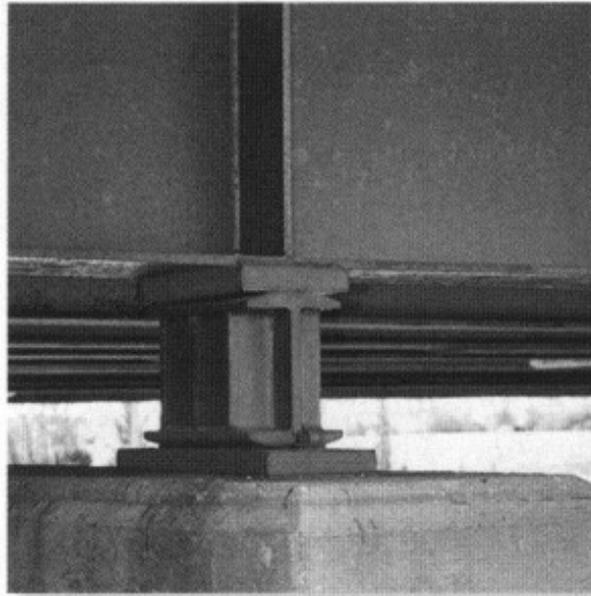
Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
(1)  cable	Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa alejándose del miembro en la dirección del cable.	1
(2)  eslabón sin peso	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón.	1
(3)  rodillo	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.	1
(4)  rodillo o pasador confinado en una ranura lisa	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.	1
(5)  mecedora	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.	1
(6)  superficie de contacto lisa	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.	1
(7)  miembro conectado mediante un pasador a un collar sobre una barra lisa	Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.	1
(8)  pasador o articulación lisa	Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza, o la magnitud y la dirección $\phi$ de la fuerza resultante. Observe que $\phi$ y $\theta$ no son necesariamente iguales [usualmente no, a menos que la barra mostrada sea un eslabón como en (2)].	2
(9)  miembro con conexión fija a un collar sobre una barra lisa	Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.	3
(10)  soporte fijo o empotrado	Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección $\phi$ de la fuerza resultante.	3

continúa

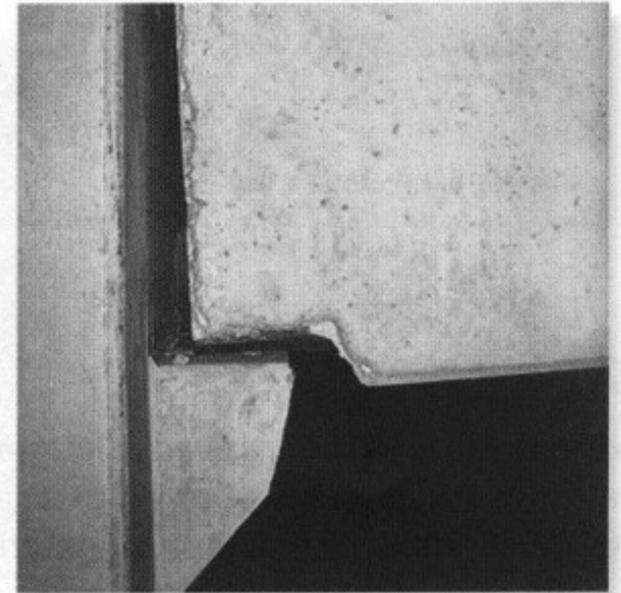




El cable ejerce una fuerza sobre la cartela en la dirección del cable. (1)



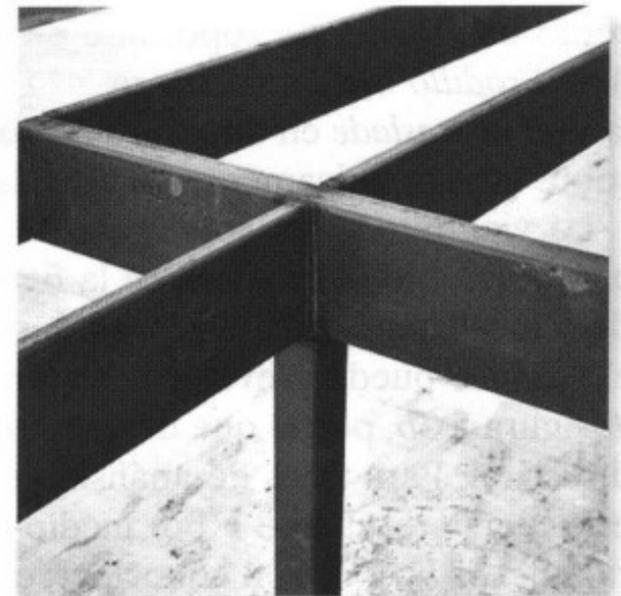
El soporte de mecedora para esta trabe de puente permite el movimiento horizontal de manera que el puente puede dilatarse y contraerse a consecuencia de la temperatura. (5)



Esta trabe de concreto descansa sobre el borde que supuestamente actúa como una superficie lisa de contacto. (6)

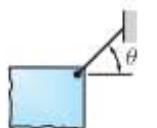
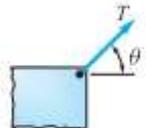
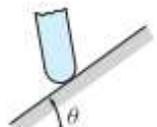
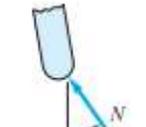
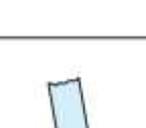
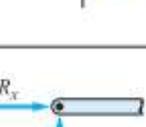
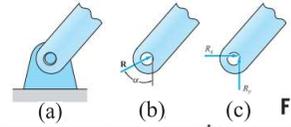
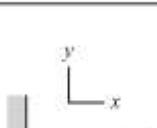


Este edificio de servicios está soportado por un pasador en la parte superior de la columna. (8)



Las vigas del piso de este edificio están soldadas entre sí para formar conexiones fijas. (10)



Soporte	Reacción(es)	Descripción de la(s) reacción(es)	Número de incógnitas
(a)  Cable flexible de peso despreciable		Tensión de magnitud desconocida $T$ en la dirección del cable	Una
(b)  Superficie sin fricción (punto único de contacto)		Fuerza de magnitud desconocida $N$ dirigida normal a la superficie	Una
(c)  Soporte de rodillo		Fuerza de magnitud desconocida $N$ normal a la superficie que soporta el rodillo	Una
(d)  Superficie con fricción (punto único de contacto)		Fuerza de magnitud desconocida $N$ normal a la superficie y fuerza de fricción de magnitud desconocida $F$ paralela a la superficie	Dos
(e)  Soporte de pasador		Fuerza desconocida $\mathbf{R}$ 	Dos
(f)  Empotramiento (de voladizo)		Fuerza desconocida $\mathbf{R}$ y un par de magnitud desconocida $C$	Tres

- (a) **Cable flexible (peso despreciable).** Un cable flexible ejerce un tirón, o fuerza de tensión, en la dirección del cable. Si se desprecia el peso del cable, éste forma una línea recta. Si se conoce su dirección, al remover el cable se introduce una incógnita en un diagrama de cuerpo libre: la magnitud de la fuerza ejercida por el cable.
- (b) **Superficie sin fricción: punto único de contacto.** Cuando un cuerpo está en contacto con una superficie sin fricción sólo en un punto, la reacción es una fuerza que es perpendicular a la superficie, actuando en el punto de contacto. A esta reacción con frecuencia se le refiere simplemente como *fuerza normal*. Caminar sobre una acera helada es peligroso debido a que es difícil generar una fuerza en cualquier dirección excepto perpendicular a la acera.) Por tanto, al remover una superficie de este tipo se introduce una incógnita en un diagrama de cuerpo libre: la magnitud de la fuerza normal. Si el contacto entre el cuerpo y la superficie ocurre en un área finita, en vez de en un punto, la línea de acción de la fuerza normal resultante también será una incógnita.
- (c) **Soporte de rodillo.** Un soporte de rodillo es equivalente a una superficie sin fricción: sólo puede ejercer una fuerza que es perpendicular a la superficie de soporte. La magnitud de la fuerza es entonces la única incógnita que se introduce en un diagrama de cuerpo libre cuando se remueve el soporte.
- (d) **Superficie con fricción: punto único de contacto.** Una superficie con fricción puede ejercer una fuerza que actúa a un ángulo con la superficie. Las incógnitas se pueden considerar como la magnitud y dirección de la fuerza. Sin embargo, suele ser ventajoso representar las incógnitas como  $N$  y  $F$ , las componentes que son perpendiculares y paralelas a la superficie, respectivamente. La componente  $N$  se denomina *fuerza normal* y  $F$  se conoce como *fuerza de fricción*. Si hay un área de contacto, la línea de acción de  $N$  también será una incógnita.
- (e) **Soporte de pasador.** Un pasador es un cilindro que es ligeramente menor que el agujero en que se inserta, como se muestra en la figura 4.1(a). Ignorando la fricción, el pasador sólo puede ejercer una fuerza que es normal a la superficie de contacto, indicada como  $\mathbf{R}$  en la figura 4.1(b). Un soporte de pasador entonces introduce dos incógnitas: la magnitud de  $\mathbf{R}$  y el ángulo  $\alpha$  que especifica la dirección de  $\mathbf{R}$  ( $\alpha$  se desconoce ya que el punto donde el pasador hace contacto con la superficie del agujero no se conoce). Es muy común que las dos incógnitas se elijan ser componentes perpendiculares de  $\mathbf{R}$ , como  $R_x$  y  $R_y$  indicadas en la figura 4.1(c).
- (f) **Empotramiento (de voladizo).** Un empotramiento, también conocido como *soporte de voladizo*, evita todo el movimiento del cuerpo en el empotramiento. La traslación (movimiento horizontal o vertical) se evita por una fuerza y un par impide la rotación. Por tanto, un empotramiento introduce tres incógnitas en un diagrama de cuerpo libre: la magnitud y dirección de la fuerza reactiva  $\mathbf{R}$  (estas incógnitas comúnmente se eligen que sean dos componentes de  $\mathbf{R}$ , como  $R_x$  y  $R_y$ ) y la magnitud de  $C$  del par reactivo.



### 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

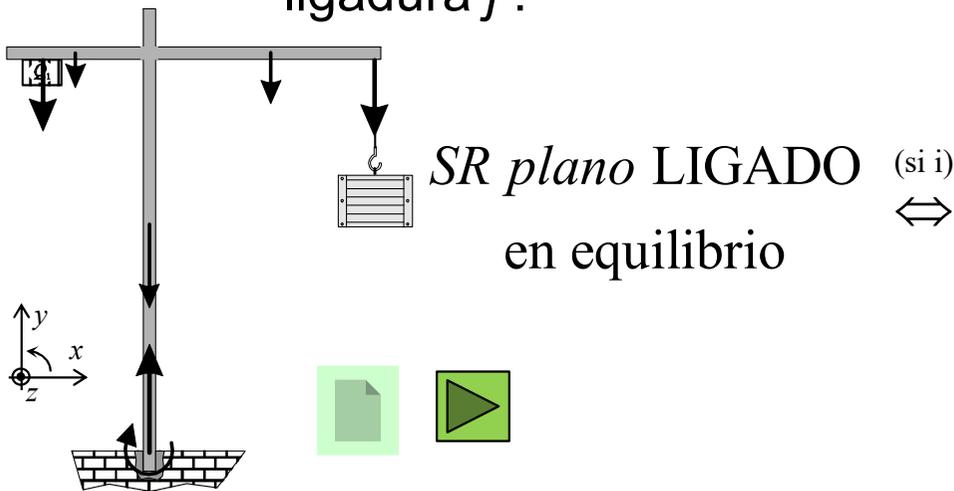
#### 4.III.2.- Definición de equilibrio y Condiciones N. y S. de equilibrio

- La definición de equilibrio se simplifica a que sólo hay que observar en *reposo permanente* un menor número de grados de libertad,  $\mathbf{G} = 3 - \Sigma c$ :

$$SR \text{ LIGADO en equilibrio} \Leftrightarrow \{q_i(t)\}_{i=1}^G = \{q_i^{eq}\}_{i=1}^G, \forall t \Leftrightarrow \left\{ \dot{q}_i(t) \right\}_{i=1}^G = \{0\}_{i=1}^G, \forall t$$

(Nota:  $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$  son las *velocidades* de los g.d.l.)

