

Apéndice A

Nociones de álgebra vectorial

Galileo decía que la Física está en un gran libro que se abre continuamente ante nuestros ojos y que no se puede comprender sin antes aprender la lengua en que está escrito. Esa lengua es la matemática. En este apéndice introducimos algunas herramientas matemáticas esenciales que manejaremos a lo largo del libro.

A.1. Magnitudes escalares y vectoriales. Vectores libres, deslizantes y ligados

A.1.1. Magnitudes escalares y vectoriales

Los objetos que maneja la Física son *magnitudes* mensurables, también llamadas *observables* físicos: son magnitudes que se pueden comparar con un patrón o unidad y expresar, con una cierta precisión, como un múltiplo de esta unidad.

Las magnitudes físicas pueden representarse mediante diferentes objetos matemáticos. En particular, las magnitudes físicas que manejaremos en este libro serán de dos tipos: *escalares* y *vectoriales*.

Las *magnitudes escalares* son aquéllas que se caracterizan mediante uno (por lo general) o varios números reales que son invariantes bajo traslaciones y rotaciones del sistema de referencia.

EJEMPLO: La energía cinética, la temperatura, la intensidad de corriente, la carga eléctrica, el resultado de un partido de fútbol.

Las *magnitudes vectoriales* son aquéllas que se caracterizan no sólo por su magnitud sino, además, por su dirección y sentido. Se representan mediante vectores.

Los vectores se pueden visualizar como flechas cuya longitud es proporcional a la magnitud y cuyas dirección y sentido coincide con las del vector.

Galileo Galilei [Pisa, 1564; Arcetri (Florence), 1642]: Fue el pionero en usar el método experimental para determinar las leyes de la Naturaleza, y se le considera el fundador de la Dinámica, ya que fue el primero en determinar las leyes del movimiento de los proyectiles y en enunciar la ley de la inercia; hallazgos recogidos en su obra *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali* (*Discursos y demostraciones entorno a dos nuevas ciencias relacionada con la mecánica y los movimientos locales*), de 1602. Construyó uno de los primeros telescopios y sus observaciones le llevaron a defender el heliocentrismo frente al geocentrismo aristotélico. La Inquisición le abrió un proceso y le prohibió defender sus ideas.

magnitudes escalares

magnitudes vectoriales

EJEMPLO: La posición, velocidad y aceleración de una partícula, la fuerza, el momento de una fuerza.

Como veremos enseguida, hay varios tipos de magnitudes vectoriales. Otras magnitudes físicas se describen mediante otros objetos matemáticos: vectores cuyas componentes son números complejos, matrices, tensores, etc. En particular, los tensores son de uso frecuente en ciertas aplicaciones técnicas (por ejemplo, el momento de inercia de un sistema respecto de los distintos ejes que pasan por un punto fijo o las tensiones de un cuerpo según las distintas direcciones que pasan por un punto se representan por tensores), pero su estudio excede los objetivos de este libro.

A.1.2. Vectores

Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos. Cuando estos puntos están dados en cierto orden, se dice que el segmento está *orientado*.

vector

Se llama *vector* a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama *origen* y el segundo *extremo* del vector.

Para indicar un vector se usa una flecha encima de la letra que lo representa, por ejemplo $\vec{v}$, o una flecha encima de las letras que representan su origen y su extremo, por ejemplo $\vec{AB}$. Otras veces se utilizan letras negritas, por ejemplo $\mathbf{v}$. En este libro usaremos la notación $\vec{v}$, excepto en los casos en los que se desee poner de manifiesto el origen y el extremo, en cuyo caso emplearemos la notación $\vec{AB}$.

recta de aplicación

dirección

sentido

La recta que contiene el vector se llama *recta de aplicación* o *recta de acción* del vector, y determina la *dirección* del mismo. La orientación sobre la recta, definida como aquella que va del origen al extremo del vector, determina el *sentido* del vector. Todos los vectores situados sobre una misma recta o sobre rectas paralelas tienen la misma dirección. Sobre cada recta hay dos sentidos opuestos.

Toda magnitud vectorial puede representarse por un vector cuya longitud sea proporcional al valor de esa magnitud y cuya dirección y sentido sean las correspondientes a la magnitud.

módulo

Se llama *módulo* de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector es siempre un número positivo o nulo. Si el vector es $\vec{v} = \vec{AB}$, el módulo se representa mediante cualquiera de las siguientes notaciones:

$$|\vec{v}| = v = |\vec{AB}|. \quad (\text{A.1})$$

Cuando el módulo es nulo el segmento se reduce a un punto (sin dirección ni sentido). Se define como *vector nulo* aquél que tiene su módulo igual a cero.

A.1.3. Vectores libres, deslizantes y ligados

En Física las magnitudes vectoriales aparecen en tres situaciones diferentes. A cada una de estas situaciones le corresponde un tipo de vector.

Vectores libres

Los *vectores libres* son aquéllos que quedan caracterizados por su:

vectores libres

- (A) módulo,
- (B) dirección y
- (C) sentido.

Así, dos vectores libres son equivalentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Como veremos, un vector libre se caracteriza mediante un conjunto de n números reales, donde n es la *dimensión* del espacio vectorial.

En Física usaremos vectores libres para describir magnitudes vectoriales que permanecen invariantes, es decir cuyo módulo, dirección y sentido no cambian, ante:

- (1) cualquier traslación del vector a lo largo de su recta de acción y
- (2) cualquier traslación del vector paralela a sí misma.

EJEMPLO: Una magnitud física que puede describirse mediante un vector libre es la aceleración debida a la gravedad en una habitación en la superficie terrestre, $\vec{g}$, que es un vector libre de módulo $9,8 \text{ m/s}^2$, dirección vertical y sentido hacia abajo, puesto que la aceleración con que caen los cuerpos masivos en la superficie de la Tierra no cambia (aproximadamente) si nos movemos a lo largo de la vertical (siempre y cuando no nos alejemos demasiado de la superficie de la Tierra) o paralelamente a la dirección del vector (siempre y cuando los efectos de la curvatura terrestre sean despreciables).

Vectores deslizantes

Los *vectores deslizantes* son aquéllos que quedan caracterizados por su:

vectores deslizantes

- (A) módulo,
- (B) dirección,
- (C) sentido y
- (D) recta de aplicación.

Así, dos vectores deslizantes son equivalentes si tienen el mismo módulo, dirección, sentido y recta de aplicación. Matemáticamente se caracterizan mediante un conjunto de n números reales (es decir, un vector libre) y la ecuación de una recta (para cuya caracterización basta con conocer la dirección de la recta de aplicación, que coincide con la del vector, y un punto de ésta).

En Física usaremos vectores deslizantes para describir magnitudes vectoriales que permanecen invariantes ante (1) pero no ante (2).

EJEMPLO: Una magnitud física que puede describirse mediante un vector deslizante es una fuerza aplicada sobre un sólido rígido, ya que su efecto mecánico

no cambia si la aplicamos sobre puntos de la misma recta de acción. Más adelante dedicaremos mucha atención al estudio de las fuerzas aplicadas a sólidos rígidos.

vectores ligados

Vectores ligados

Los *vectores ligados* son aquéllos que quedan caracterizados por su:

- (A) módulo,
- (B) dirección,
- (C) sentido y
- (E) punto de aplicación.

Así, dos vectores ligados son equivalentes si tienen el mismo módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. Matemáticamente se caracterizan mediante un conjunto de n números reales (es decir, un vector libre) y las coordenadas de un punto.

En Física usaremos vectores ligados para describir magnitudes vectoriales que no son invariantes ni ante (1), ni ante (2).

EJEMPLO:

- Una magnitud física que puede describirse mediante un vector ligado es la velocidad instantánea de una partícula puntual, $\vec{v}(t)$. Se trata de un vector, que sólo tiene sentido físico si está aplicado sobre el punto donde se encuentra la partícula en ese instante, punto que a su vez queda caracterizado por un vector ligado, el vector posición $\vec{r}(t)$.
- Otra magnitud que debe describirse mediante un vector ligado es la fuerza aplicada sobre un cuerpo deformable (por ejemplo un chicle). El cuerpo experimenta deformaciones distintas según se aplique la fuerza en uno u otro punto.
- Otra magnitud que debe describirse mediante un vector ligado es el momento de una fuerza en un punto (sobre el que volveremos en el capítulo 3). Este vector sólo tiene sentido físico si está aplicado sobre el punto respecto al cual se ha calculado el momento de la fuerza.

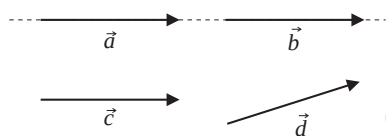


FIGURA A.1: Si los cuatro vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ fuesen vectores libres entonces $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ serían equivalentes. Si los cuatro vectores fuesen vectores deslizantes entonces sólo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ serían equivalentes. Si los cuatro vectores fuesen vectores ligados entonces no habría dos vectores equivalentes.

componentes

A.1.4. Caracterización algebraica de un vector

Componentes de un vector

Supongamos en el espacio un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de origen O y ejes x , y , z . Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ el origen y el extremo de un vector dado $\vec{a}$ (fig. A.2).