- La condición N. y S. de equilibrio se “complica” en el sentido de añadir al sumatorio de *fuerzas* y al de *momentos* las **incógnitas**  $\{\vec{\phi}_j, \vec{\mu}_{E_j}\}$  de cada ligadura  $j$ :



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \exists t_0 \text{ tal que } \left\{ \dot{q}_i(t_0) \right\}_{i=1}^G = \{0\}_{i=1}^G \\ \text{(b) } \forall t \geq t_0 \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x^{(act)} + \sum \phi_x = 0 \\ \sum F_y^{(act)} + \sum \phi_y = 0 \\ \sum M_{O,z}^{(act)} + \sum M_{O,z}^{(\phi)} + \sum \mu_{E,z} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

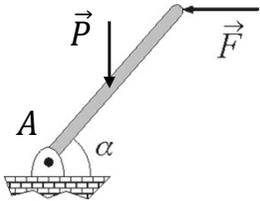
[ $\forall O \in \Pi$ ] (y al SRI)]

- Su principal utilidad es que con ella disponemos de 3 ecuaciones para hallar las *incógnitas de fuerza y momento de reacción vincular*  $\{\vec{\phi}_j, \vec{\mu}_{E_j}\}$ , necesarias para que el SR ligado esté *en equilibrio*, bajo el sistema de *fuerzas activas*  $\{\vec{F}_i^{(act)}\}$ , que en general serán *datos* del problema.

## 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

### 4.III.2.- Definición de equilibrio y Condiciones N. y S. de equilibrio –cont.–

Ejemplo:



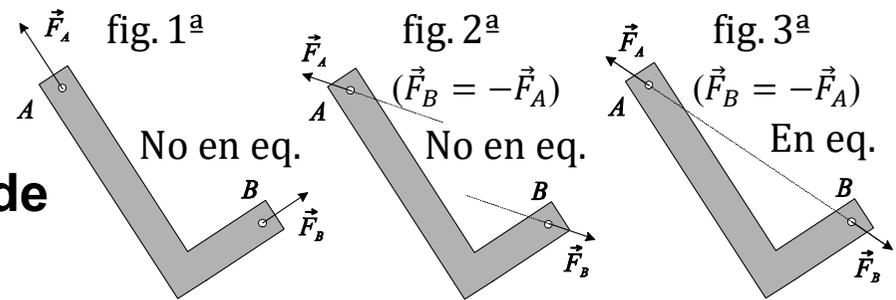
- Tener en cuenta que en los casos en los que al SR le quedan g.d.l,  $G > 0$ , el ó los valores concretos que pueden tomar en la *configuración de equilibrio* pueden ser *incógnitas* (denominadas de configuración, en un número que llamaremos  $I_G (\leq G)$ ), las cuales también se determinarían de las ecuaciones de equilibrio. En el ejemplo, las 3 incógs. a determinar de las 3 ecs. de *equilibrio* son:  $\{\phi_{Ax}, \phi_{Ay}; \alpha\}$  (se suponen conocidos  $P$  y  $F$ ) incógs. de reacción vinc.  $\xrightarrow{\text{incóg. de configuración}}$
- En 2D, como se dispone de 3 ecs. de equilibrio, la condición de solubilidad o resolubilidad es  $I \leq 3$  (ó  $I + I_G \leq 3$  si hubiera incógnitas de configuración). Además, habría que comprobar que las incógnitas están “bien dispuestas” en las 3 ecuaciones  $\Leftrightarrow$  no son *impropias* –ver después, al final de 4.III.4–.
- Los problemas de equilibrio resolubles sólo con las ecuaciones de equilibrio se llaman **estáticamente determinados**. En caso contrario, se denominan *estáticamente indeterminados*, y necesitan de *ecuaciones adicionales* para resolver *todas* sus incógnitas.



Podrán *añadirse* a las ecuaciones de equilibrio las ecuaciones que aporta la *Elasticidad y Resistencia de materiales*, que estudia las *deformaciones* del sólido en dicho equilibrio, asumiendo que son pequeñas para seguir usando las ecs. de eq. y aproximaciones del SR. Esas ecuaciones tienen la forma de Ley de Hooke ( $F = k\Delta l$ ) si las deformaciones son elásticas, que es lo habitual.

### 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

#### 4.III.3.- Teorema de las 2 fuerzas y teorema de las 3 fuerzas: Utilidades.

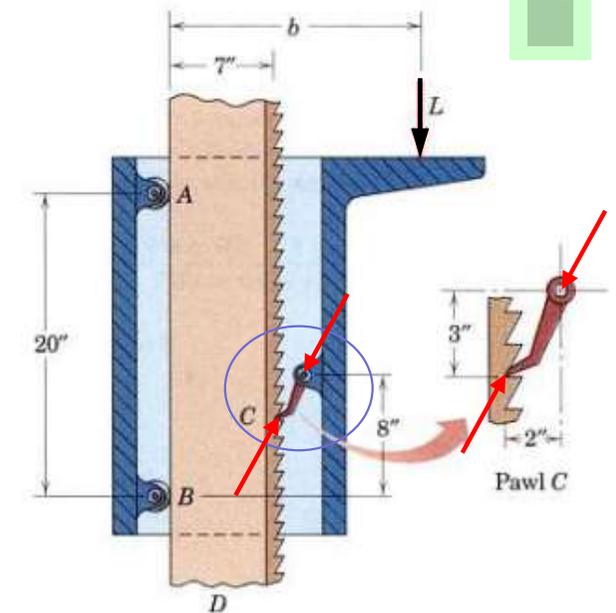
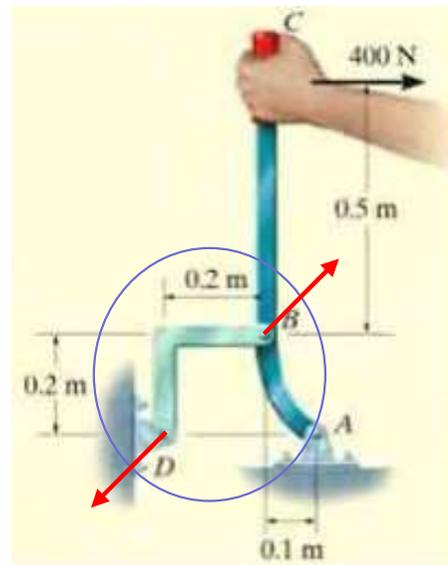
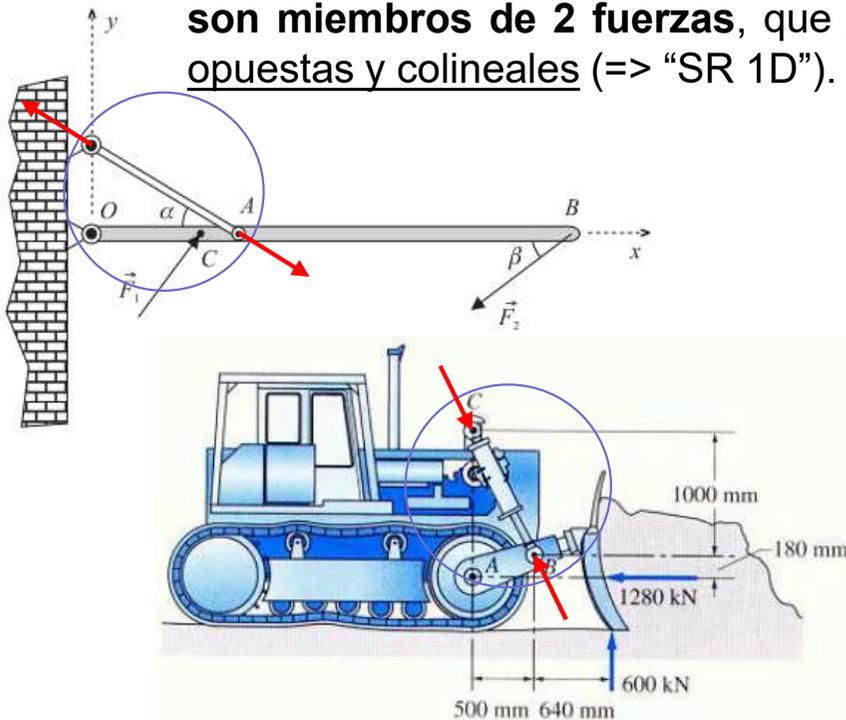


Son dos proposiciones consecuencia de las ecuaciones de equilibrio, que permiten sacar alguna información sobre las fuerzas incógnita sin tener que plantear dichas ecuaciones de equilibrio.

- **Teorema de las 2 fuerzas:** “Para que un SR sujeto a la acción de sólo 2 fuerzas esté en equilibrio, es necesario y suficiente que las 2 fuerzas sean opuestas y colineales (con la misma línea de acción)”. Demostración:

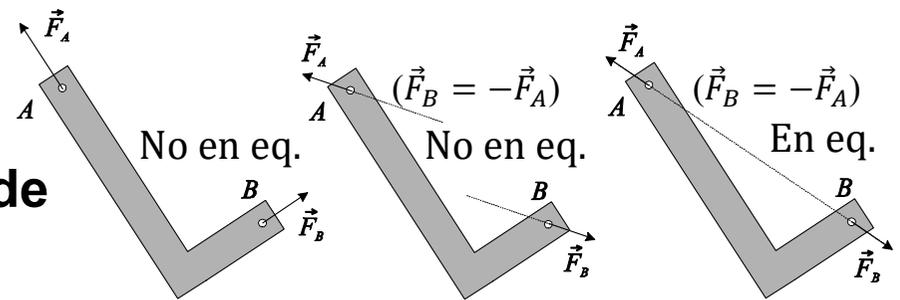
$$SR \text{ en equilibrio} \begin{matrix} \xrightarrow{Nec.} \\ \xleftarrow{Suf.} \end{matrix} \Sigma \vec{F} = \vec{0} \text{ y } \Sigma \vec{M}_O = \vec{0}. \text{ Entonces, } \Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \text{fig. 2}^a, \text{ y } \Sigma \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \text{fig. 3}^a$$

**Utilidad:** Las barras, escuadras, cables, etc que estén *conectados al exterior por sólo dos puntos*, si se pueden considerar de peso despreciable frente a las dos fuerzas solicitadas en las conexiones, **son miembros de 2 fuerzas**, que estarán en equilibrio si éstas (también llamadas *tensiones*) son opuestas y colineales (=> “SR 1D”). Esta es la justificación del funcionamiento de una *biela*:



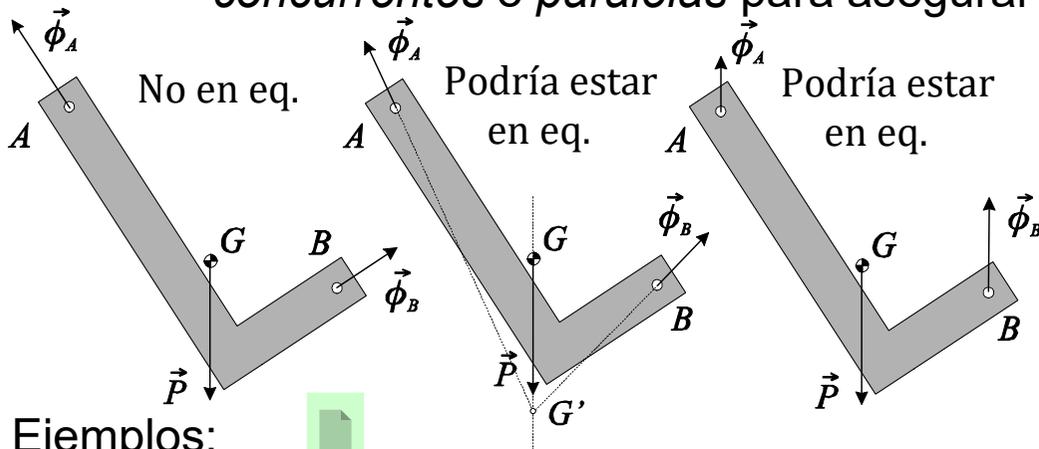
### 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

#### 4.III.3.- Teorema de las 2 fuerzas y teorema de las 3 fuerzas: Utilidades.



- **Teorema de las 2 fuerzas:** “Para que un SR sujeto a la acción de sólo 2 fuerzas esté en equilibrio, es necesario y suficiente que las 2 fuerzas sean opuestas y colineales (con la misma línea de acción)”.
- **Teorema de las 3 fuerzas:** “Si un SR está sujeto a la acción de sólo 3 fuerzas y en esas condiciones está en equilibrio, entonces necesariamente las 3 fuerzas son **coplanarias** ( $\Rightarrow$  SR 2D) y, dentro del plano común, son además **concurrentes** o bien son **paralelas**”.