Se llaman *componentes* de un vector $\vec{a}$ respecto del sistema $(O; x, y, z)$ a las

proyecciones de $\vec{a}$ sobre los ejes x, y, z ; es decir, a los números

$$a_x = x_2 - x_1, \quad (\text{A.2})$$

$$a_y = y_2 - y_1, \quad (\text{A.3})$$

$$a_z = z_2 - z_1. \quad (\text{A.4})$$

Para denotar un vector en un cierto sistema de coordenadas cartesianas escribiremos $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Los vectores libres *opuestos* (es decir, aquéllos que tienen igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos) tienen todas las componentes iguales en valor absoluto, pero de signos contrarios.

Dos vectores libres iguales tienen las mismas componentes en cualquier sistema de coordenadas.

Como se ilustra en la fig. A.2, la longitud del vector $\vec{a}$ coincide con la de la diagonal de un paralelepípedo recto cuyas aristas son a_x, a_y, a_z . Por tanto, el módulo de $\vec{a}$ verifica

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (\text{A.5})$$

donde la raíz cuadrada se toma siempre positiva.

EJEMPLO: $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Cosenos directores

Se llaman *cosenos directores* de un vector, respecto de un sistema de coordenadas ortogonales $(O; x, y, z)$, a los cosenos de los ángulos que forma el vector con el sentido positivo de los ejes coordenados.

Los ángulos hay que tomarlos entre 0 y π radianes, de manera que los cosenos directores puedan ser positivos o negativos.

Si los ángulos del vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ con el sentido positivo de los ejes x, y, z son, respectivamente α, β, γ (fig. A.3), los cosenos directores se deducen de las fórmulas que expresan que la proyección de un segmento sobre un eje, es igual a la longitud del segmento por el coseno del ángulo que el segmento forma con el eje

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad (\text{A.6})$$

$$a_y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad (\text{A.7})$$

$$a_z = |\vec{a}| \cos \gamma. \quad (\text{A.8})$$

Sustituyendo estas igualdades en la ec. (A.5), resulta

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (\text{A.9})$$

que es la relación fundamental que liga los cosenos directores de un vector.

Conocidas las componentes de un vector se puede calcular tanto su módulo, mediante (A.5), como sus cosenos directores, mediante (A.6)–(A.8). El módulo determina la longitud del vector. Los cosenos directores determinan la dirección y sentido del vector.

Los vectores de módulo unidad se llaman *vectores unitarios* o *versores*.

A cada vector $\vec{a}$ le corresponde un versor que tiene la misma dirección y el mismo sentido. Este vector se denota por $\vec{u}_{\vec{a}}$.

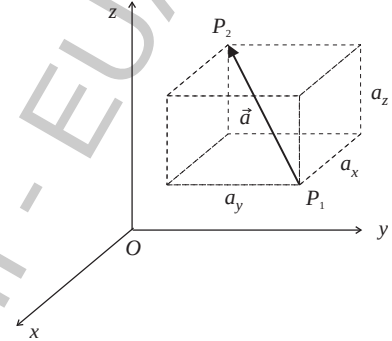


FIGURA A.2: Componentes del vector $\vec{a}$ respecto del sistema $(O; x, y, z)$.

cosenos directores

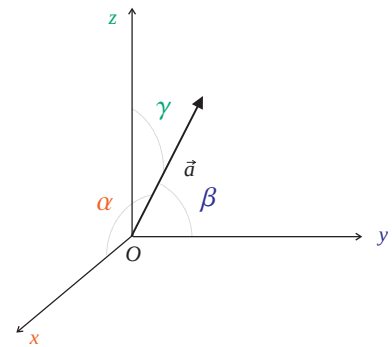


FIGURA A.3: Ángulos α, β y γ correspondientes al vector $\vec{a}$ en el sistema $(O; x, y, z)$.

vectores unitarios

Para obtener el versor que tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, basta con dividir cada una de sus componentes entre el módulo de $\vec{a}$,

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right). \quad (\text{A.10})$$

Es decir, $\vec{u}_{\vec{a}}$ es aquél que tiene por componentes los respectivos cosenos directores de $\vec{a}$,

$$\vec{u}_{\vec{a}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (\text{A.11})$$

EJEMPLO: $\vec{a} = (1, -2, 3)$; $\vec{u}_{\vec{a}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

A.2. Álgebra vectorial

A.2.1. Introducción

Los vectores no son simplemente conjuntos ordenados de números reales, sino objetos matemáticos que se comportan de una forma bien definida bajo traslaciones y rotaciones del sistema de referencia y que *en cada sistema de referencia* se describen mediante un conjunto de números reales *distinto*. Por ejemplo, consideremos el par de números $(2, 1)$. Si $(2, 1)$ representa un vector (por ejemplo, una posición, una velocidad o una fuerza) entonces cuando trasladamos y rotamos el sistema de referencia ese vector no cambia, pero se expresa mediante un par de números distinto. Sin embargo, si $(2, 1)$ representa el número de goles que se han marcado en un partido de fútbol, al cambiar de sistema de referencia el resultado no cambia. En ese caso $(2, 1)$ no es un vector, sino una pareja de escalares.

Análogamente, hay operaciones sobre vectores que son vectoriales y otras que no lo son. Todo depende de cómo se comporten los resultados de esa operación ante un cambio de sistema de referencia. Por ejemplo, la operación que consiste en multiplicar cada una de las componentes de un vector por un cierto escalar λ (producto por un escalar) es una operación vectorial, porque aplicada sobre un vector siempre proporciona el mismo vector resultante (cuyas componentes serán diferentes en cada sistema de referencia). Sin embargo, la operación que consiste en *sumar* λ a cada una de las componentes de un vector, no es una operación vectorial: aplicada sobre el mismo vector expresado en dos sistemas de referencia distintos, no da como resultado el mismo vector.

En las próximas secciones vamos a introducir una serie de operaciones “vectoriales” entre vectores. Todo lo que digamos hasta el final del capítulo es válido para vectores libres. Dado que los vectores deslizantes (ligados) no son sino vectores libres aplicados sobre una recta (un punto), también será válido para estos vectores allá donde tenga sentido (por ejemplo, tiene sentido sumar dos fuerzas aplicadas sobre la misma recta de un sólido rígido, pero no tiene sentido sumar las velocidades instantáneas de dos partículas diferentes).

A.2.2. Suma y diferencia de vectores

Adición de vectores

Para sumar geoméricamente dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se procede de la siguiente manera. Se coloca el origen de $\vec{b}$ sobre el extremo de $\vec{a}$; el vector $\vec{a} + \vec{b}$ es aquél cuyo origen es el origen de $\vec{a}$ y cuyo extremo es el extremo de $\vec{b}$ (fig. A.4 izquierda). Este procedimiento se conoce con el nombre de *regla de la polygonal*.

Al mismo resultado se llega tomando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con el mismo origen O y definiendo la suma como la diagonal que pasa por O , del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (fig. A.4 derecha). Este procedimiento se conoce como *regla del paralelogramo*.

Proyectando la polygonal formada por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ sobre los ejes coordenados, resulta que las componentes del vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ son la suma de las componentes de los vectores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Por ejemplo, al proyectar sobre el eje x (fig. A.5) la componente de $\vec{a} + \vec{b}$ es $P_1P_3 = P_1P_2 + P_2P_3 = a_x + b_x$, donde P_iP_j es la distancia (que puede ser negativa) entre los puntos P_i y P_j .

Se puede, por tanto, establecer la siguiente definición: El *vector suma* de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el vector que tiene por origen y extremo, respectivamente, el origen y el extremo de la polygonal obtenida llevando un vector a continuación del otro. Las componentes del vector suma respecto del sistema $(O; x, y, z)$ son las sumas de las componentes $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ respecto del sistema $(O; x, y, z)$, es decir,

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z), \quad (\text{A.12})$$

que es la forma algebraica de describir la suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

EJEMPLO: $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$; $\vec{a} + \vec{b} = (2, 0, 6)$.

De la fig. A.4 izda., usando el teorema de Pitágoras, se deduce inmediatamente que el módulo del vector suma verifica

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, \quad (\text{A.13})$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Por otra parte, puesto que, como se ve en la fig. A.4 izda., $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ son los lados de un triángulo, se cumple la *desigualdad triangular*:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|, \quad (\text{A.14})$$

donde la igualdad se alcanza únicamente en el caso $\theta = 0$.

Sustracción de vectores

El *vector diferencia* $\vec{a} - \vec{b}$ de dos vectores es igual a la suma de $\vec{a}$ y del vector $-\vec{b}$, opuesto a $\vec{b}$.

Por tanto, las componentes del vector diferencia $\vec{a} - \vec{b}$ respecto del sistema $(O; x, y, z)$ son

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z). \quad (\text{A.15})$$

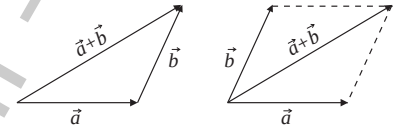


FIGURA A.4: Representación geométrica de la suma de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. A la izquierda usando la regla de la polygonal. A la derecha usando la regla del paralelogramo.