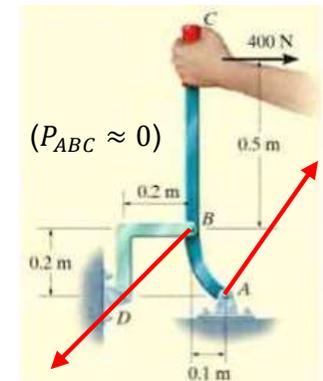
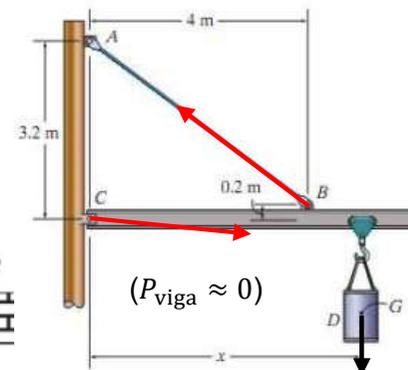
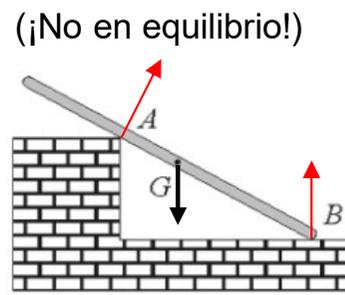
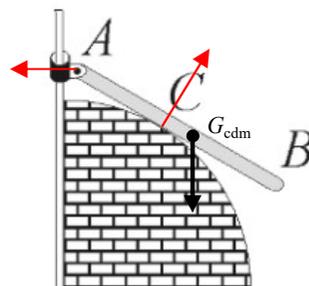
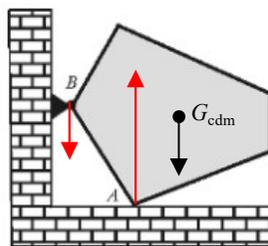
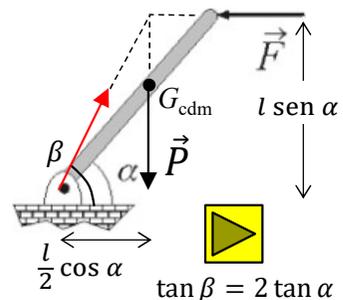
Pero no es suficiente sólo saber que las 3 fuerzas son *coplanarias* y además *concurrentes* o *paralelas* para asegurar que el SR está en equilibrio bajo su acción.



SR sujeto a $\left\{ \vec{F}_i^{(ext)} \right\}_{i=1}^3$ y en equilibrio	Nec. $\Rightarrow$ ( $\neq$ ) Suf.	$\left\{ \vec{F}_i^{(ext)} \right\}_{i=1}^3$ son coplanarias
		y $\left\{ \vec{F}_i^{(ext)} \right\}_{i=1}^3$ son concurrentes ó paralelas

(Dem: en los apuntes y en la pizarra)

Ejemplos:



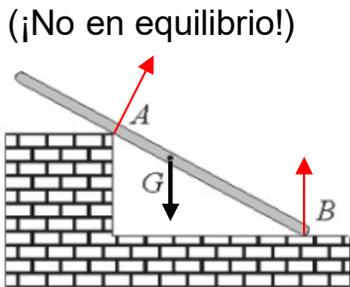
### 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

#### 4.III.3.- Teorema de las 2 fuerzas y teorema de las 3 fuerzas: Utilidades.

- Teorema de las 3 fuerzas:

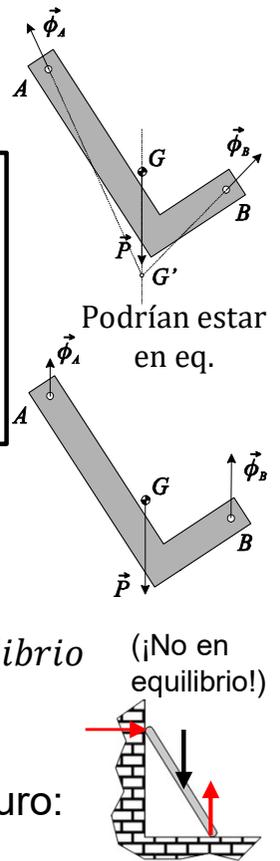
- Utilidades del T3F:

- Su *negación* nos da una “Condición *suficiente* de no-equilibrio”:

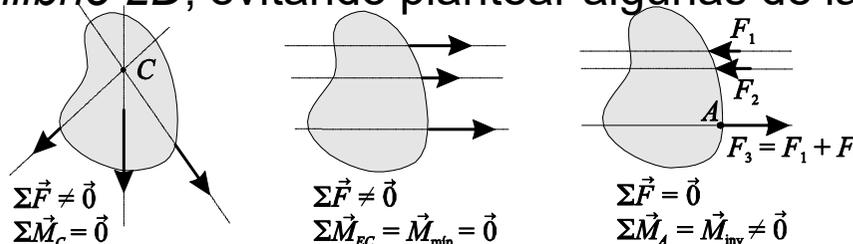


SR sujeto a  $\{\vec{F}_i^{(ext)}\}_{i=1}^3$  que  $\left\{ \begin{array}{l} \text{NO son coplanarias} \\ \text{NO son concurrentes ni paralelas} \end{array} \right\} \xrightarrow[\neq]{\text{Suf.}} \text{SR NO en equilibrio}$

Ejemplos: Las siguientes escaleras apoyadas sin rozamiento se caerían seguro:



- Ofrece un *método geométrico* para calcular incógnitas de fuerza, distancia o ángulo *en el equilibrio 2D*, evitando plantear algunas de las condiciones de eq.



Ej: ver diapo. anterior:

- Comentarios al T3F :

- Asumida la *coplanariedad*, la concurrentencia no es suficiente porque ello sólo asegura que los momentos se anulan en un punto, pero no que la resultante sea nula (ver 1ª figura encima). El paralelismo no es suficiente porque no asegura ni que  $\sum \vec{M}_o = \vec{0}$  ni que  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  (figs. 2ª y 3ª).



En pocas palabras: *coplanariedad*, *concurrentencia* y/o *paralelismo* sólo implican  $\vec{M} \cdot \vec{R} = 0$ , es decir, que las 3 fuerzas sean tipo 2º, 3º ó 4º, y no tipo 4º con seguridad.

- Para 4 ó más fuerzas no se cumple, pero sí para un SR con *N* fuerzas aplicadas sólo en 3 puntos.



### 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

#### 4.III.4.- Grados de libertad y Estabilidad: SR mecanismo, isostático e hiperestático

- Ya sabemos que el número de g.d.l. (coordenadas o mov. independientes) del SR *plano ligado* puede *calcularse* por:  $G = 3 - \sum C = 3 - \sum I$

Sólo de ello ya podemos *extraer mucha información*:

¡Hay que *verlo también por inspección*, pues  $G_{real}$  depende no sólo del número  $\sum C$ , sino de cómo se dispongan en el SR!

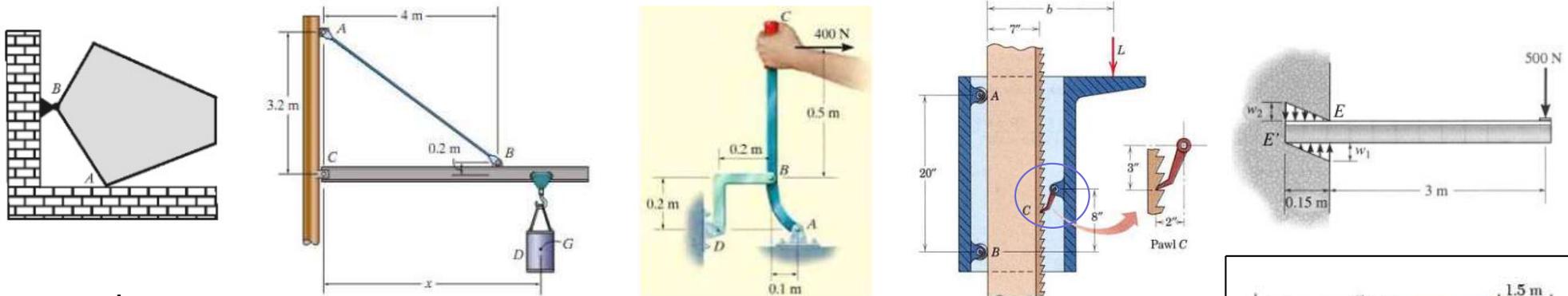
**i. Clasificar al SR:**

Según el *signo* de  $G$ :

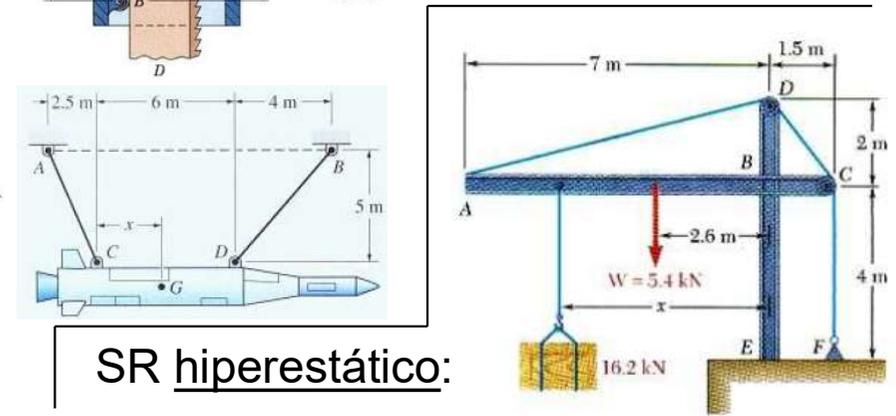
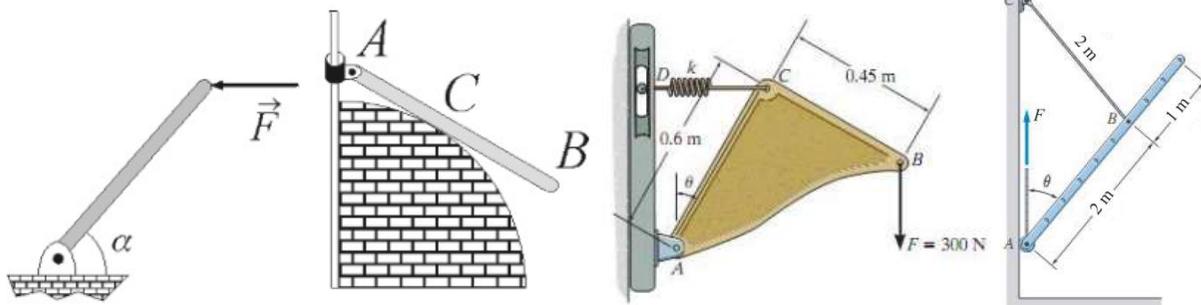
- $G = 0$  (si  $\sum C = 3$ )  $\Rightarrow$  SR **isostático**
- $G > 0$  (si  $\sum C < 3$ )  $\Rightarrow$  SR **mecanismo ó inestable**
- $G < 0$  (si  $\sum C > 3$  ; pero  $G_{real} = 0$ )  $\Rightarrow$  SR **hiperestático**  
( $|G| \equiv H$  daría el *grado de redundancia* o *hiperestaticidad*)

Ejemplos:

SR isostáticos:



SR mecanismos:



SR hiperestático:

## 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

### 4.III.4.- Grados de libertad y Estabilidad: SR mecanismo, isostático e hiperestático

- Ya sabemos que el número de g.d.l. (coordenadas o mov. independientes) del SR *plano ligado* puede *calcularse* por:  $G = 3 - \Sigma c = 3 - \Sigma I$

Sólo de ello ya podemos *extraer mucha información*:

¡Hay que *verlo también por inspección*, pues  $G_{real}$  depende no sólo del número  $\Sigma c$ , sino de cómo se dispongan en el SR!

(ver después: ►)

#### i. Clasificar al SR:

Según el *signo* de  $G$ :

- $G = 0$  (si  $\Sigma c = 3$ )  $\Rightarrow$  SR **isostático**
- $G > 0$  (si  $\Sigma c < 3$ )  $\Rightarrow$  SR **mecanismo ó inestable**
- " $G$ "  $< 0$  (si  $\Sigma c > 3$  ; pero  $G_{real} = 0$ )  $\Rightarrow$  SR **hiperestático**  
( $|G| \equiv H$  daría el *grado de redundancia* o *hiperestaticidad*)

- ii. **Estabilidad del SR:** Cuando las ligaduras dejan al SR sin g.l,  $G = 0$ , éste no tiene ningún movimiento posible, de modo que las ligaduras mantienen al SR en equilibrio...

- sean cuales sean las fuerzas activas aplicadas al SR,
- y en una configuración de equilibrio inalterable: Es el **SR ESTABLE**.



Así: Los SR isostáticos y los hiperestáticos son estables, no así los mecanismos.

Pero ¡un SR mecanismo puede estar en equilibrio aunque sea inestable! Lo que le distingue es que puede cambiar de configuración de equilibrio al cambiar las  $\{\vec{F}_i^{(act)}\}$ .

- iii. **Solubilidad o determinación estática** de las incógnitas de ligadura del SR:



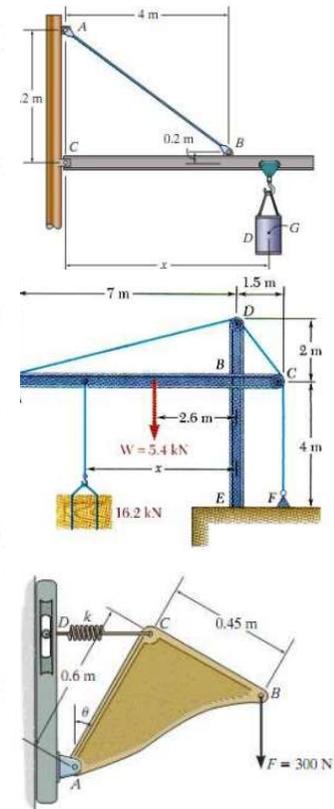
Como se dispone de 3 ecs. escalares de equilibrio, ha de ser  $\Sigma I \leq 3$ , de donde resulta:  $0 \leq 3 - \Sigma I \Leftrightarrow G \geq 0$ . Así: Los SR isostáticos y los mecanismos son estáticamente determinados, no así los hiperestáticos (que necesitan de ecs. adicionales)

### 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

#### 4.III.4.- Grados de libertad y Estabilidad: SR mecanismo, isostático e hiperestático

Entonces, la clasificación de los SR según el signo de  $G$  es además una clasificación de éstos según su estabilidad y solubilidad (o determinación estática):

Tipo	$C$	$G$	Estabilidad	Determinación
Isostático	$C = 3$	$G = 3 - C = 0$	Estable	Estáticamente determinado
Hiperestático	$C > 3$	$"G" = 3 - C < 0$ $G_{\text{real}} = 0$ $H =  3 - C  > 0$	Estable	Estáticamente indeterminado
Inestable o mecanismo	$C < 3$	$G = 3 - C > 0$	Inestable	Estáticamente determinado



Por ello, en cualquier problema o ejercicio de Estática lo primero que conviene hacer, antes de plantear las ecs. de equilibrio, es contar el número  $G$  de grados de libertad del SR y realizar esta clasificación, para así conocer bien el problema planteado (¿está el SR en equilibrio con seguridad?: Estabilidad) y qué información podremos obtener en él (¿se podrán resolver *todas* las incógnitas de reacción vincular?: Solubilidad).

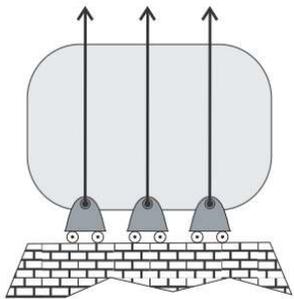


## 4.III.- Equilibrio del SR LIGADO (y 2D) –cont.–

### 4.III.4.- Grados de libertad y Estabilidad: SR mecanismo, isostático e hiperestático –cont.–



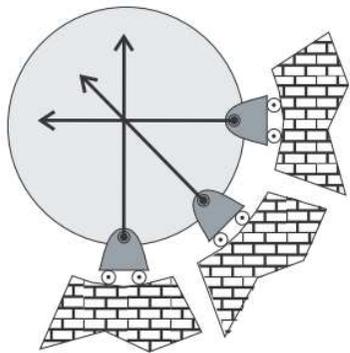
– **NOTA:** Se supone en los razonamientos anteriores que las ligaduras están “bien colocadas” en el SR, en el sentido de que *coartan el o los mov. indep. para los que se establecieron*. Hablamos así de **ligaduras propias** o de un SR **propriadamente ligado**. En caso contrario, tendremos alguna o algunas **ligaduras improprias** o no-independientes, y un SR **impropiamente ligado**.



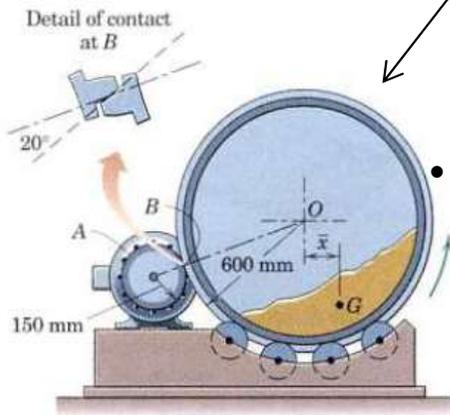
• Ejemplos:



- SR hiperestático. (No son improprias si el sólido NO es estrictamente rígido, es decir, desde el punto de vista del sólido deformable)
- SR pseudoisostático: Cuando sólo hay 3 fuerzas de reacción vincular, de dirección conocida, y éstas son paralelas o bien concurrentes.
- SR pseudohiperestático: Cuando hay más de 3 fuerzas de reacción vincular de dirección conocida que son paralelas o bien concurrentes.



• En los SR *impropiamente ligados* hay que distinguir entre el “número G calculado”,  $G = 3 - \sum c$ , y el número de grados de libertad real,  $G_{real}$ , (a determinar por inspección ocular) pues NO coincidirán. Ver los ejemplos:

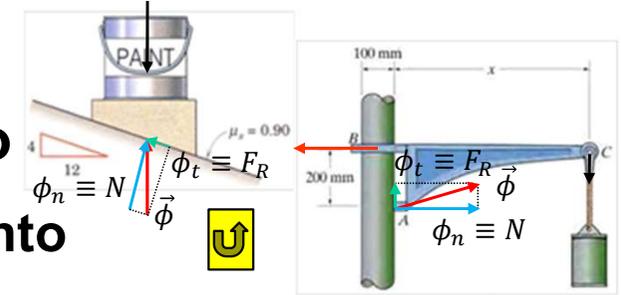


• Así, los SR *pseudoisostáticos* y *pseudohiperestáticos*, que aparentemente serían *estables resolubles* los primeros ( $G = 0$ ), y *estables irresolubles* los segundos ( $G < 0$ ), en realidad son ambos *inestables e irresolubles*, pues  $G_{real} = 1 > 0$  y las incógnitas no estarán “bien situadas” en las ecuaciones de equilibrio.

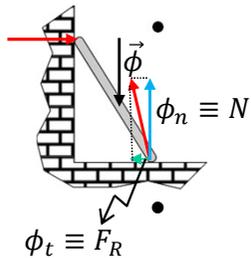


## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento

### 4.IV.1.- Introducción: Características y tipos de rozamiento



- Hasta ahora las fuerzas de reacción  $\vec{\phi}$  en los apoyos, rodillos, deslizaderas... han sido perpendiculares a las superficies de contacto correspondientes (ver la tabla): hablamos de apoyos, ligaduras, superficies o contactos lisos.



En muchos otros problemas eso no basta para explicar las situaciones de equilibrio o movimiento (ver ej.), pues para poder explicarlas debemos añadir a  $\vec{\phi}$  una componente tangente a la superficie de contacto: hablamos de apoyos, ligaduras... rugosas.

Y se llama **fuerza de rozamiento** a la componente tangente a la superficie de contacto de la fuerza de reacción vincular del contacto rugoso:  $F_R = \phi_t$ , ó  $\vec{F}_R = \phi_t \vec{u}_t$

- Características:
  - Es tangente a la superficie de contacto (por definición)
  - Se opone a cualquier movimiento entre las superficies (por ser una componente de una  $\vec{\phi}$ ).
  - Siempre están presentes, aunque a veces sean despreciables (como hasta ahora se supuso), y aparecen en parejas de acción y reacción, como toda fuerza (se suele olvidar).
  - A diferencia de la componente normal de  $\vec{\phi}$ ,  $\vec{N} = \phi_n \vec{u}_n$ , que tiene módulo “ilimitado”,  $F_R$  **tiene un valor máximo** (que suele ser “pequeño” => despreciable). En ese sentido se dice que la ligadura rugosa *no es ideal*. Es ésta la cualidad más distintiva, pues entonces:
    - *habrá que cuantificar ese valor máximo* (leyes de Amontons-Coulomb; ver 4.IV.2), y
    - *ello introduce situaciones nuevas de rotura del equilibrio*, por deslizamiento o/y vuelco (ver 4.IV.3).
  - Sólo cuando se rompe el equilibrio y hay movimiento entre las superficies,  $F_R$  origina pérdidas de energía (en forma de calor) y desgaste de los cuerpos en contacto.
  - El rozamiento suele ser nocivo en el caso anterior (no siempre: frenos), pero en los casos en que  $F_R$  puede mantener el equilibrio, suele ser conveniente, incluso imprescindible (sostener cosas, cuñas, tornillos; caminar, rodadura; correas, embragues...).



## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.1.- Introducción: Características y tipos de rozamiento –cont.–

- En las ideas anteriores estábamos estudiando el rozamiento entre las superficies exteriores de dos sólidos en contacto (sin lubricantes). Es llamado **rozamiento seco**.
- Pero pueden aplicarse características similares a las anteriores a dos tipos más de rozamiento:

– **rozamiento interno:** Fuerzas interiores en un sólido deformable que son tangentes a las superficies interiores que siguen la dirección de deformación del sólido. Por ellas se disipa energía en forma de calor cada vez que se hacen ciclos de tracción-compresión del material.

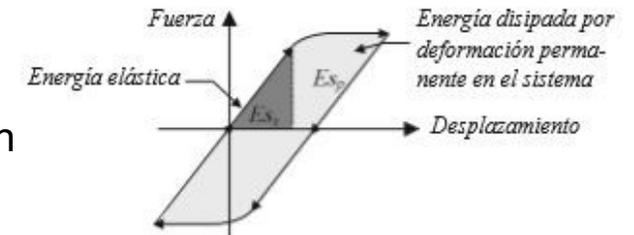
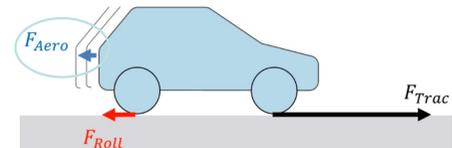
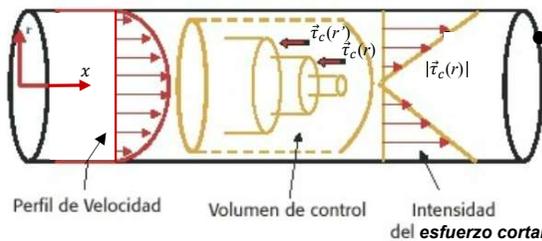


Figura 2. Ciclo de histéresis en un sistema estructural, energía elástica e inelástica

– **rozamiento fluido:**



- Fuerzas *tangentes* a las superficies de los sólidos (y a las correspondientes de los fluidos) en movimiento sobre o dentro de líquidos y gases. Son las fuerzas de *fricción aero- e hidrodinámicas*. Aquí se incluye el rozamiento entre superficies sólidas con *lubricantes*.



- Fuerzas *tangentes* entre las propias capas en que se puede descomponer el flujo de un fluido. Son los esfuerzos cortantes (interiores) en el fluido,  $\vec{\tau}_c(r) = d\vec{F}_t/dS$ , por las diferencias de velocidades entre las capas, y que son proporcionales a la viscosidad  $\eta$  del fluido (se estudiará en Física II: Instalaciones).

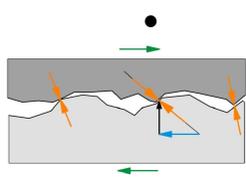
- Una gran diferencia del rozamiento *fluido* con el *seco* es que en el *fluido* no existe fuerza de rozamiento cuando el fluido está en reposo (equilibrio), sólo cuando hay movimiento relativo entre capas, mientras que en el *seco* sí hay fuerza de rozamiento en el equilibrio (como veremos después con las leyes de Amontons-Coulomb).

La segunda gran diferencia es que la fuerza de rozamiento *fluido* depende de las velocidades del movimiento de las capas (ver *Física II: Instalaciones*), mientras que el rozamiento *seco* es independiente de la velocidad (leyes de Amontons-Coulomb).



## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

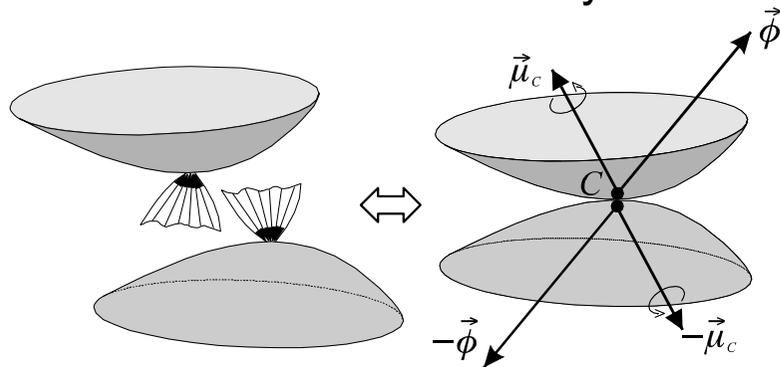
### 4.IV.2.- Estudio del rozamiento seco. Leyes de Amontons-Coulomb



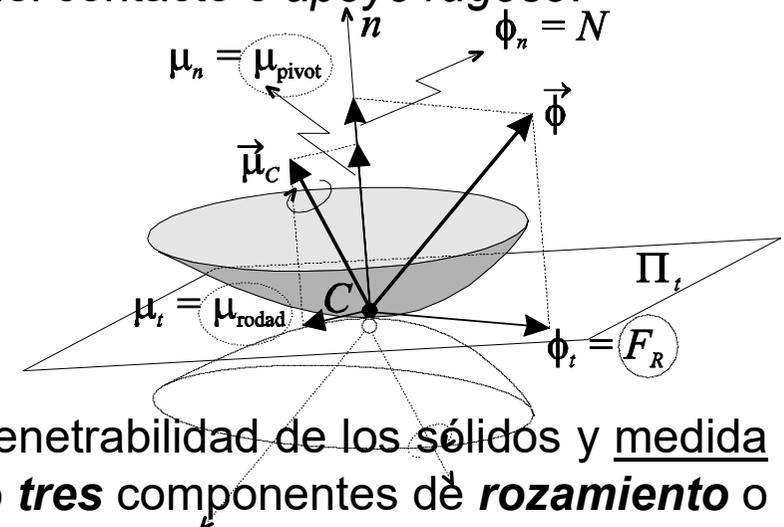
• En todo *apoyo* o *contacto*, puntual o extenso, la acción *mútua* entre las superficies es *muy compleja*,

- por el desconocimiento de la verdadera superficie de contacto: rugosidades, deformaciones;
- por la naturaleza eléctrica y el carácter estadístico de las fuerzas entre moléculas o átomos: de repulsión –no penetración– y de adhesión –soldaduras frías–; necesidad enfoque cuántico

- Pero si los cuerpos en contacto son SR, esas fuerzas de interacción siempre se pueden reducir a un sistema fuerza-par o torsor en uno de los puntos de contacto, C: Son la *fuerza* y el *momento de reacción vincular* del contacto o *apoyo rugoso*:



Y para encontrar el **rozamiento** (seco) es necesario descomponer los vectores  $\{\vec{\phi}, \vec{\mu}_c\}$  en los ejes naturales (normal y tangentes) de la superficie de contacto en el punto C:



- Además de la *normal*  $\vec{N} = \phi_n \vec{u}_n$ , reflejo de la impenetrabilidad de los sólidos y medida de su apretamiento mutuo, aparecen no una, sino **tres** componentes de **rozamiento** o **resistencia al movimiento relativo** entre superficies:



(Aunque cuanto “más puntual” es el contacto, más *despreciables* son los 2 pares resistentes  $\vec{\mu}$ ).

$\vec{F}_R = \phi_t \vec{u}_t$  , fuerza de *rozamiento* o de *resistencia al deslizamiento*.

$\vec{\mu}_{rodad} = \mu_t \vec{u}_t$  , momento de par de *resistencia a la rodadura*.

$\vec{\mu}_{pivot} = \mu_n \vec{u}_n$  , momento de par de *resistencia al pivotamiento*.

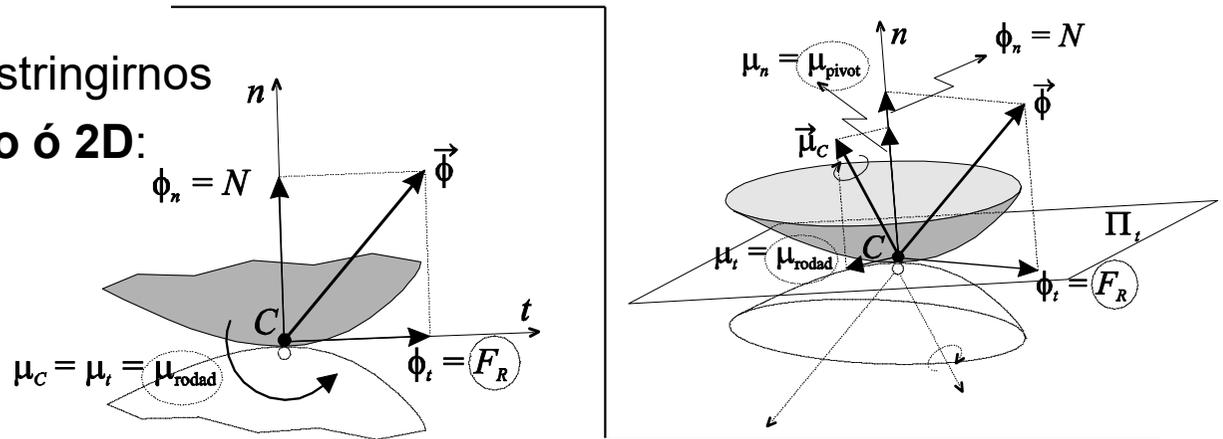
Puede entenderse que dos son las causas microscópicas de esos rozamientos o resistencias: la interpenetración de las rugosidades, y las soldaduras frías. Un aumento del módulo  $N$  de la normal de apretamiento de las superficies abundará en ello, contribuyendo a aumentar los rozamientos, lo cual será el fundamento de las leyes de Amontons-Coulomb, como veremos pronto.

## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.2.- Estudio del rozamiento seco. Leyes de Amontons-Coulomb –cont.–

- En el *equilibrio*, de sus ecuaciones ( $\Sigma \vec{F}^{(act)} + \vec{\phi} = \vec{0}$ ;  $\Sigma \vec{M}_C^{(act)} + \vec{0} + \vec{\mu}_C = \vec{0}$ ), son *calculables* la fuerza y el momento de reacción vincular del contacto, y en particular todas sus componentes, *incluidas las de rozamiento o resistencia*:  $\vec{\phi} = -\Sigma \vec{F}^{(act)}$ ;  $\vec{\mu}_C = -\Sigma \vec{M}_C^{(act)}$

- A partir de ahora vamos a restringirnos al caso habitual del **SR plano ó 2D**:



- Así, de las ecs. de eq. se calcularán las siguientes **componentes de reacción vinc**:

$$N = \phi_n = -\Sigma F_n^{(act)}, \quad F_R = \phi_t = -\Sigma F_t^{(act)}, \quad \text{y} \quad \mu_{rodad} = \mu_{t_r} = -\Sigma M_{C,t_r}^{(act)}$$

- Pero experimentalmente se observa que el equilibrio sólo se mantiene de manera inalterable o estable, sean cuales sean las  $\{\vec{F}^{(act)}\}$ , en cuanto al deslizamiento en dirección normal (debido a la rigidez e impenetrabilidad de los sólidos), y que NO ocurre así con el equilibrio frente al deslizamiento en dirección tangente ni frente a la rotación de eje *tangencial* (rodadura), que “rápidamente” son rotos por las  $\{\vec{F}^{(act)}\}$  para producir deslizamiento y/o rodadura.

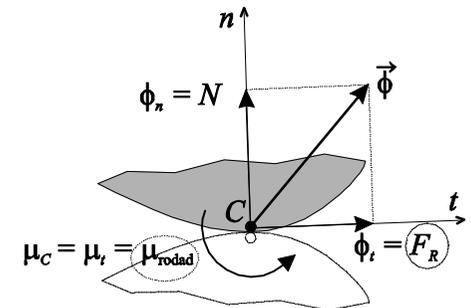
- A partir de ese momento, la  $F_R$  y la  $\mu_{rodad}$  ya NO pueden calcularse de las ecuaciones de equilibrio (a diferencia de la  $N$ ). Entonces, **han de cuantificarse los valores máximos** de  $F_R$  y  $\mu_{rodad}$ , que aún pueden calcularse de las ecs. de *equilibrio*, así como los valores de  $F_R$  y  $\mu_{rodad}$  **en el estado de movimiento.** (Ver ejemplo del “tribómetro”)

## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.2.- Estudio del rozamiento seco. Leyes de Amontons-Coulomb –cont.–

- Nos restringimos al caso habitual del **SR plano ó 2D**:
- En el *equilibrio*, de sus ecs, son *calculables* la fuerza y el momento de reacc. vinc. del contacto, apareciendo las siguientes **componentes de r. v**:

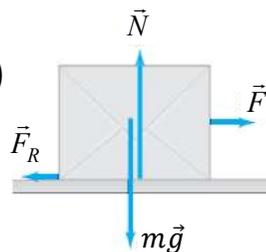
$$N = \phi_n = -\Sigma F_n^{(act)} \quad , \quad F_R = \phi_t = -\Sigma F_t^{(act)} \quad , \quad \mu_{rodad} = \mu_{t'} = -\Sigma M_{C,t'}$$



- Experimentalmente se observa que el equilibrio sólo se mantiene de manera inalterable o estable, sean cuales sean las  $\{\vec{F}^{(act)}\}$ , en cuanto al deslizamiento en dirección normal (debido a la rigidez e impenetrabilidad de los sólidos), y que NO ocurre así con el equilibrio frente al deslizamiento en dirección tangente ni frente a la rotación de eje *tangencial* (rodadura), que “rápidamente” son rotos por las  $\{\vec{F}^{(act)}\}$  para producir deslizamiento y/o rodadura.
- A partir de ese momento, la  $F_R$  y la  $\mu_{rodad}$  ya NO pueden calcularse de las ecuaciones de equilibrio (a diferencia de la  $N$ ). Entonces, **han de cuantificarse los valores máximos** de  $F_R$  y  $\mu_{rodad}$ , que aún pueden calcularse de las ecs. de *equilibrio*, así como los **valores** que alcanzan  $F_R$  y  $\mu_{rodad}$  **en el estado de movimiento**.

Ejemplo del “tribómetro”:  
( ¡se usa en la Práctica 4-I ! )

(En él no se mide ni se estudia el par de resistencia a la rodadura,  $\mu_{rodad}$ )



Mientras haya equilibrio:

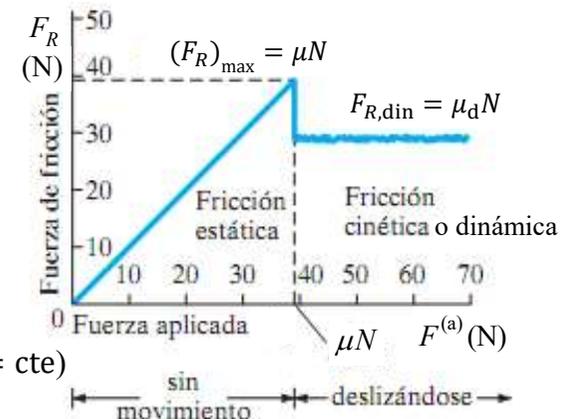
$$F_R = F^{(a)}$$

$$N = mg$$

Quando hay movimiento:

$$F^{(a)} - F_R = ma \Rightarrow F_R = F^{(a)} - ma$$

$$N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \quad (0 \text{ si } v = \text{cte})$$



- Experim.* se encuentra que **ambos** valores para  $F_R$  (y para  $\mu_{rodad}$ ) dependen del tipo de materiales en contacto, del estado de las superficies y del módulo de la propia fuerza normal del contacto,  $N$ . Ello se recoge en las **leyes de Amontons-Coulomb**:  $\begin{cases} (F_R)_{\max} = \mu N \\ F_{R,din} = \mu_d N \end{cases}$

## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.2.- Estudio del rozamiento seco. Leyes de Amontons-Coulomb –cont.–

- Leyes de Amontons-Coulomb** (¡sólo las estudiaremos para  $F_R$ , pues  $\mu_{rodad} \sim 0$  !):

$$1^a) \left. \begin{array}{l} (F_R)_{\text{máx}} \propto N, \text{ y} \\ (F_R)_{\text{máx}} \neq f(\text{Área de contacto}) \end{array} \right\} \Rightarrow (F_R)_{\text{máx}} = \mu_e N, \text{ con } \underline{\mu_e} \neq f(A), \text{ coef. de rozam. } \underline{\text{estático}}$$

$$2^a) \left. \begin{array}{l} (F_R)_{\text{dinám}} \propto N, \text{ y} \\ (F_R)_{\text{dinám}} \neq f(A; v_{\text{relat}}) \end{array} \right\} \Rightarrow (F_R)_{\text{dinám}} = \mu_d N, \text{ con } \underline{\mu_d} \neq f(A; v_{\text{relat}}), \text{ coef. de rozam. } \underline{\text{dinámico}}$$

$$3^a) (F_R)_{\text{máx}} \geq (F_R)_{\text{dinám}} \Rightarrow \mu_e \geq \mu_d$$

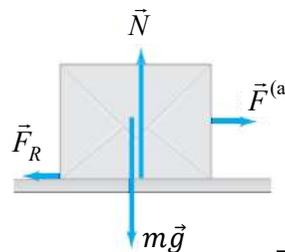
- $\mu_e$  y  $\mu_d$  dependen de los materiales en contacto, pero también del estado de las superficies (pulido, limpieza, humedad, temperatura... ). NO dependen del área de contacto (¿por qué?).
- Caracterizan a un PAR de superficies en contacto (ver *tabla*), y por lo dicho, deben inducirse de experimentos adicionales 'in situ' para cada pareja de superficies (son *leyes fenomenológicas*):

TABLA 5-1 Coeficientes de fricción†

Superficie	Coefficiente de fricción estática, $\mu_s$	Coefficiente de fricción cinética, $\mu_k$
Madera sobre madera	0.4	0.2
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.07
Acero sobre acero (sin lubricar)	0.7	0.6
Hule sobre concreto seco (Hule = caucho, goma)	1.0	0.8
Hule sobre concreto húmedo	0.7	0.5
Hule sobre otras superficies sólidas (ej: neumático-asfalto)	1-4	1
Teflón <sup>®</sup> sobre teflón en aire	0.04	0.04
Teflón sobre acero en aire	0.04	0.04
Cojinetes de bolas lubricados	<0.01	<0.01
Articulaciones sinoviales (en miembros humanos)	0.01	0.01

†Los valores son aproximados y deben considerarse únicamente como guías.