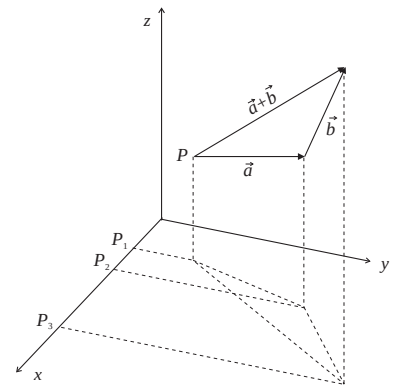


FIGURA A.5: La componente x del vector $\vec{a} + \vec{b}$ es $P_1P_3 = P_1P_2 + P_2P_3 = a_x + b_x$.

vector suma

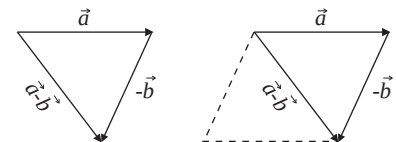


FIGURA A.6: Representación geométrica de la diferencia de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

vector diferencia

Para visualizar geoméricamente la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$ procederemos como en el caso de la suma, tomando $-\vec{b}$ en vez de $\vec{b}$. Las figs. A.6 izda. y dcha. son las análogas a las figs. A.4 izda. y dcha. para este caso de la diferencia de vectores.

Propiedades de la suma de vectores

Cualesquiera que sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se verifican las siguientes propiedades:

- Propiedad asociativa:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (\text{A.16})$$

- Propiedad conmutativa:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (\text{A.17})$$

- Elemento neutro (el vector nulo, $\vec{0}$):

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \quad (\text{A.18})$$

- Elemento simétrico (para cada vector $\vec{a}$, su opuesto $-\vec{a}$):

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}. \quad (\text{A.19})$$

A.2.3. Producto de un escalar por un vector

el escalar λ por el vector $\vec{a}$

Sea un vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y un escalar λ . Se llama *producto del escalar λ por el vector $\vec{a}$* (o producto del vector $\vec{a}$ por el escalar λ) al vector que tiene: (1) el módulo igual al producto del módulo de $\vec{a}$ por el valor absoluto de λ ; (2) la misma dirección que $\vec{a}$; (3) el mismo sentido que $\vec{a}$ si λ es positivo y el sentido opuesto si λ es negativo.

Las componentes del vector $\lambda\vec{a}$ respecto del sistema $(O; x, y, z)$ son, por tanto,

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \quad (\text{A.20})$$

Por ejemplo, la fig. A.7 representa los vectores $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$.

FIGURA A.7: Vectores $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$.

EJEMPLO: $\vec{a} = (-7, 2, 3)$, $\lambda = \frac{1}{2}$; $\lambda\vec{a} = (-\frac{7}{2}, 1, \frac{3}{2})$.

Si $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, el vector

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \lambda\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (\text{A.21})$$

es un vector de módulo unidad (o unitario o versor) y de la misma dirección y sentido que $\vec{a}$.

Por tanto, todo vector puede escribirse como el producto de su módulo por un vector unitario de su misma dirección y sentido:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{u}_{\vec{a}}. \quad (\text{A.22})$$

Si dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son paralelos, uno de ellos se puede escribir como el producto de un escalar λ por el otro vector, donde λ tiene como valor absoluto

la relación entre los módulos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y es positivo o negativo según estos vectores tengan el mismo sentido o sentido contrario:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}, \quad (\text{A.23})$$

de donde,

$$\lambda = \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (\text{A.24})$$

Por tanto, las componentes de dos vectores paralelos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son proporcionales.

Vectores fundamentales

Sea $(O; x, y, z)$ un sistema de coordenadas ortogonales. Los *versores fundamentales* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ son los que tienen, respectivamente, las direcciones de los ejes x , y , z , y con el sentido coincidente con el sentido positivo de los mismos. Sus componentes respecto del sistema $(O; x, y, z)$ son

versores fundamentales

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad (\text{A.25})$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0), \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1). \quad (\text{A.27})$$

Todo vector $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ puede escribirse en la forma

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (\text{A.28})$$

puesto que según las reglas de adición de vectores y de multiplicación de los mismos por un escalar, el vector del segundo miembro tiene componentes a_x , a_y , a_z , es decir, es el vector $\vec{a}$.

Esta descomposición de un vector como suma de los tres versores fundamentales es muy importante y útil. La llamaremos *descomposición canónica* de un vector.

Propiedades del producto de un vector por un escalar

Cualesquiera que sean los escalares α y β y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se verifican las siguientes propiedades:

- Propiedad distributiva respecto a la suma de escalares:

$$(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}. \quad (\text{A.29})$$

- Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores:

$$\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}. \quad (\text{A.30})$$

- Propiedad asociativa de escalares:

$$(\alpha \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \vec{a}). \quad (\text{A.31})$$

- Elemento neutro (el 1):

$$1 \vec{a} = \vec{a}. \quad (\text{A.32})$$

A.3. Producto escalar y producto vectorial

A.3.1. Producto escalar

producto escalar

Se llama *producto escalar* o *interno* de dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ al escalar obtenido como producto de los módulos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por el coseno del ángulo formado por los dos vectores.