Observar que suele ser  $\mu < 1$ , de modo que habitualmente es  $F_{R \text{ máx}} < N$ . Cuando es  $\mu < 0,5 \Rightarrow F_{R \text{ máx}} < N/2$ . Por ello, si el contacto tiene un valor de  $N$  pequeño, se podría despreciar la  $F_R$ , como se supuso hasta ahora.



En el equilibrio:

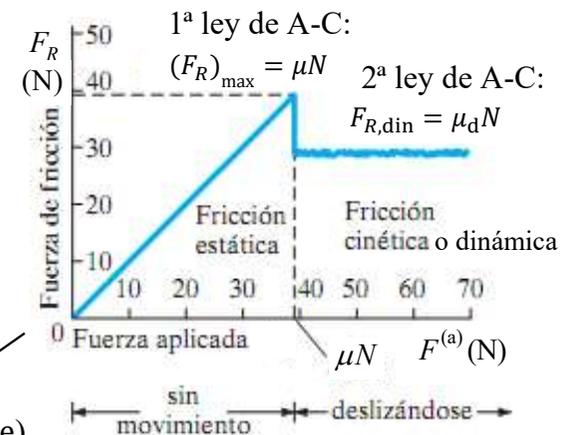
$$F_R = F^{(a)}$$

$$N = mg$$

En el movimiento:

$$F^{(a)} - F_R = ma \Rightarrow F_R = F^{(a)} - ma$$

$$N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \quad (0 \text{ si } v = \text{cte})$$



## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.2.- Estudio del rozamiento seco. Leyes de Amontons-Coulomb –cont.–

- **Leyes de Amontons-Coulomb** (¡sólo las estudiaremos para  $F_R$ , pues  $\mu_{rodad} \sim 0$  !):

$$1^a) \left. \begin{aligned} (F_R)_{\text{máx}} &\propto N, \text{ y} \\ (F_R)_{\text{máx}} &\neq f(\text{Área de contacto}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{(F_R)_{\text{máx}} = \mu_e N}$$

$$2^a) \left. \begin{aligned} (F_R)_{\text{dinám}} &\propto N, \text{ y} \\ (F_R)_{\text{dinám}} &\neq f(A; v_{\text{relat}}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{(F_R)_{\text{dinám}} = \mu_d N}$$

$$3^a) \quad (F_R)_{\text{máx}} \geq (F_R)_{\text{dinám}} \Rightarrow \boxed{\mu_e \geq \mu_d}$$

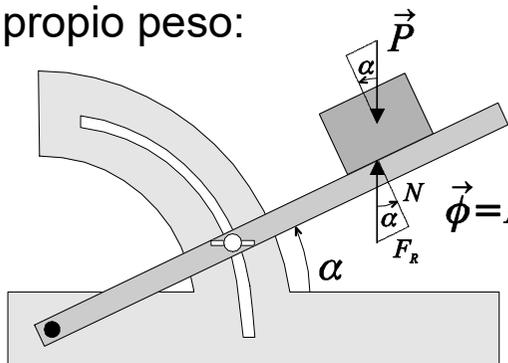
Superficie	Coefficiente de fricción estática, $\mu_s$	Coefficiente de fricción cinética, $\mu_k$
Madera sobre madera	0.4	0.2
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.07
Acero sobre acero (sin lubricar)	0.7	0.6
Hule sobre concreto seco (Hule = caucho, goma)	1.0	0.8
Hule sobre concreto húmedo	0.7	0.5
Hule sobre otras superficies sólidas (ej: neumático-asfalto) 1-4		1
Teflón <sup>®</sup> sobre teflón en aire	0.04	0.04
Teflón sobre acero en aire	0.04	0.04
Cojinetes de bolas lubricados	<0.01	<0.01
Articulaciones sinoviales (en miembros humanos)	0.01	0.01

†Los valores son aproximados y deben considerarse únicamente como guías.

- $\mu_e$  y  $\mu_d$  dependen de los materiales en contacto, pero también del estado de las superficies (pulido, limpieza, humedad, temperatura... ). NO dependen del área de contacto.
- Caracterizan a un PAR de superficies en contacto (ver *tabla*), y por lo dicho, deben inducirse de experimentos adicionales 'in situ' para cada pareja de superficies (son *leyes fenomenológicas*):

¿Experimentos para obtener  $\mu_e$  y  $\mu_d$ ? Con el tribómetro de la Práctica 4-I.

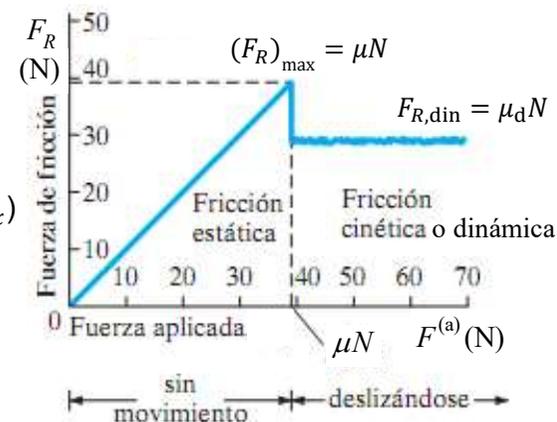
Otro tribómetro, el de *plano inclinable*: un bloque (de un material) sobre un *plano inclinable* (del otro material de interés), y el bloque sujeto sólo a su propio peso:



$$\Rightarrow \begin{cases} F_R = P \sin \alpha \\ N = P \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \mu_e = \frac{(F_R)_{\text{máx}}}{N} \stackrel{\text{(si empieza a deslizar para } \alpha = \alpha_{\text{crit}} \Rightarrow F_R = F_{R \text{ máx}})}{=} \frac{P \sin \alpha_{\text{crit}}}{P \cos \alpha_{\text{crit}}}$$

$$\boxed{\mu_e = \tan \alpha_{\text{crítico}}}$$

- Para cualquier valor del peso y del área del bloque se alcanza el equilibrio crítico por deslizamiento inminente a la misma inclinación  $\alpha_{\text{crit}}$ . Parece poco intuitivo... ¿por qué?
- Que sea  $\mu > 1$  sólo implica que  $\alpha_{\text{crit}} > 45^\circ$ , lo cual puede ser posible (ej: neumático-asfalto).



## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.3.- Nuevos problemas en Estática: Deslizamiento y vuelco inminentes

- Ya se puede utilizar la teoría fenomenológica del rozamiento seco en la Estática del SR plano que tuviera ligaduras *con rozamiento*. Se trata de hallar reacciones u otras incógnitas de las ecuaciones de equilibrio, dadas ciertas fuerzas activas conocidas y siendo uno de los *contactos con rozamiento*.

Pero ahora va a aparecer una casuística nueva, debida al rango limitado de valores que puede ofrecer la fuerza de rozamiento para mantener ese equilibrio, que puede perder el SR y comenzar a moverse si las fuerzas activas solicitan mayor fuerza de rozamiento que la máxima ( $\mu N$ ).

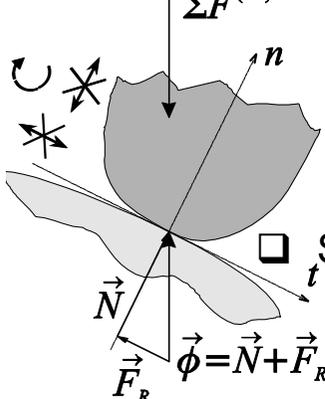
- Así, además de estudiar una situación normal de equilibrio, también deberán estudiarse los llamados equilibrios críticos:

- por **deslizamiento inminente**, cuando se haya llegado a  $F_R = F_{R,m\acute{a}x} = \mu N$ ;  $F_R \leq F_{R,m\acute{a}x} = \mu N$  sería la cond. de **no-desliz.**
- y veremos que si el contacto es extenso, podrá suceder que el pto de aplicación de la  $F_R$  y la  $N$  se coloque en el borde del contacto, a punto de salirse, hablándose entonces de **vuelco inminente**.

- Distinguiremos entonces dos situaciones, **apoyo puntual** y **apoyo extenso** (con rozamiento, claro):

- APOYO PUNTUAL:** (ver ejs. )

Si se supone  $F_R < F_{R,m\acute{a}x} = \mu N$ , el equilibrio **no es crítico**. (comprobar al final que  $F_R < \mu N$ )



- La  $F_R$  es una incógnita más a resolver de las ecuaciones de equilibrio (de las de *fuerza*)
- El apoyo no es simple, pues presenta 2 coacciones (impide *deslizamiento tangente* en el punto de contacto y *penetración normal* en él). Se ha convertido en ligadura doble, y como la *articulación*, sólo permite giros. (ver que también es  $I = c = 2: \{N; F_R\}$ ) 

Si se supone  $F_R = F_{R,m\acute{a}x} = \mu N$ , el equilibrio es **crítico, por deslizamiento inminente**.

- Contamos con esa ecuación como una 4ª ecuación a resolver junto con las 3 ecs. de equilibrio, para hallar así una 4ª incógnita adicional a las 3 que como máximo podrían tenerse.
- El apoyo está a punto de hacerse simple, pues está a punto de perderse la coacción del *deslizamiento tangente* (ello es coherente con que ahora es  $I = c = 1: \{N\}$ )

(En general, habría que estudiar 2 desl. inminentes:  $F_R = \pm \mu N$   
Dependerá de las  $\vec{F}^{(act)}$ )

- Esta suposición se hace cuando interesa calcular algo en sus valores extremos (máx ó mín)



## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.3.- Nuevos problemas en Estática: Deslizamiento y vuelco inminentes –cont.–

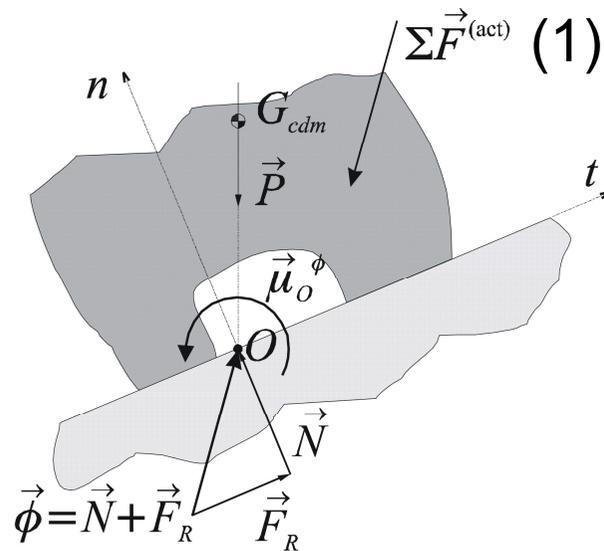
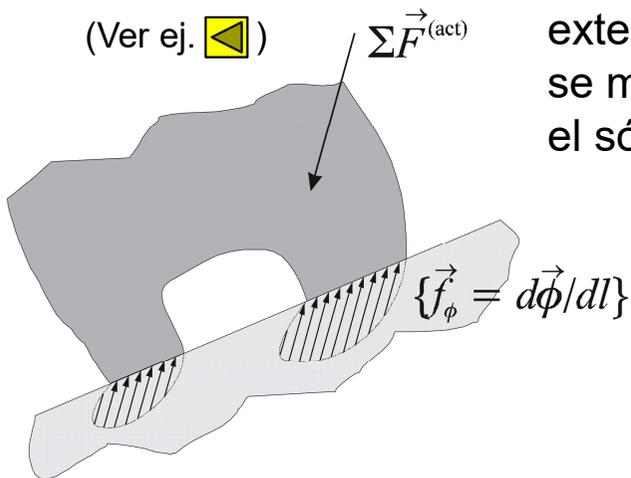
#### APOYO EXTENSO:

(Ver ej. )

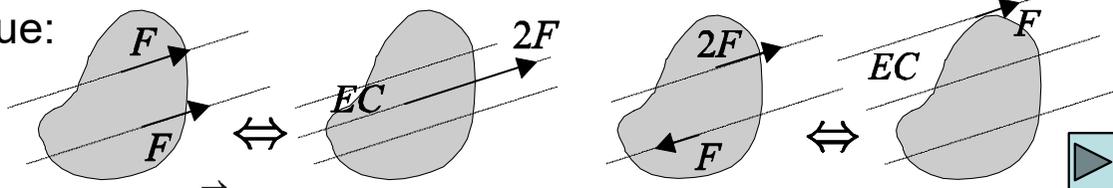
La distribución de fuerzas en el contacto rugoso extenso es unilateral (el sentido de las fuerzas se mantiene siempre igual: de la superficie hacia el sólido de interés)  $\Rightarrow \vec{R} = \int d\vec{\phi} \neq \vec{0}$

Además la distribución de fuerzas es un sistema coplanario  $\Rightarrow \vec{M} \cdot \vec{R} = 0$

Por todo ello, tenemos un sistema tipo 2º: reducible a un sistema fuerza-par fuera del eje central del sistema  $\Rightarrow$  fig. (1), y a una sola fuerza en su eje central  $\Rightarrow$  fig. (2).



También la unilateralidad hace que el EC deba cortar la superficie de apoyo por su interior, pues recordemos que:



De modo que debe ser:

$$\begin{cases} -x_{izq} \leq x_E \leq x_{dcha} \\ -Nx_{izq} \leq \mu_O^\phi (= Nx_E) \leq Nx_{dcha} \end{cases} \text{ O también:}$$

Serían las **condiciones de no-vuelco**.

Entonces, mientras las fuerzas activas, en el equilibrio, mantengan los valores de  $F_R$

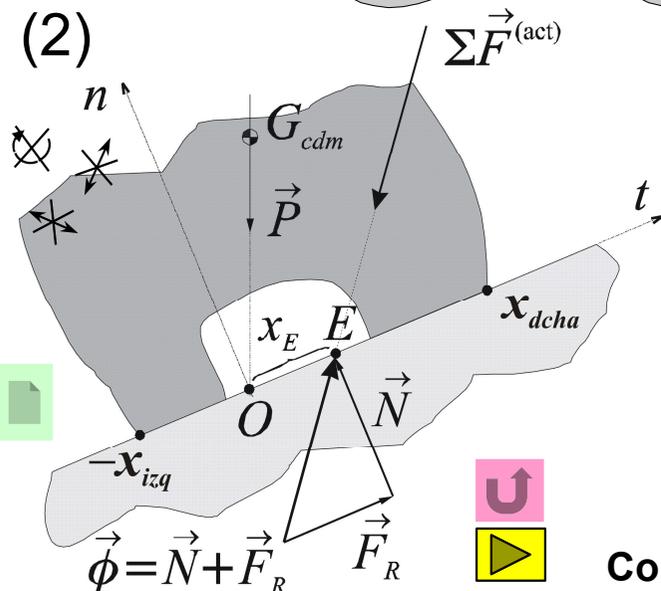
y  $x_E$  en sus límites,  $\left\{ F_R < F_R \text{ máx} = \mu N \right\}$  será  $c = I = 3$ :

$$\left\{ -x_{izq} < x_E < x_{dcha} \right\}, \quad \{N; F_R; \mu_O^\phi\} \text{ ó } \{N; F_R; x_E\}$$

Pero ahora las fuerzas activas pueden crear dos nuevas condiciones de eq. límite o crítica, independientes de la ya estudiada de deslizamiento inminente:

$$\begin{cases} x_E = x_{dcha} \rightarrow \text{vuelco inminente, a punto de girar a un lado} \\ \text{ó} \\ x_E = -x_{izq} \rightarrow \text{vuelco inminente, a punto de girar al otro lado} \end{cases}$$

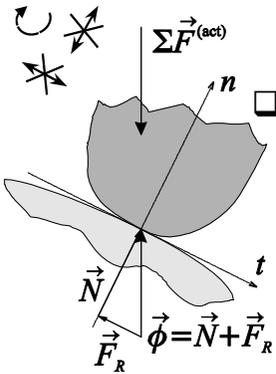
Como las cond. de desliz. y vuelco son independientes, son posibles 4 casos:





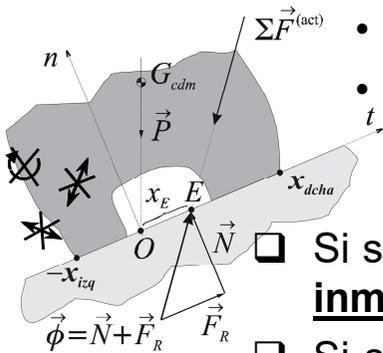
## APOYO PUNTUAL:

- Si se supone  $F_R < F_{R\text{máx}} = \mu N$ , el equilibrio **no es crítico**. (comprobar al final que  $F_R < \mu N$ )
  - La  $F_R$  es una incógnita más a resolver de las ecuaciones de equilibrio (de las de fuerza)
  - El apoyo no es simple, pues presenta 2 coacciones (impide *deslizamiento tangente* en el punto de contacto y *penetración normal* en él). Se ha convertido en ligadura doble, y como la *articulación*, sólo permite giros.
- Si se supone  $F_R = F_{R\text{máx}} = \mu N$ , el equilibrio es **crítico, por deslizamiento inminente**. (y es  $I = c = 2: \{N; F_R\}$ )
  - Contamos con esa ecuación como una 4ª ecuación a resolver junto con las 3 ecs. de equilibrio, para hallar así una 4ª incógnita adicional a las 3 que como máximo podrían tenerse.
  - El apoyo está a punto de hacerse simple, pues está a punto de perderse la coacción del *deslizamiento tangente* (ello es coherente con que ahora es  $I = c = 1: \{N\}$ ) (En gral, habría que estudiar 2 d.i:  $F_R = \pm \mu N$ )
  - Esta suposición se hace cuando interesa calcular algo en sus valores extremos (máx ó mín)



## APOYO EXTENSO: Como las cond. de desliz. y vuelco son independientes, son posibles 4 casos:

- Si se supone  $F_R < F_{R\text{máx}} = \mu N$  y  $-x_{izq} < x_E < x_{dcha}$  el equilibrio **no es crítico**. (en rigor, 7 casos)



- La  $F_R$  y la  $x_E$  son dos incógnitas más a resolver de las ecs. de equilibrio ( $x_E$  de la de momentos)
- El apoyo ahora presenta 3 coacciones (impide *deslizam. tg<sup>te</sup>* a la superficie, *penetración normal* en ella, y ¡también el *giro de rodadura!*). Se ha convertido en ligadura triple, y como el *empotramiento*, él sólo deja al SR con cero grados de libertad. (Y es  $I = c = 3: \{N; F_R; x_E\}$ )

- Si se supone  $F_R = F_{R\text{máx}} = \mu N$  y  $-x_{izq} < x_E < x_{dcha}$  el equilibrio es **crítico, por deslizamiento inminente**. Se dispone de 1 ec. adicional a las 3 de equilibrio. (Y es  $I = c = 2: \{N; x_E\}$ ) ⇔ *deslizadera rígida*

- Si se supone  $F_R < F_{R\text{máx}} = \mu N$  y  $x_E = -x_{izq}$  ó  $x_E = x_{dcha}$  el equilibrio es **crítico, por vuelco inminente** (hacia un lado o hacia el otro). 1 ec. adicional. (Y es  $I = c = 2: \{N; F_R\}$ ) ⇔ *articulación*

- (2 ecs. adicionales a las 3 de eq.) □ Si se supone  $F_R = F_{R\text{máx}} = \mu N$  y  $x_E = -x_{izq}$  ó  $x_E = x_{dcha}$  el equilibrio es **crítico, por deslizamiento y vuelco inminentes**. ( $I = c = 1: \{N\}$ ) ⇔ *apoy. s.* [Las suposiciones de *mov. inminente* se hacen cuando

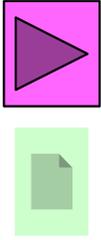
interesa calcular algo en sus valores extremos, pero como no se sabe a priori si se alcanzará primero el deslizamiento, el vuelco o ambos a la vez (dependerá de las  $\vec{F}^{(act)}$ ), **hay que estudiarlos por separado**, viendo por los resultados cuál es el que antes se produce.]

Tras este estudio, debemos **completar la tabla de ligaduras**, añadiendo el contacto puntual con rozamiento en la categoría de ligaduras *dobles* ( $c = 2$ ), y el contacto extenso con rozamiento en la de ligaduras *triples* ( $c = 3$ ). Pero con la particularidad de que, según las fuerzas activas, pueden eliminarse alguna/s de sus coacciones: el contacto puntual puede pasar a ser ligadura simple ( $c=1$ ), en la situación de deslizamiento inminente; el contacto extenso puede pasar a ser  $c=2$  (¿cuándo?) e incluso  $c=1$  (¿cuándo?).

# 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

## 4.IV.3.- Nuevos problemas en Estática: Deslizamiento y vuelco inminentes –cont.–

Tras este estudio, debemos **completar la tabla de ligaduras**, añadiendo el contacto puntual con rozamiento en la categoría de ligaduras *dobles* ( $c = 2$ ), y el contacto extenso con rozamiento en la de ligaduras *triples* ( $c = 3$ ). Pero con la particularidad de que, según las fuerzas activas, pueden eliminarse alguna/s de sus coacciones: el contacto puntual puede pasar a ser ligadura simple ( $c=1$ ), en la situación de deslizamiento inminente; el contacto extenso puede pasar a ser  $c=2$  (¿cuándo?) e incluso  $c=1$  (¿cuándo?):

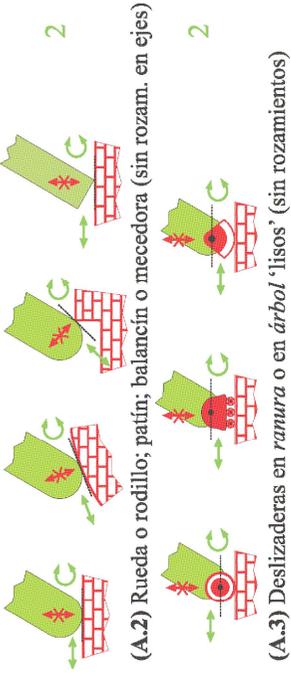


### TABLA DE VÍNCULOS PARA SÓLIDOS RÍGIDOS PLANOS

**SÍMBOLO y COACCIONES**  
**Nº GRADOS de LIBERTAD que quedan,  $G = 3 - c$**   
**Nº INCÓG. FUERZA y PAR de REACC. VINCULAR, de REACC. VINCULAR, que ejerce  $I = c$**

**(A) LIGADURAS SIMPLES:  $c = 1$**

(A.1) Apoyos simples: puntuales y sin rozamiento



(A.4) Cable o cuerda (tensos); Biela o eslabón ligero



**(B) LIGADURAS DOBLES:  $c = 2$**

(B.1) Articulación, perno o pasador (sin rozamiento en eje)



(B.2) Deslizaderas rígidas (sin rozam.)



(B.3) Apoyo extenso pero sin rozam.



**(C) LIGADURAS TRIPLES:  $c = 3$**

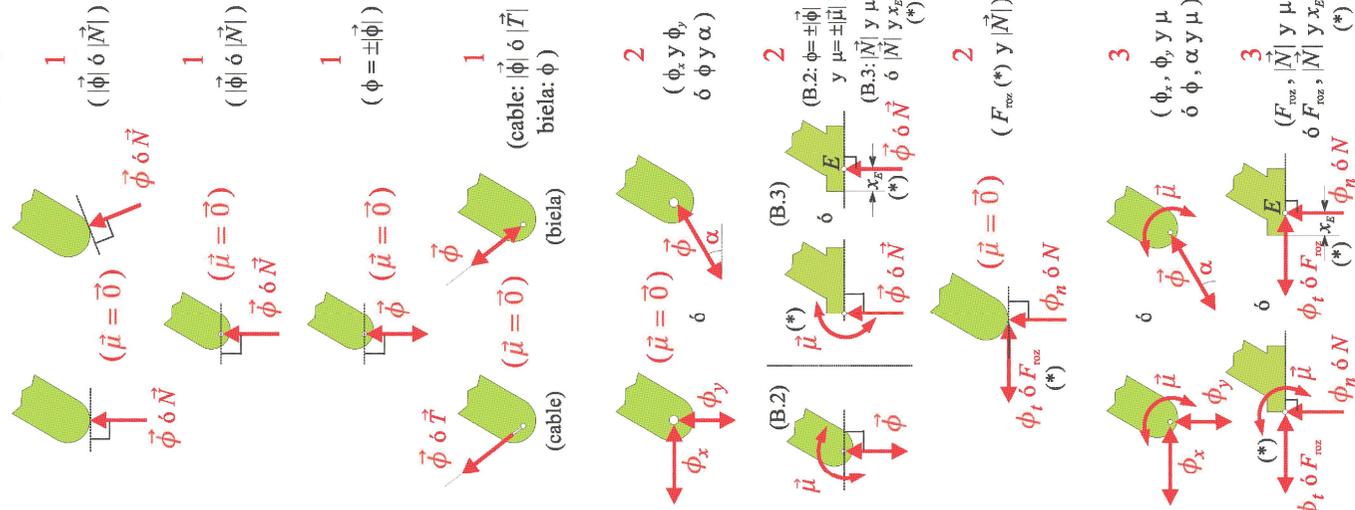
(C.1) Empotramiento; soldadura



(C.2) Apoyo extenso y con rozamiento (\*)



(\*)  $F_{roz} \leq \mu_{roz} N$ ;  $\{ 0 \leq x_p \leq b \}$ ;  $\{ 0 \leq \mu \leq Nb \}$ ; ver apartado 4.VI, sobre el rozamiento.