Indicaremos el producto escalar de dos vectores mediante un punto “ $\cdot$ ” entre ellos. Así,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad (\text{A.33})$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Mediante las componentes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, su producto escalar se expresa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{A.34})$$

La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que el producto escalar sea cero.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección y el mismo sentido $\theta = 0$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección y sentido opuesto (se dice entonces que son vectores *antiparalelos*) $\theta = \pi$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$.

Con el producto escalar, el ángulo θ entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se calcula mediante la fórmula

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (\text{A.35})$$

EJEMPLO: $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, -4, 5)$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 = 7$,
 $\theta = \arccos \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{41}}$.

Ahora que hemos introducido el producto escalar, la ec. (A.13) se puede reescribir como

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (\text{A.36})$$

Es fácil comprobar que

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (\text{A.37})$$

La interpretación geométrica del producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ pasa por observar que $|\vec{b}| \cos \theta$ es el módulo (o el módulo multiplicado por -1) del vector que se obtiene al proyectar el vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$ (fig. A.8). Análogamente $|\vec{a}| \cos \theta$ es el módulo (o el módulo multiplicado por -1) del vector que se obtiene al proyectar el vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$. Así pues, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ se puede interpretar como el escalar que se obtiene al multiplicar el módulo de $\vec{a}$ por el módulo (o el módulo multiplicado por -1) del vector que se obtiene al proyectar el vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$.

Propiedades del producto escalar

Cualesquiera que sean el escalar λ y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se verifican las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (\text{A.38})$$

- Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad (\text{A.39})$$

■

$$\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b}. \quad (\text{A.40})$$

Vector proyección

El *vector proyección* de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ (fig. A.8), que denotaremos por $\vec{P}_{\vec{a}}(\vec{b})$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{a}$, el mismo sentido si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ o sentido opuesto si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ y cuyo módulo es el valor absoluto de

$$|\vec{b}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}. \quad (\text{A.41})$$

El vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ se expresa

$$\vec{P}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \quad (\text{A.42})$$

El vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$, que denotaremos por $\vec{P}_{\vec{b}}(\vec{a})$, se obtiene intercambiando en la ec. (A.42) los papeles de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

vector proyección

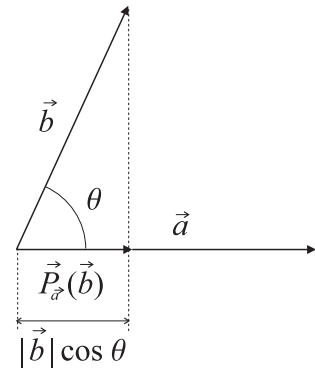


FIGURA A.8: Vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$. El módulo de este vector es el valor absoluto de $|\vec{b}| \cos \theta$. La dirección coincide con la de $\vec{a}$. El sentido es el de $\vec{a}$ o el opuesto, dependiendo del valor de θ .

A.3.2. Producto vectorial

Se llama *producto vectorial* o *externo* de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y lo denotaremos por $\vec{a} \times \vec{b}$ (o por $\vec{a} \wedge \vec{b}$), al vector que tiene: (1) el módulo igual al producto de los módulos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por el seno del ángulo (positivo) que forman,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta; \quad (\text{A.43})$$

(2) la dirección perpendicular al plano determinado por las direcciones de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$; (3) el sentido igual al que se obtiene al aplicar la *regla de la mano derecha*: consideremos los dedos corazón, índice y pulgar de la mano derecha. Colocamos el dedo índice en la misma dirección y sentido que $\vec{a}$, el dedo corazón en la misma dirección y sentido que $\vec{b}$, entonces el sentido del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es el del pulgar (fig. A.9).

Equivalentemente, el sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ también se puede definir, aplicando la *regla del sacacorchos*, como el de avance de un sacacorchos de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ siguiendo el ángulo menor de π .

Nótese que para conocer el sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ hay que conocer previamente la orientación de un triedro en el espacio (la mano derecha o el sacacorchos).

producto vectorial

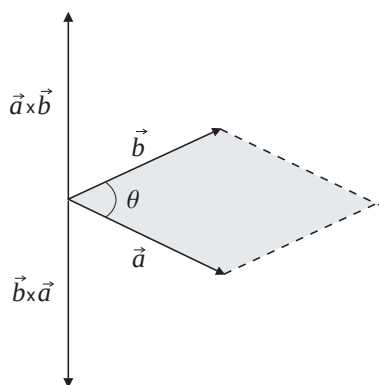


FIGURA A.10: Representación geométrica de los productos vectoriales $\vec{a} \times \vec{b}$ y $\vec{b} \times \vec{a}$. El módulo de esos productos vectoriales coincide con el área del polígono determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que es el valor absoluto de $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$. La dirección es la perpendicular al plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

La visualización geométrica del producto vectorial viene descrita por la propia definición. Baste añadir que el módulo del producto vectorial coincide con el área del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (fig. A.10).

Las componentes del vector $\vec{a} \times \vec{b}$ respecto del sistema $(O; x, y, z)$ se obtienen de las de $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ mediante el siguiente determinante

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + \\ &\quad (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

EJEMPLO: $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$; $\vec{a} \times \vec{b} = (-4, 2, 2)$, $\vec{b} \times \vec{a} = (4, -2, -2)$.

La condición necesaria y suficiente para que dos vectores tengan la misma dirección (con sentidos iguales u opuestos) es que su producto vectorial sea nulo.

Propiedades del producto vectorial

Cualesquiera que sean el escalar λ y los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, se verifican las siguientes propiedades:

- Propiedad anticonmutativa:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (\text{A.45})$$

- Carece de la propiedad asociativa:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}. \quad (\text{A.46})$$

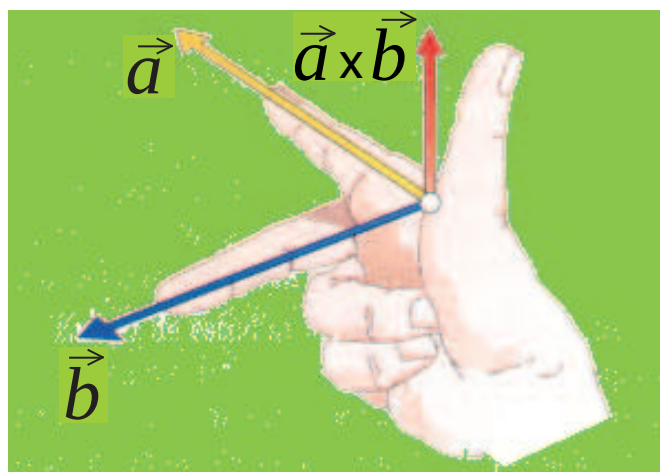


FIGURA A.9: Regla de la mano derecha para obtener el sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$.

- Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad (\text{A.47})$$

■

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b}. \quad (\text{A.48})$$

Además, es fácil comprobar que los versores fundamentales verifican

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad (\text{A.49})$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad (\text{A.50})$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \quad (\text{A.51})$$

Como veremos más adelante, las ecs. (A.49)–(A.51) implican que los versores fundamentales forman una base cartesiana en un espacio vectorial de dimensión 3.

A.4. Independencia lineal. Bases

A.4.1. Independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ se dice que es *linealmente independiente* si la ecuación

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \quad (\text{A.52})$$

linealmente independiente

sólo tiene la solución trivial $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Si existe alguna solución no trivial a la ec. (A.52); es decir, si al menos uno de los $\lambda_i \neq 0$, entonces diremos que los vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ son *linealmente dependientes*.

Ningún vector de un conjunto de vectores linealmente independientes puede expresarse como combinación lineal de los otros. Es decir, la ecuación

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{v}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{v}_{i+1} + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{v}_i \quad (\text{A.53})$$

no tiene solución.

En un conjunto de vectores linealmente dependientes hay al menos un vector que puede expresarse como combinación lineal de los otros.

La *dimensión* de un espacio vectorial V es el mayor número posible de vectores linealmente independientes en V .

A.4.2. Bases

Un conjunto de vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ se dice que es una *base* de un espacio vectorial V de dimensión k si:

base

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ es linealmente independiente, y
- cualquier vector $\vec{v}$ de V se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base. Es decir, existe un conjunto de números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, tales que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$.

base ortogonal

Una base se dice *base ortogonal* si el producto escalar de cualquier pareja de vectores de la base es cero.

base ortonormal

Una base se dice *base ortonormal* si es una base ortogonal y está formada por vectores unitarios.

base cartesiana

Si $k \geq 3$, una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ se dice *base cartesiana* si es una base ortonormal y además $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_{k-1} \times \vec{v}_k = \vec{v}_1$.