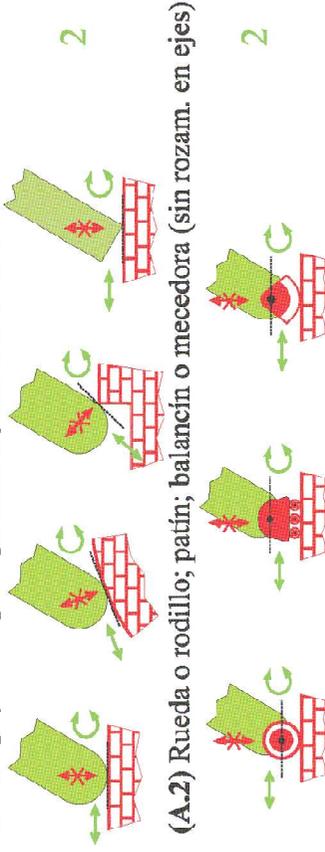
## TABLA DE VÍNCULOS PARA SÓLIDOS RÍGIDOS PLANOS

**SÍMBOLO y COACCIONES**

**Nº GRADOS de LIBERTAD que quedan,  $G = 3 - c$**   
**FUERZA y PAR de REACC. VINCULAR, que ejerce**  
**Nº INCÓG. de REACC. de VINCULAR,  $I = c$**

**(A) LIGADURAS SIMPLES:  $c = 1$**

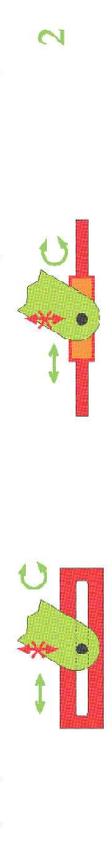
(A.1) Apoyos simples: puntuales y sin rozamiento



(A.2) Rueda o rodillo; patín; balancín o mecedora (sin rozam. en ejes)



(A.3) Deslizaderas en ranura o en árbol 'lisos' (sin rozamientos)

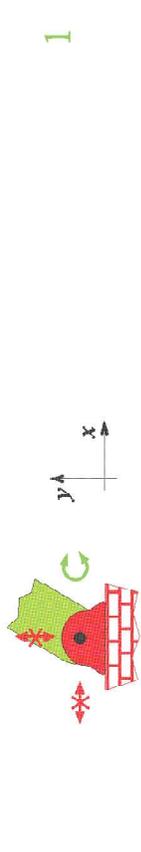


(A.4) Cable o cuerda (tensos); Biela o eslabón ligero

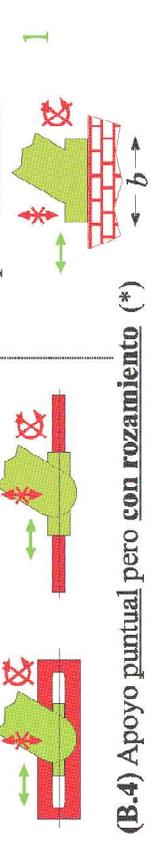


**(B) LIGADURAS DOBLES:  $c = 2$**

(B.1) Articulación, perno o pasador (sin rozamiento en eje)



(B.2) Deslizaderas rígidas (sin rozam.) (B.3) Apoyo extenso pero sin rozam.



(B.4) Apoyo puntual pero con rozamiento (\*)

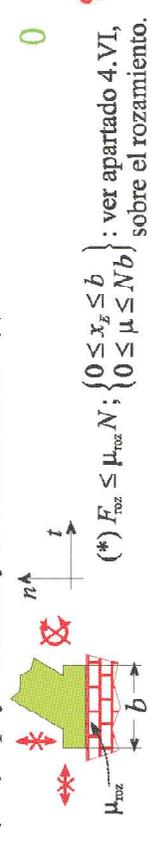


**(C) LIGADURAS TRIPLES:  $c = 3$**

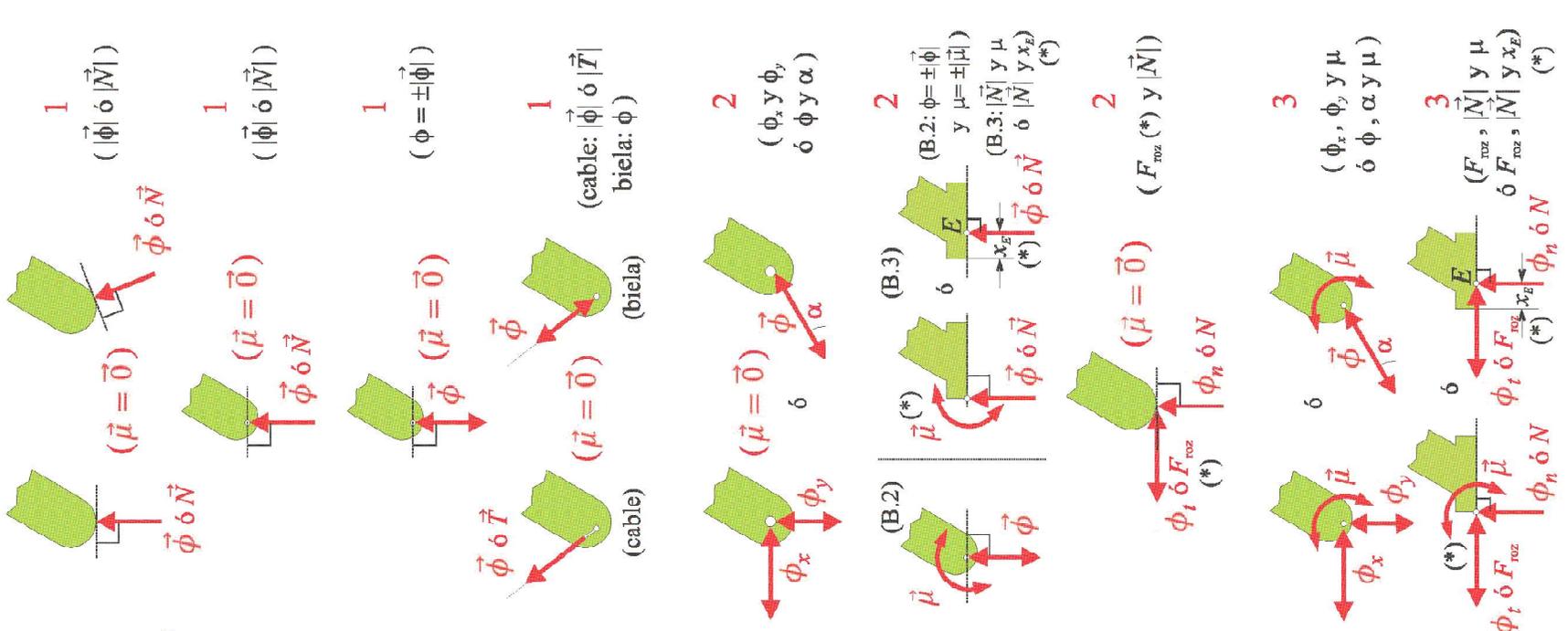
(C.1) Empotramiento; soldadura



(C.2) Apoyo extenso y con rozamiento (\*)



(\*)  $F_{roz} \leq \mu_{roz} N$ ;  $\{ 0 \leq x_E \leq b \}$  ; ver apartado 4.VI, sobre el rozamiento.



## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.3.- Nuevos problemas en Estática: Deslizamiento y vuelco inminentes –cont.–

Tras este estudio, debemos **completar la tabla de ligaduras**, añadiendo el contacto puntual con rozamiento en la categoría de ligaduras *dobles* ( $c = 2$ ), y el contacto extenso con rozamiento en la de ligaduras *triples* ( $c = 3$ ). Pero con la particularidad de que, según las fuerzas activas, pueden eliminarse alguna/s de sus coacciones: el contacto puntual puede pasar a ser ligadura simple ( $c=1$ ), en la situación de deslizamiento inminente; el contacto extenso puede pasar a ser  $c=2$  (¿cuándo?) e incluso  $c=1$  (¿cuándo?):

A continuación, otra forma de presentar la tabla completa de ligaduras o vínculos:

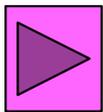
TIPO	LIGADURA	MOVIMIENTOS IMPEDIDOS	C	I.R.V.
Simple	Apoyo simple unilateral	Traslación perpendicular a la curva de apoyo	1	$\phi$
	Apoyo simple bilateral: pasador en ranura lisa o deslizadera o collar sobre árbol liso	Traslación perpendicular a la ranura, árbol o eje	1	$\phi$
	Biela	Traslación en la dirección del eje de la biela	1	$\phi$
	Cable tenso	Traslación en la dirección del cable tenso	1	$T$
Doble	Articulación	Traslaciones en dos direcciones independientes	2	$\phi_x, \phi_y$
	Deslizadera rígida	Traslación perpendicular al eje y rotación	2	$\phi, \mu$
	<u>Apoyo simple con rozamiento</u>	Traslaciones en dos direcciones independientes	2	$F_R, N$
Triple	<u>Apoyo extenso sin rozamiento</u>	Traslación perpendicular a la curva de apoyo y rotación	2	$N, Q$
	Empotramiento	Traslaciones en dos direcciones independientes y rotación	3	$\phi_x, \phi_y, \mu$
	<u>Apoyo extenso con rozamiento</u>	Traslaciones en dos direcciones independientes y rotación	3	$F_R, N, Q$

( $C$  es el número de *coacciones*)  
(*I.R.V.* son las *incógnitas de reacción vincular*)

(Siempre coincidirá el número de *I.R.V.*,  $I$ , con el número de coacciones,  $C$ :  $I = C$ )

( $Q$  es el punto de aplicación de  $\vec{\phi} \equiv \vec{N}$ , antes denotado por  $E$ )

( $Q$  es el punto de aplicación de  $\vec{\phi} = \vec{F}_R + \vec{N}$ )



## 4.IV.- Rozamiento entre SR. Estática con rozamiento –cont.–

### 4.IV.3.- Nuevos problemas en Estática: Deslizamiento y vuelco inminentes –cont.–

Vamos a estudiar y comparar las condiciones de deslizamiento y vuelco inminentes en el problema conocido del Tribómetro de *plano inclinable*:

¿De qué depende que se produzca una antes que otra (o las dos a la vez)?

Como ya sabemos, la condición de deslizamiento inminente se reduce en este caso a:

$$\tan \alpha_{\text{crítico}} = \mu_e$$

También puede hablarse de una condición de no-deslizamiento:

$$\tan \alpha \leq \mu_e$$

¿Cuál es la cond. de vuelco inminente? Ahora se considera el apoyo como *extenso*: las *dimensiones* del bloque.

Gráficamente es muy intuitiva: Conforme  $\alpha$  aumenta desde 0, la línea de acción del peso va cortando la base de apoyo desde su mitad hasta que llega a cortar el vértice inferior izquierdo.

Si siguiera aumentando  $\alpha$ , la línea de acción del peso  $\vec{P}$  y de la reacción  $\vec{\phi} = \vec{N} + \vec{F}_R$  se saldrían de la base de apoyo. Como eso es físicamente imposible, el bloque rotaría por el vértice izquierdo (volcaría), y la condición de vuelco inminente es la siguiente:

$$\tan \alpha_{\text{crítico}} = \frac{b}{h}$$

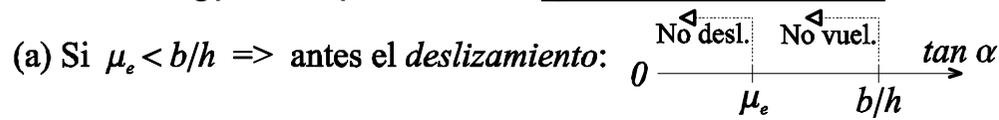
Vamos a deducirla también de la *ec. de equilibrio de momentos* respecto del *vértice inferior izquierdo*:

$$P \sin \alpha_{\text{crít}} \frac{h}{2} - P \cos \alpha_{\text{crít}} \frac{b}{2} + 0 + 0 = 0$$

También puede hablarse de una condición de no-vuelco:  $\tan \alpha \leq \frac{b}{h}$

[NOTA: la base  $b$  de apoyo a considerar es la base efectiva de apoyo, que puede ser mayor que la de contacto]

Por último, ¿puede predecirse qué sucede antes, el *deslizam.* inminente o el *vuelco* inmin.? ¿O se darán a la vez?

(a) Si  $\mu_e < b/h \Rightarrow$  antes el *deslizamiento*:  


(b) Si  $\mu_e > b/h \Rightarrow$  antes el *vuelco*:  