EJEMPLO: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es una base cartesiana de $\mathbb{R}^3$ porque:

- $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es linealmente independiente,
 - $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \exists v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R} : \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$,
 - $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$,
 - $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$,
 - se verifican las ecs. (A.49)–(A.51).
-

Problemas propuestos

A.1. Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{b} = (1, 2, 2)$, calcula:

- $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.
- El ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- El vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{a}$. El vector unitario que tiene la misma dirección y sentido opuesto que $\vec{b}$.
- Los cosenos directores de $\vec{a}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$.
- El vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.
- Un vector de módulo 7 que sea perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

A.2. El vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ tiene como origen $P_1(1, 0, 2)$ y extremo $P_2(2, 2, 0)$. Halla:

- Las componentes cartesianas del vector.
- Su módulo y cosenos directores.
- El vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{P_1P_2}$.
- El vector con la misma dirección y el mismo sentido que $\overrightarrow{P_1P_2}$ pero de módulo 5.
- Un vector perpendicular a $\overrightarrow{P_1P_2}$, de módulo 5 y cuya componente x valga 0.

A.3. Dada la recta de ecuación $x + 3y - 4 = 0$, determina:

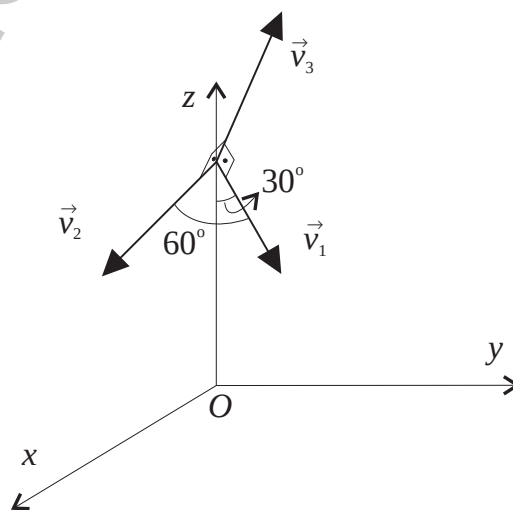
- Un vector unitario en la dirección de la recta.

(b) El vector proyección del vector $\vec{v} = (3, 4)$ sobre la recta.

(c) El ángulo que forma $\vec{v}$ con la recta.

A.4. Consideremos los tres vectores libres $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ de la figura. Sabiendo que: $\vec{v}_1$ está contenido en el plano OYZ , $\vec{v}_2$ está contenido en el plano OXZ , $\vec{v}_3$ es perpendicular tanto a $\vec{v}_1$ como a $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ tiene componente z positiva, $|\vec{v}_1| = 4$, $|\vec{v}_2| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{v}_3| = 3\sqrt{6}$.

- Halla las componentes de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.
- Halla los ángulos que forma el vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_3$ con los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- Calcula el vector proyección de $\vec{v}_1$ sobre $\vec{v}_2$ y el vector proyección de $\vec{v}_2$ sobre $\vec{v}_1$.



PROBLEMA A.4

Cuestiones

A.1. El producto escalar de dos vectores unitarios es

- un vector unitario.
- la unidad.
- un valor numérico comprendido entre cero y uno.

(d) un valor numérico comprendido entre menos uno y uno.

A.2. Sea $\vec{a} \cdot \vec{b}$ el producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Si $\vec{b}$ es un vector unitario entonces $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ es siempre

- igual al módulo de la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

- (b) igual al coseno del ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- (c) igual al módulo de la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.
- (d) igual al módulo de $\vec{a}$.

A.3. El vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ no puede tener

- (a) la misma dirección que $\vec{a}$.
- (b) la misma dirección que $\vec{b}$.
- (c) módulo mayor que el de $\vec{a}$.
- (d) módulo mayor que el de $\vec{b}$.

A.4. Dada la expresión vectorial $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}$, con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, se cumple que

- (a) $\vec{b}$ es un vector unitario paralelo a $\vec{a}$.
- (b) $\vec{b}$ es un vector unitario perpendicular a $\vec{a}$.
- (c) $\vec{b}$ es un vector unitario coplanario con $\vec{a}$.
- (d) la expresión no es correcta para ningún $\vec{b}$.

A.5. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no nulos, el resultado de $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

- (a) es cero si los tres vectores son coplanarios.
- (b) es un vector perpendicular a $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
- (c) es cero si $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanarios.
- (d) siempre es un escalar no negativo.

A.6. Sean tres vectores no nulos $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Las componentes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respecto del sistema cartesiano $\{O; x, y, z\}$ son, respectivamente, (a_x, a_y, a_z) y (b_x, b_y, b_z) ; el ángulo que forma el vector $\vec{a}$ con el sentido positivo del eje z es γ ; el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es θ . Señala la opción INCORRECTA.

- (a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.
- (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x, a_y b_y, a_z b_z)$.
- (c) $|\vec{a}| = a_z / \cos \gamma$.
- (d) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$.